ELEMENTE DER QUATERNIONEN

Sir William Rowan Hamilton

Digitized by Google

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 1808.84

77-
23/4/1853
5 x 15

Digitized by Google

ELEMENTE

DER

QUATERNIONEN

VON

Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON

Mitglied der königlichen Astronomischen Gesellschaft zu London; correspondirendes Mitglied der königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, der kaiserlich königlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien etc. etc., Professor der Astronomie an der Universität zu Dublin und königlicher Astronom von Irland.

HERAUSGEGEBEN VON SEINEM SOHNE

WILLIAM EDWIN HAMILTON.

DEUTSCH

VON

PAUL GLAN

Privatdocent für Physik an der Universität zu Berlin.

ERSTER BAND.

LEIPZIG,

JOHANN AMBROSIUS BARTH.

1882.

Digitized by Google

~~VI. 3491~~
Math 1808.84
MAY 11 1886
Harvard.
(I. XL.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Digitized by Google

Vorwort des Uebersetzers.

Die Elemente der Quaternionen von William Rowan Hamilton, die ich in deutscher Uebersetzung hiermit dem Publicum vorlege, sind dazu bestimmt, eine neue Rechenart einzuführen, die mehr in einfache Zeichen zu fassen gestattet, als es die üblichen mathematischen Methoden erlauben. Damit begründet sie aber, wie ich glaube, einen wesentlichen Fortschritt und gewährt eine willkommene Handhabe besonders für diejenigen, welche die Mathematik nur als Hülfswissenschaft benutzen, also wohl überhaupt für den grösseren Theil derjenigen, die sich mit ihr beschäftigen. Der Nutzen der Mathematik für Anwendungen besteht wesentlich darin, dass sie uns eine einfache Zeichensprache bietet, durch die wir Beziehungen zwischen Grössen ausdrücken können und dass sie uns lehrt, in vielen Fällen fast auf mechanische Weise aus einer erkannten Beziehung neue abzuleiten, ohne dass wir nöthig hätten, mühsame logische Ueberlegungen anzustellen, wie wir sie ohne diese Zeichensprache gebrauchen müssten. Weil sie das leistet, aber auch nur so lange, ist sie eine wesentliche Erleichterung für diejenigen, welche sie anwenden wollen. Wenn indessen die Rechenoperationen, die man in einzelnen Fragen anwenden muss, um aus gegebenen Beziehungen neue abzuleiten, so mühsam oder schwierig werden, dass nur ein unverhältnissmässiger Aufwand von Arbeit sie bewältigen, oder wenn man nur bei langem Nachdenken und grossem Scharfsinn einfache Lösungen finden kann, dann hört sie, wenigstens für Anwendungen, auf von Nutzen zu sein und es kann fraglich werden, ob man nicht ohne ihre Anwendung besser zum Ziele kommt.

Digitized by Google

Diese Gesichtspunkte waren es denn auch, die mich zur Beschäftigung mit den Quaternionen veranlassten. Fragen über elastische Deformationen fester Körper, über die Vertheilung der Electricität auf verschiedenen Leitern und viele andere sind im Rahmen der üblichen Methoden so schwer lösbar, und an ihrer Lösung ist doch der Physiker zugleich so interessirt, dass jede neue Methode, die bessere Aussicht zu Lösungen bietet, aufs eifrigste benutzt werden muss. Und solche Aussicht scheinen die Quaternionen zu bieten. Die Zeichen derselben unterscheiden sich von den gebräuchlichen mathematischen dadurch, dass sie nicht nur Grössenverhältnisse angeben, sondern auch Eigenschaften in Beziehung auf Lage und Bewegung; das Zeichen eines Vectors bedeutet eine geradlinige Fortbewegung von bestimmter Grösse und Richtung, das Zeichen + zwischen zwei Vectoren bedeutet, dass man zur Fortbewegung des ersten die Fortbewegung hinzuthun soll, die der zweite darstellt; der Quotient zweier Vectoren enthält den Begriff einer Drehung von bestimmter Grösse, in bestimmtem Sinne, um eine bestimmte Achse; so erlauben die Zeichen dieser neuen Rechenart eine leichte mechanische Deutung, ein so wichtiges Moment für die naturwissenschaftliche Anwendung, und umgekehrt lassen sich einfache mechanische Vorgänge auch in einfache Zeichen fassen.

Wenn ich hier die mechanische Bedeutung betont habe, einen Gesichtspunkt, der in dem vorliegenden Buche besonders hervorgehoben ist, so haben die Quaternionen auch eine ebenso einfache geometrische Verwendbarkeit. Der geradlinigen Bewegung entspricht geometrisch die gerade Linie, der Drehung der Winkel, und diese einfache Fassung der Elementarbegriffe der Geometrie liefert denn auch ebenso einfache Formeln für höhere geometrische Gebilde. Oder ist es nicht einfach, wenn eine Kugel vom Radius a sich durch die Formel,

$$\varrho^2 = -a^2,$$

darstellt, eine gerade Linie, die durch den Endpunkt der Linie α geht und der Linie β parallel ist, durch die Formel:

$$\varrho = \alpha + x\beta,$$

dass wenn $\varrho = \varphi(t)$ die Gleichung irgend einer Curve ist, mag

Digitized by Google

sie eben oder gewunden sein, das Differential von ϱ oder $d\varrho$ die Tangente ergiebt? Ueberhaupt scheint sich mir hier die angemessenere Behandlungsart für Curven darzubieten, denn sie nöthigt nicht die Curve als Durchschnitt zweier Flächen aufzufassen, eine der Curve an sich fremde Art der Auffassung, sondern erlaubt sie für sich zu behandeln, nach den ihr eigenthümlichen Eigenschaften.

Und wenn ich zu den geometrischen Beispielen ein mechanisches hinzufüge, wie einfach ist nicht die Darstellung der unendlich kleinen Bewegung eines vollkommen freien, starren Körpers,

$$a\varepsilon + V\varepsilon\alpha,$$

aus der man unmittelbar abliest, dass sie eine Drehung um die Linie ε als Achse bedeutet, um so viel Winkeleinheiten, als ε Längeneinheiten enthält und dass eine fortschreitende Bewegung in der Richtung der Linie ε stattfindet, a mal so viel, als die Länge der Linie beträgt.

Ein fernerer Vorzug der Quaternionen ist die grosse Mannigfaltigkeit der Transformationen, die sie ermöglichen; man kann aus einer gegebenen Formel eine Fülle neuer ableiten, von denen fast jede eine geometrische Deutung zulässt. So gewinnt man leicht neue geometrische Beziehungen aus einer bekannten.

Das sind die Vortheile, welche die Zeichensprache der Quaternionen bietet. Um sie in Deutschlaud einzuführen lagen mir drei Lehrbücher vor: die *Elements of Quaternions* von Hamilton selbst, *an Elementary Treatise on Quaternions* von P. G. Tait, und die *Introduction to Quaternions* von P. Kelland und P. G. Tait. Ich habe mich für das erste entschieden; einmal, weil es das umfassendste ist, und dann, weil es die Quaternionen in der ihrer eigenthümlichen Natur angemessensten Behandlung bietet. Das Rechnen mit Quaternionen erfordert andere, eigenartige Methoden, wenn man all den Nutzen ziehen will, den diese Zeichensprache zu gewähren vermag und diese eigenartige Behandlung, in reichster Mannigfaltigkeit und nach den allerverschiedensten Richtungen angewandt und erweitert zu haben, scheint mir der grosse Vorzug des letzten Werkes des Schöpfers der Quaternionen selbst. Und dabei ist die Sprache

Digitized by Google

doch einfach, die Darstellungsweise leicht verständlich, fast breit; der Verfasser giebt oft demselben Gedanken unmittelbar hintereinander in den verschiedensten Formen Ausdruck, um nur ja richtig verstanden zu werden oder alle Gesichtspunkte zu bieten. Es giebt, als Nachfolger eines anderen grösseren Werkes über denselben Gegenstand und von demselben Verfasser, uns eine Darstellung von durchdachter Klarheit, wie man sie nur nach mehrmaliger Bearbeitung zu gewinnen pflegt.

Das Werk besteht aus drei Theilen; der erste Theil giebt Alles, was sich auf Vectoren und ihre Zusammensetzung durch Addition und Subtraction bezieht. Er führt zunächst den Begriff eines Vectors ein, giebt dann Anwendungen derselben auf Punkte und Linien in einer Ebne, auf den Raum, die Darstellung von Flächen und Curven durch Vectoren, ihre Anwendung zur Bestimmung des Schwerpunktes und einiges über Differentiale von Vectoren. Unter den Anwendungen finden sich viele Sätze, die Möbius in seinem „barycentrischen Calcül“ niedergelegt hat, in die Zeichensprache der Quaternionen übertragen. Der zweite Theil handelt von den Quotienten von Vectoren und der dritte von den Producten und Potenzen von Vectoren mit zahlreichen geometrischen und physikalischen Anwendungen.

Ich beabsichtige, das ursprünglich in einem sehr umfangreichen Bande erschienene Werk in zwei Bänden erscheinen zu lassen, eine Eintheilung, die das Buch, wie ich hoffe, handlicher machen wird. Der erste Band enthält die Theorie der Quaternionen und würde für sich allein ein vollständiges Lehrbuch des Quaternionencalcüls bilden mit zahlreichen erläuternden Beispielen; er umfasst etwa die erste Hälfte des ursprünglichen Werkes. Der zweite Band giebt nur Anwendungen, und zwar eine systematische Durcharbeitung der Geometrie mit Hülfe der Quaternionenrechnung und einiger Abschnitte aus der Mechanik und Physik.

Um das Studium des so viele neue Begriffe und Ausdrucksweisen einführenden Werkes zu erleichtern, hat der Verfasser einige erläuternde Bemerkungen hinzugefügt, die ich hier, soweit sie den vorliegenden ersten Band betreffen, folgen lasse.

Sie sind von Hamilton selbst zum Theil als ausführlichere

Digitized by Google

Inhaltsangaben gegeben, als sie das Inhaltsverzeichniss selbst bietet, zum Theil als Hinweise, von welcher Wichtigkeit die einzelnen Abschnitte des Werkes für ein erstes Studium der Quaternionen sind, und in welcher Reihenfolge sie am besten gelesen werden, wenn man eine rasche Kenntniss der Haupttheile gewinnen will. Hamilton fügt diese Erläuterungen unmittelbar dem Inhaltsverzeichniss ein, so dass sie als Zusätze zu demselben an den einzelnen Stellen eingereiht sind. Ich habe vorgezogen, sie im Zusammenhang als Einleitung den einzelnen Bänden voran zu stellen; sie erscheinen so als eine kurze zusammenhängende Darstellung des Inhalts, mit fördernden Bemerkungen für das erste Studium und geben dem Leser einen raschen Ueberblick und nützliche Bemerkungen zur Erkenntniss der Wichtigkeit der einzelnen Theile im Zusammenhange des Ganzen. Ich lasse hier diejenigen folgen, welche den ersten Band betreffen, mit wenigen Zusätzen, wie sie die veränderte Anordnung nöthig machte.

Der erste Theil des ersten Bandes führt den Begriff eines Vectors ein, als einer geraden Linie von bestimmter Richtung, und handelt von den Summen und Differenzen von Vectoren. Das kurze erste Kapitel des ersten Theiles des ersten Bandes sollte von einem Anfänger mit Sorgfalt gelesen werden; irgend ein Missverständniss über die Bedeutung des Wortes „Vector“ wäre verhängnissvoll für weitere Fortschritte in den Quaternionen. Das Kapitel enthält auch Erklärungen der damit in Verbindung stehenden, doch nicht gleich wichtigen, Worte oder Ausdrücke „Revector“, „Provector“, „Transvector“, „wirkliche und null Vectoren“, „entgegengesetzte und aufeinanderfolgende Vectoren“, „Anfangspunkt und Endpunkt eines Vectors“, „gleiche und ungleiche Vectoren“, „Addition und Subtraction von Vectoren“, „Vielfache und Brüche von Vectoren“ u. s. w.; es giebt auch die Bezeichnung $B-A$ für den Vector (oder die gerade Linie von bestimmter Richtung) AB: und eine Herleitung des Resultates, das für Quaternionen wesentlich, aber nicht besonders eigenthümlich (vergleiche die zweite Anmerkung zu Artikel 207) ist, dass die hier sogenannte „Vector-Summe“ zweier coinitialen Seiten eines Parallelogrammes die dazwischenliegende und coinitiale Diagonale ist.

Der Ausdruck „Skalar“ wird auch eingeführt, in Verbindung mit Coefficienten von Vectoren.

Nach Durchlesung der beiden ersten Abschnitte des zweiten Kapitels und vielleicht der drei ersten Artikel (31—33, Seite 25—27) des folgenden Abschnittes findet es der Leser bei einer ersten Durchsicht vielleicht angemessen, sofort zum dritten Kapitel dieses Theiles überzugehen, und nur die beiden ersten Artikel (62, 63, Seite 55—57) des ersten Abschnittes dieses Kapitels, über Vectoren im Raume, zu lesen, bevor er den zweiten Theil (Seite 133) beginnt, der von Quaternionen als Quotienten von Vectoren handelt.

Neben anderen Resultaten wird in diesem Kapitel auf Seite 48 ein Lehrsatz gegeben, der eine neue geometrische Erzeugung von (ebenen oder sphärischen) Curven der dritten Ordnung darzubieten scheint. Auf die anharmonischen Coordinaten und Gleichungen, die auf die Ebene und den Raum angewandt sind, wurde der Verfasser durch einige seiner Vector-Formen geführt; auch ihre geometrische Bedeutung wird angegeben. Die geometrischen Netze wurden zuerst von Professor Möbius in seinem barycentrischen Calcül besprochen, aber sie sind in dem vorliegenden Werke mit einer ganz neuen Rechenart behandelt; und, wenigstens für den Raum, wird ihre Theorie dabei in dem Kapitel, zu dem wir jetzt übergehen wollen, bedeutend erweitert.

Wir haben dem Leser schon empfohlen, die ersten beiden Artikel des ersten Abschnittes des dritten Kapitels auch bei einer ersten Durchsicht dieses Bandes zu lesen, und dann zum zweiten Theile überzugehen.

Eine Anwendung von endlichen Differenzen findet sich im Zusammenhange mit einer Frage über Schwerpunkte auf Seite 107. Die anharmonische Erzeugung eines durch Bewegung einer Geraden entstandenen Hyperboloids (oder Paraboloids) wird benutzt, um anharmonische Gleichungen zu erläutern; und es werden (ausser anderen Beispielen) für gewisse Kegel der zweiten und dritten Ordnung die Vector-Gleichungen aufgestellt. In dem letzten Abschnitte wird eine Definition für Differentiale (von Vectoren und Skalaren) vorgeschlagen, die nachher auf Differentiale von Quaternionen ausgedehnt wird, und die

unabhängig von Entwickelungen von Functionen und vom Unendlichkleinen ist, aber den Begriff der Grenzen involvirt. Vectoren der Geschwindigkeit und Beschleunigung werden erwähnt, und es wird ein Hinweis auf Hodographen gegeben.

Der zweite Theil des ersten Bandes, der von den Quotienten von Vectoren handelt, enthält die wichtigsten Begriffe des Rechnens mit Quaternionen. Von seinem ersten Kapitel, II, 1, sollte auch bei einem ersten Durchblick wenig überschlagen werden; es giebt die wesentlichsten Grundbegriffe und Bezeichnungen der Quaternionenrechnung, wenigstens so weit Quotienten von Vectoren in Betracht gezogen werden, und zahlreiche geometrische Erläuterungen. Ferner enthält es einige wenige Betrachtungen über umschriebene Kegel, imaginäre Durchschnitte und über Ellipsoide im dreizehnten Abschnitt, die der Leser übergehen kann, und die an geeigneter Stelle bezeichnet werden sollen. Es wird zunächst durch die Betrachtung eines Winkels an einem Pult, oder einer geneigten Ebne gezeigt, dass die zusammengesetzte Beziehung eines Vectors zu einem andern, nach Länge und Richtung, im Allgemeinen ein System von vier numerischen Elementen in sich schliesst. Ausser diesem finden sich viele andere Beweggründe, die sich von selbst im Verlaufe des Buches darbieten, und uns dazu führen, den Namen „Quaternion“ für den wesentlichen Bestandtheil unseres Rechensystems anzunehmen wegen seiner fundamentalen Verbindung mit der Zahl „Vier“.

Im vierten bis achten Abschnitt wird ausser anderem gezeigt, dass die Ebne eines Quaternions im Allgemeinen ein wesentlicher Bestandtheil seines Begriffs ist, so dass diplanare Quaternionen ungleich sind; ferner, dass das Quadrat eines jeden rechten Radials (oder rechten Versors) gleich der negativen Einheit ist, wie auch immer seine Ebne sein mag. Das Symbol $\sqrt{-1}$ erlaubt somit eine reelle Deutung, in diesem wie in verschiedenen anderen Systemen; aber wenn es in dieser Weise als reell behandelt wird, so ist es in unserem Rechensystem zu unbestimmt, um nützlich sein zu können. Und deshalb fand ich es für angemessen, die alte Bedeutung dieses Symbols

beizubehalten, nach der es die (nicht gedeutete) Imaginäre der Algebra bezeichnet, oder, wie wir es hier nennen können, die skalar Imaginäre, in Forschungen, die nicht-reelle Durchschnitte oder nicht-reelle Berührungen in der Geometrie betreffen.

Der neunte Abschnitt ist wegen seiner Constructionen der Multiplication und Division von Wichtigkeit; er zeigt, dass das Product zweier diplanaren Versoren, und daher auch zweier solchen Quaternionen, nicht unabhängig von der Anordnung der Factoren ist.

Mit den im zehnten Abschnitt gegebenen Gesetzen sollte sich der Leser recht vertraut machen; sie sind sämmtlich in der Grundformel enthalten,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \qquad \text{(A)}$$

In der That kann ein Quaternion symbolisch durch einen viergliedrigen Ausdruck von der Form,

$$q = w + ix + jy + kz, \qquad \text{(B)}$$

definirt werden, in dem w, x, y, z vier Skalare, oder gewöhnliche algebraische Grössen sind, während i, j, k drei neue Symbole sind, die den Gesetzen gehorchen, welche in der Formel (A) enthalten sind, und die daher nicht allen üblichen Regeln der Algebra unterworfen sind; denn wir haben zum Beispiel,

$$ij = +k,$$

aber

$$ji = -k;$$

und

$$i^2 j^2 k^2 = -(ijk)^2.$$

In den Abschnitten elf bis vierzehn können die Artikel 213—220, und ihre Nebenartikel, bei einem ersten Durchlesen ausgelassen werden. Sie entwickeln den Begriff des Tensors eines Vectors, und eines Quaternions; und handeln vom Producte, dem Quotienten, der Summe und der Differenz zweier Quaternionen. Sie geben sodann die Zerlegung eines Quaternions in einen skalar und einen vector Theil und beweisen die distributive und associative Eigenschaft

Digitized by Google

der Multiplication von Quaternionen. Sie enthalten ferner auch mehrere wichtige neue geometrische Constructionen des Ellipsoids, auf die der Verfasser durch die Rechnung mit Quaternionen geführt wurde.

Die sechs ersten Abschnitte des zweiten Kapitels (II, II,) können bei einer ersten Durchsicht übergangen werden. Sie handeln von den Proportionen von Vectoren, entwickeln die damit in Verbindung stehenden Begriffe der vierten, dritten, mittleren Proportionale, der Quadratwurzel und überhaupt der ganzen Potenzen und Wurzeln von Quaternionen. Die Theorie der Potenzen von Quaternionen wird dann weiter ausgedehnt, eine Verallgemeinerung, bei der sich der neu eingeführte Begriff der Amplitude eines Quaternions als nützlich erweist; und es werden auch Logarithmen von Quaternionen betrachtet. Endliche Gleichungen von algebraischer Form zwischen complanaren Quaternionen werden dann behandelt und es wird gezeigt, dass sie n reelle quaternion Wurzeln, und $n^3 - n$ imaginäre Wurzeln haben. Zum Schluss wird der Begriff des Reciproken eines Vectors eingeführt, ebenso wie der des anharmonischen Quaternions einer Gruppe von vier Punkten, und es werden die Bedingungen für die Concircularität derselben angegeben.

In seinem letzten Abschnitt (II, II, 7) mag man den kurzen ersten Artikel 258, und den folgenden Artikel 259, bis zur Formel VIII. auf Seite 378, als eine Vorbereitung auf den dritten Theil lesen, zu dem der Leser zunächst übergehen mag. Denn das dritte Kapitel des zweiten Theils, welches im Wesentlichen die associative Eigenschaft der Multiplication für diplanare Quaternionen nachweist, kann bei einem ersten Studium übergangen werden.

Der dritte Theil, welcher den Schluss des ersten Bandes bildet, handelt von den Producten und Potenzen von Vectoren; er giebt die differential Rechnung der Quaternionen und einige Anwendungen derselben. Die erste Deutung des Productes $\beta . \alpha$ behandelt es als gleich mit dem Quotienten, $\beta : \alpha^{-1}$; wo α^{-1} (oder $R\alpha$) der vorher definirte Reciproke (II, II, 7) des Vectors α ist, nämlich ein zweiter Vector, welcher eine inverse Länge und eine entgegengesetzte

Richtung hat. Damit ist somit bewiesen, dass die Multiplication von Vectoren (wie die von Quaternionen) eine distributive, aber nicht allgemein eine commutative Operation ist. Es wird gezeigt, dass das Quadrat eines Vectors stets ein negativer Skalar ist, nämlich der negative Werth des Quadrates vom Tensor des Vectors, oder von der Zahl, welche seine Länge ausdrückt; und es werden einige geometrische Anwendungen dieses fruchtbaren Satzes auf Kugeln u. s. w., gegeben.

Es wird dann bewiesen, dass der Index des rechten Theils eines Productes zweier coinitialen Vectoren, OA, OB eine grade Linie ist, senkrecht zur Ebne des Dreiecks OAB, welche durch ihre Länge die doppelte Fläche jenes Dreiecks darstellt; die Drehung um diesen Index, vom Multiplicator zum Multiplicandus, ist positiv. Dieser rechte Theil, oder vector Theil, $V\alpha\beta$, des Productes verschwindet, wenn die Factoren ein und derselben Linie parallel sind; und der skalar Theil, $S\alpha\beta$, wenn sie rechtwinklig sind.

Bei der zweiten Deutung, welche wir in allen ihren Resultaten in Uebereinstimmung mit der ersten fanden, welche sich aber besser einer Ausdehnung der Theorie auf Producte von je drei Vectoren anpasst, wie sie in den folgenden Abschnitten erfolgt, wird ein Product zweier Vectoren als das Product zweier rechten Quaternionen behandelt, deren Indices (II, 1, 5) jene Vectoren sind. Es wird gezeigt, dass, in demselben Sinne, die Summe eines Skalars und eines Vectors ein Quaternion ist.

Die Deutung eines Productes von drei und mehr Vectoren wird dann dadurch bewirkt, dass man rechte Quaternionen für Vectoren einsetzt, wie in den früheren Abschnitten, ohne die Anordnung der Factoren zu ändern. Multiplication von Vectoren ist somit, wie hierdurch bewiesen wird, gleich der von Quaternionen, eine associative Operation. Ein Vector wird dann, allgemein, auf die dreigliedrige Grundform gebracht,

$$\varrho = ix + jy + hz; \qquad \text{(C)}$$

in ihr sind i, j, k die besonderen Symbole, welche wir schon in Betracht gezogen haben (II, 1, 10), die wir aber jetzt so ansehn, als ob sie drei rechtwinklige Einheitsvectoren be-

Digitized by Google

zeichnen, während die drei Skalare x, y, z einfach rechtwinklige Coordinaten sind; aus der bekannten Theorie dieser letzteren werden dann Erläuterungen der vorigen Ergebnisse hergeleitet. Es findet sich dann, dass der Skalar des Productes dreier coinitialen Vectoren, OA, OB, OC, mit einem Vorzeichen genommen, welches von der Richtung einer Drehung abhängt, das Volumen des Parallelepipeds darstellt, welches von diesen drei Linien gebildet wird; so dass es verschwindet, wenn sie complanar sind. Es werden auch Constructionen für Producte aufeinanderfolgender Seiten von Dreiecken, und von anderen geschlossenen Vielecken angegeben, welche Kreisen, oder Kugeln, eingeschrieben sind; so ist, zum Beispiel, eine charakteristische Eigenschaft des Kreises in dem Satze enthalten, dass das Product der vier aufeinanderfolgenden Seiten eines eingeschriebenen Vierseits ein Skalar ist: und eine gleich charakteristische (wenn auch weniger leicht ersichtliche) Eigenschaft der Kugel ist in dem anderen Satze gegeben, dass das Product der fünf aufeinanderfolgenden Seiten eines eingeschriebnen windschiefen Fünfecks gleich einem tangentialen Vector ist, welcher von dem Punkte aus gezogen wird, in welchem das Fünfeck beginnt (oder endet). Es werden dann einige allgemeine Transformationsformeln für vector Ausdrücke gegeben, mit welchen sich der Leser selbst recht vertraut machen sollte, da sie beim praktischen Gebrauch unserer Rechenart häufig vorkommen; besonders die vier Formeln (Seite 437, 438):

$$V.\gamma V\beta\alpha = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha; \tag{D}$$

$$V\gamma\beta\alpha = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta; \tag{E}$$

$$\varrho S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\varrho + \beta S\gamma\alpha\varrho + \gamma S\alpha\beta\varrho; \tag{F}$$

$$\varrho S\alpha\beta\gamma = V\beta\gamma S\alpha\varrho + V\gamma\alpha S\beta\varrho + V\alpha\beta S\gamma\varrho; \tag{G}$$

in denen $\alpha, \beta, \gamma, \varrho$ irgend welche vier Vectoren sind, während S und V Operationszeichen sind, die skalar und vector Theile eines Quaternions gesondert zu nehmen. Ueberhaupt muss dieser Abschnitt (III, 1, 6) als sehr wichtig angesehen werden, in Betreff der gegenwärtigen Auseinandersetzung; und wenn man ihn mit Sorgfalt gelesen hat, nach einem Durchblick der Theile, welche vorher angedeutet wurden, so wird man keine

Schwierigkeit mehr finden, zu irgend welchen folgenden Anwendungen der Quaternionen überzugehn, weder in dem gegenwärtigen, noch in irgend einem anderen Werke.

Der siebente, achte und neunte Abschnitt können, bei einem ersten Durchlesen, übergangen werden. Sie enthalten indessen Sätze, welche die Zusammensetzung aufeinanderfolgender Drehungen (Seite 468, 469, 470; siehe auch Seite 479) betreffen; ferner Ausdrücke für die Hälfte der Fläche eines sphärischen Polygons, oder für die halbe Oeffnung einer beliebigen Pyramide, als Winkel eines quaternion Productes, und eine Erweiterung derselben, durch Grenzbetrachtungen, auf die halbe Fläche einer sphärischen Figur, welche durch eine geschlossne Curve begrenzt wird, oder auf die Hälfte der Oeffnung eines beliebigen Kegels (Seite 479, 480); ferner wird dann eine Construction (Seite 510—513) gegeben für eine Reihe sphärischer Parallelogramme, welche nach einer theilweisen Analogie mit Parallelogrammen in einer Ebne so genannt werden; es folgt ein Satz (Seite 514), welcher ein gewisses System solcher (sphärischen) Parallelogramme mit den Brennpunkten eines sphärischen Kegelschnitts in Zusammenhang setzt, der einem gewissen Vierseit eingeschrieben ist; und der Begriff (Seite 501, 516) einer vierten Einheit im Raume (u, oder $+1$), welche mehr skalar als vector Charakter hat; sie gestattet nur einen Wechsel des Vorzeichens, das sich mit der Reihenfolge der Drehung umkehrt, wenn sie sich auch in dieser Theorie als die vierte Proportionale ($ij^{-1}k$) zu drei rechtwinkligen Einheitsvectoren darstellt.

Man thut wohl daran, den zehnten Abschnitt (III, 1, 10.) besonders wegen der exponential Beziehungen durchzulesen, welche er zwischen Quaternionen und der sphärischen Trigonometrie, oder besser Polygonometrie aufstellt, und zwar durch eine Art Ausdehnung des Moivre'schen Satzes, von der Ebne auf den Raum, oder auf die Kugel. Zum Beispiel, auf Seite 548 wird eine Gleichung von sechs Gliedern gegeben, welche für jedes sphärische Fünfeck statt hat, und auf diesem Wege aus einer erweiterten exponential Formel abgeleitet wird. Die Rechnungen in den Nebenartikeln zu Artikel 312 (Seite 539—544) können indessen übergangen werden; und

Digitized by Google

vielleicht auch Artikel 315, und seine Nebenartikel (Seite 552, 553). Dagegen sollte man Artikel 314, und seine Nebenartikel, Seite 549—552, wegen der exponential Formen durchlesen, welche sie für den Kreis, die Ellipse, die logarithmischen Spiralen (die kreisförmige, und die elliptische), für die Schraubenlinie und Schraubenfläche enthalten.

In dem dann Folgenden wird es hinreichend sein, den Artikel 316 durchzulesen, und seine ersten elf Nebenartikel, Seite 554—557. In diesem Abschnitt ist der angenommene Logarithmus lq, eines Quaternions q, die einfachste Wurzel, q', der transcendenten Gleichung,

$$1 + q' + \frac{q'^2}{2} + \frac{q'^3}{2.3} + \text{u. s. w.} = q;$$

und als Ausdruck für ihn findet sich,

$$lq = lTq + \angle q . UVq, \qquad \text{(H)}$$

in welchem T und U die Bezeichnungen für den Tensor und Versor sind, während $\angle q$ der Winkel von q ist, von dem angenommen wird, dass er, wie üblich, zwischen 0 und π liege. Solche Logarithmen erweisen sich oft als nützlich bei der Berechnung, obwohl sie nicht allgemein die elementare Eigenschaft besitzen, dass die Summe der Logarithmen zweier Quaternionen gleich dem Logarithmus ihres Productes ist: dieses scheinbare Paradoxon, oder wenigstens diese Abweichung von den gewöhnlichen algebraischen Regeln entsteht nothwendigerweise aus der entsprechenden Eigenschaft der quaternion Multiplication, von der wir schon gesehn haben, dass sie nicht allgemein eine commutative Operation ist ($q'q''$ nicht $= q''q'$, wenn nicht q' und q'' complanar sind). Und hier könnte vielleicht der Leser ein erstes Studium dieses Buchs abschliessen.*)

*) Wenn er es vorziehn sollte, zur differential Rechnung der Quaternionen im nächsten Kapitel (III, II,) überzugehn, und zu den geometrischen und andern Anwendungen im dritten Kapitel (III, II,) dieses Theils, so möchte es wohl von Nutzen sein, an dieser Stelle den letzten Abschnitt (I, III, 7) des ersten Theils von neuem durchzulesen, welcher von den Differentialen von Vectoren handelt (Seite 124—132); und vielleicht die vorher übersprungnen Theile des Abschnitts II, I, 13, nämlich die Artikel 213—220, und ihre Nebenartikel (Seite 279—309), welche sich, ausser auf andere Dinge, auf eine Con-

Wir haben schon gesagt, dass das zweite Kapitel bei einem ersten Studium dieses Werkes fortgelassen werden kann. Es handelt von den Differentialen und von der Entwicklung der Functionen von Quaternionen. Zuerst wird eine Definition für gleichzeitige Differentiale gegeben, welche durch Beispiele aus der Algebra und der Geometrie erläutert wird. Bei unserer Auffassung wird hier angenommen (vergl. I, III, 7) dass Differentiale nicht nothwendigerweise, noch selbst allgemein, klein sind. Aber es wird an einer späteren Stelle gezeigt (Art. 401), dass die Grundannahmen dieses Kalküls uns erlauben, wenn immer irgend ein Vortheil dadurch gewonnen wird, Differentiale als unendlich klein zu behandeln; und so, wenigstens in vielen Anwendungen, die Rechnung abzukürzen.

Partielle Differentiale und Ableitungen werden dann eingeführt; und Differentiale der Functionen von Functionen.

Eine der wichtigsten Regeln der differential Rechnung der Quaternionen ist es, die Factoren eines quaternion Products, in situ zu differenziren; so ist, nach Seite 587,

$$d.qq' = dq.q' + q.dq'. \tag{I}$$

Die Formel,

$$d.q^{-1} = -q^{-1}.dq.q^{-1}, \tag{J}$$

welche auf Seite 578 für das Differential des Reciproken eines Quaternions (oder Vectors) gegeben wird, ist auch oft nützlich; und ebenso sind es die Gleichungen (Seite 601),

$$\frac{dTq}{Tq} = S\frac{dq}{q}; \qquad \frac{dUq}{Uq} = V\frac{dq}{q}; \tag{K}$$

und (Seite 598),

$$d.\alpha^t = \frac{\pi}{2}\alpha^{t+1}dt; \tag{L}$$

q ist irgend ein Quaternion, und α irgend ein constanter Einheitsvector, während t ein variabler Skalar ist.

---

struction des Ellipsoids beziehn, wie sie durch unsere Rechnungsart an die Hand gegeben wird. Doch der Verfasser will jetzt davon absehen, irgend welche weiteren Anwendungen von dieser Art zu machen, nachdem er vorher angedeutet hat, was ihm ein Minimum für das Studium der quaternion Rechnung zu sein scheint; es umfasst eher weniger, als 300 Seiten (oder Theile von Seiten) dieses Bandes, was der Bequemlichkeit wegen für den Leser hier am Ende des Kapitels recapitulirt wird.

Digitized by Google

Es ist von Wichtigkeit, daran zu erinnern (vergl. III, 1, 11), dass wir in Quaternionen nicht die gebräuchliche Gleichung haben,

$$dlq = \frac{dq}{q},$$

wenn nicht q und dq complanar sind; und dass wir daher nicht allgemein haben,

$$dl\varrho = \frac{d\varrho}{\varrho},$$

wenn ϱ ein variabler Vector ist; wenn wir auch, in dieser Rechenart, die kaum weniger einfache Gleichung haben, welche in Fragen von Nutzen ist, die sich auf die Bewegung der Gestirne beziehen,

$$dl\frac{\varrho}{\alpha} = \frac{d\varrho}{\varrho}, \tag{M}$$

wenn α irgend ein constanter Vector ist, und wenn die Ebne von α und ϱ gegeben (oder constant) ist.

Der fünfte Abschnitt handelt von den mehrfachen Differentialen und von den Entwickelungen der Functionen von Quaternionen. In diesem Abschnitt werden Sätze aufgestellt (Seite 618—624), welche quaternion Functionen betreffen, die zusammen verschwinden; und es wird eine Form der Entwicklung angegeben (Seite 624—626), welche der Taylor'schen Reihe analog* ist, und wie sie die Eigenschaft hat, dass sie in aller Strenge durch die symbolische Gleichung, $1 + \triangle = \varepsilon^d$, (Seite 634) ausgedrückt wird. Um ein Beispiel für partielle und mehrfache Differentiation zu geben, wird am Ausdruck (Seite 634, 635),

$$\varrho = rk^t j^s kj^{-s} k^{-t},$$

operirt, welcher irgend einen Vector darstellen kann, und es wird eine Anwendung davon gemacht, vermittelst einer bestimmten Integration (Seite 637—639) den bekannten Werth für die Oberfläche und das Volumen einer Kugel abzuleiten, oder für die Oberfläche und das Volumen von Theilen derselben; es wird ferner der Satz gegeben, dass die vector Summe

* Auf einer späteren Stufe (Art. 375) wird eine neue Fassung des Taylor'schen Satzes gegeben, und ein neuer Beweis desselben, aber wieder in einer Form, welche den Quaternionen angepasst ist.

der Elemente mit Richtung eines Kugelsegments null ist: jedes Element der Oberfläche wird durch eine nach Innen gerichtete Normale dargestellt, welche dem Flächenelement proportional ist, und welche dem Druck einer Flüssigkeit auf jenes Element entspricht.

Im sechsten Abschnitt wird gezeigt, ausser anderem, dass ein lineares und vector Symbol, φ, für die Operation an einem Vector, ρ, eine symbolische und cubische Gleichung befriedigt (Seite 652), von der Form,

$$0 = m - m'\varphi + m''\varphi^2 - \varphi^3; \tag{N}$$

und danach ist

$$m\varphi^{-1} = m' - m''\varphi + \varphi^2 = \psi, \tag{N'}$$

= einem zweiten Symbol für lineare Operation und es wird gezeigt, wie es auf andere Weise von φ abzuleiten ist, φ sowohl als die drei skalar Constanten, m, m', m''. Die damit im Zusammenhang stehende algebraische und cubische Gleichung (Seite 683, 684),

$$M = m + m'c + m''c^2 + c^3 = 0, \tag{O}$$

gestattet — wie sich zeigt — wichtige Anwendungen; und es wird bewiesen* (Seite 683, 686), dass, wenn $S\lambda\varphi\rho = S\rho\varphi\lambda$, unabhängig von λ und ρ ist, ein Fall, in welchem die Function φ selbstconjugirt heisst, dann diese letzte cubische Gleichung drei reelle Wurzeln c_1, c_2, c_3 hat; während, in demselben Falle, die vector Gleichung,

$$V\rho\varphi\rho = 0, \tag{P}$$

durch ein System von drei reellen und rechtwinkligen Richtungen befriedigt wird: nämlich (vergleiche Seite 698, 700 und den Abschnitt III, III, 7) durch diejenigen der Achsen eines (biconcyklischen) Systems von Oberflächen zweiter Ordnung, welches durch die skalar Gleichung dargestellt wird,

$$S\rho\varphi\rho = C\rho^2 + C', \tag{Q}$$

in welcher C und C' Constanten sind. Es werden die einzelnen Fälle discutirt; und es werden allgemeine Formen für die vector und skalar Functionen $\varphi\rho$ und $S\rho\varphi\rho$ angegeben,

* Ein vereinfachter Beweis von einigen der Hauptresultate wird für den Fall von Selbstconjugation an einer späteren Stelle gegeben, in den wenigen ersten Nebenartikeln zu Art. 415.

Digitized by Google

die wir cyklische, rechtwinklige, focale, bifocale u. s. w. nennen, nach dem hauptsächlichsten Gebrauch, der in der Geometrie von ihnen gemacht wird; ein Paar solcher (cyklischen) Formen, mit reellen und constanten Werthen von g, λ, μ, welches sehr nützlich ist, ist

$$\varphi\varrho = g\varrho + V\lambda\varrho\mu,$$
$$S\varrho\varphi\varrho = g\varrho^2 + S\lambda\varrho\mu\varrho. \qquad (R)$$

Endlich wird gezeigt (Seite 739—742), dass, wenn fq eine lineare und quaternion Function eines Quaternions, q, ist, dann das Operationszeichen, f, eine gewisse symbolische und biquadratische Gleichung befriedigt, welche der cubischen Gleichung in φ entspricht, und ähnlicher Anwendungen fähig ist.

Schliesslich ist es mir eine angenehme Pflicht die Sorgfalt dankend hervorzuheben, die der Herr Verleger auf die Ausstattung des durch Einführung vieler neuen Bezeichnungen schwierigen Werkes verwandt hat; ich hoffe, dass dieselbe wesentlich dazu beitragen wird, das Studium des Werkes zu erleichtern.

Berlin, den 15. September 1882.

Dr. Paul Glan.

Vorrede.*

[1.] Das Buch, das ich hiermit dem Publicum vorlege, beruht auf denselben Grundsätzen, wie die „Vorlesungen", die ich vor etwa zehn Jahren über denselben Gegenstand veröffentlicht habe, aber der jetzt zu Grunde gelegte Plan ist völlig neu und das vorliegende Werk kann in keinem Sinne als eine zweite Auflage des vorigen angesehen werden. Das Inhaltsverzeichniss, das die Ueberschriften der einzelnen Kapitel und Abschnitte in ein Ganzes zusammenfasst, mag genügen, denjenigen Lesern, die mit dem Gegenstande schon bekannt sind, einen Begriff von dem eingeschlagenen Lehrgange zu geben; doch scheint es mir angemessen, einige wenige einleitende Bemerkungen hinzuzufügen, besonders in Betreff der Methode der Darstellung, wie sie mir dem Gegenstande am angemessensten erschienen ist.

[2.] Das vorliegende Buch ist in drei Theile getheilt, von denen jeder dazu bestimmt ist, einen leitenden Begriff oder Gesichtspunkt zu entwickeln und ihn durch eine ausreichende, doch nicht allzu grosse Anzahl von Beispielen oder Anwendungen zu erläutern. Der erste Theil bringt den Begriff eines Vectors, den wir uns als eine gerade Linie von bestimmter Richtung, im Raume von drei Dimensionen, vorstellen. Der zweite Theil führt die eine Auffassung eines Quaternions als den Quotienten zweier Vectoren ein. Und der dritte Theil handelt von den Producten und Potenzen von Vectoren, die wir unter einem solchen Gesichtspunkte auffassen, dass sie eine zweite Hauptform des Begriffs eines Quaternions in der Geometrie begründen. . . . . .

* Dieses Bruchstück wurde vom Herausgeber unter den Manuskripten des Verfassers aufgefunden.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss.

Erster Band.

Erster Theil.

Seite

Ueber Vectoren, soweit sie ohne Beziehung auf Winkel oder Drehungen behandelt werden können 1

Kapitel* I.

Grundlegende Sätze über Vectoren 3

Erster Abschnitt.** Ueber den Begriff eines Vectors und über Gleichheit von Vectoren 3

Zweiter Abschnitt. Ueber Differenzen und Summen von je zwei Vectoren 5

Dritter Abschnitt. Ueber Summen von drei oder mehr Vectoren 8

Vierter Abschnitt. Ueber Coëfficienten von Vectoren 11

Kapitel II.

Anwendungen auf Punkte und Linien in einer gegebenen Ebene 14

Erster Abschnitt. Ueber lineare Gleichungen zwischen zwei coinitialen Vectoren 14

Zweiter Abschnitt. Ueber lineare Gleichungen zwischen drei coinitialen Vectoren 16

Dritter Abschnitt. Ueber ebene geometrische Netze 25

Vierter Abschnitt. Ueber Anharmonische Coordinaten und Gleichungen von Punkten und Linien in einer Ebene 29

Fünfter Abschnitt. Ueber ebene geometrische Netze (Fortsetz.) 36

Sechster Abschnitt. Ueber Anharmonische Gleichungen und Vector-Ausdrücke für Curven in einer gegebenen Ebene . . . 40

Kapitel III.

Anwendungen auf Vectoren im Raume 55

Erster Abschnitt. Ueber lineare Gleichungen zwischen nicht complanaren Vectoren 55

Zweiter Abschnitt. Ueber fünfzahlige Symbole für Punkte und Ebenen im Raume 63

Dritter Abschnitt. Ueber Anharmonische Coordinaten im Raume 69

Vierter Abschnitt. Ueber Geometrische Netze im Raume . . . 76

* Auf dieses Kapitel werden wir uns beziehen mit der Bezeichnung I, 1; auf das nächste mit I, II: auf das erste Kapitel des zweiten Theiles mit II, 1; und so fort.

** Auf diesen Abschnitt wollen wir verweisen mit I, 1, 1; auf den nächsten mit I, 1, 2; auf den sechsten Abschnitt des zweiten Kapitels des dritten Theiles mit III, II, 6; und so weiter.

Seite

Fünfter Abschnitt. Ueber Schwerpunkte von Punktsystemen; und über einfache und zusammengesetzte Mittel von Vectoren . 104

Sechster Abschnitt. Ueber Anharmonische Gleichungen und Vector-Ausdrücke, von Oberflächen und Curven im Raume . . 112

Siebenter Abschnitt. Ueber Differentiale von Vectoren . . . 124

Zweiter Theil.

Ueber Quaternionen, soweit sie als Quotienten von Vectoren aufgefasst werden können und Beziehungen zu Winkeln enthalten . . . 133

Kapitel I.

Grundlegende Sätze über Quotienten von Vectoren . . . 135

Erster Abschnitt. Einleitende Bemerkungen; erste aus der Algebra herübergenommenen Grundsätze 135

Zweiter Abschnitt. Erster Grund, den Quotienten zweier Vectoren einen Quaternion zu nennen 139

Dritter Abschnitt. Zusätzliche Erläuterungen 143

Vierter Abschnitt. Ueber Gleichheit von Quaternionen; und über die Ebne eines Quaternions 146

Fünfter Abschnitt. Ueber die Achse und den Winkel eines Quaternions; und über den Index eines rechten Quotienten, oder Quaternions 152

Sechster Abschnitt. Ueber den Reciproken, Conjugirten, Entgegengesetzten, und die Norm eines Quaternions; und über null Quaternionen 156

Siebenter Abschnitt. Ueber radiale Quotienten; und über das Quadrat eines Quaternions 167

Achter Abschnitt. Ueber den Versor eines Quaternions, oder eines Vectors; und über einige allgemeine Transformationsregeln . . 171

Neunter Abschnitt. Ueber Vector-Bogen und Vector-Winkel, als Darstellungen der Versoren von Quaternionen betrachtet; und über die Multiplication und Division eines solchen Versors durch einen andern 182

Zehnter Abschnitt. Ueber ein System von drei rechten Versoren, in drei zu einander rechtwinkligen Ebnen; und über die Gesetze der Symbole ijk 201

Elfter Abschnitt. Ueber den Tensor eines Vectors, oder eines Quaternions; und über das Product oder den Quotienten irgend zweier Quaternionen 208

Zwölfter Abschnitt. Ueber die Summe oder Differenz irgend zweier Quaternionen; und über den Skalar (oder skalar Theil) eines Quaternions 225

Dreizehnter Abschnitt. Ueber den rechten Theil (oder vector Theil) eines Quaternions; und über die distributive Eigenschaft der Multiplication von Quaternionen 245

Vierzehnter Abschnitt. Ueber die Zurückführung des allgemeinen Quaternions auf eine viergliedrige Grundform; nebst einem ersten Beweise des associativen Princips der Multiplication von Quaternionen 309

Digitized by Google

Seite

Kapitel II.

Ueber complanare Quaternionen oder Quotienten von Vectoren in einer Ebne; und über Potenzen, Wurzeln und Logarithmen von Quaternionen 319

Erster Abschnitt. Ueber complanare Proportion von Vectoren; vierte Proportionale zu dreien, dritte Proportionale zu zweien, mittlere Proportionale, Quadratwurzel; allgemeine Zurückführung eines Quaternions in einer gegebenen Ebne auf eine zweigliedrige Grundform 319

Zweiter Abschnitt. Ueber stetige Proportion von vier oder mehr Vectoren; ganze Potenzen und Wurzeln von Quaternionen; und über Einheitswurzeln 327

Dritter Abschnitt. Ueber die Amplituden von Quaternionen in einer gegebnen Ebne; und über trigonometrische Ausdrücke für derartige Quaternionen und für deren Potenzen 335

Vierter Abschnitt. Ueber das Ponential und den Logarithmus eines Quaternions; und über Potenzen von Quaternionen, deren Exponenten Quaternionen sind 344

Fünfter Abschnitt. Ueber endliche (oder vielgliedrige) Gleichungen von algebraischer Form, welche complanare Quaternionen enthalten; und über die Existenz von n reellen quaternion Wurzeln einer solchen Gleichung n-ten Grades 355

Sechster Abschnitt. Ueber die n^2-n imaginären (oder symbolischen) Wurzeln einer quaternion Gleichung n-ten Grades, deren Coëfficienten von der im vorigen Abschnitt betrachteten Art sind 370

Siebenter Abschnitt. Ueber den Reciproken eines Vectors, und über harmonische Mittel von Vectoren; nebst Bemerkungen über den anharmonischen Quaternion einer Gruppe von vier Punkten, und über Bedingungen der Concircularität 376

Kapitel III.

Ueber diplanare Quaternionen oder Quotienten von Vectoren im Raume; und besonders über das associative Prinzip der Multiplication solcher Quaternionen . . . 388

Erster Abschnitt. Ueber einige Fassungen der associativen Eigenschaft, oder Grundformel der Multiplication diplanarer Quaternionen 388

Zweiter Abschnitt. Ueber einige geometrische Beweise der associativen Eigenschaft der Multiplication von Quaternionen, die unabhängig vom distributiven Princip sind 398

Dritter Abschnitt. Ueber einige zusätzliche Formeln 405

Dritter Theil.

Ueber Quaternionen, als Producte oder Potenzen von Vectoren; und über einige Anwendungen der Quaternionen 413

Kapitel I.

Ueber die Deutung eines Productes von Vectoren, oder der Potenz eines Vectors, als Quaternion 415

Erster Abschnitt. Ueber eine erste Methode ein Product von zwei Vectoren als Quaternion zu deuten 415

Seite

Zweiter Abschnitt. Ueber einige Folgerungen aus der vorhergehenden Deutung 417

Dritter Abschnitt. Ueber eine zweite Methode, zu derselben Deutung eines binären Vectorenproducts zu gelangen 425

Vierter Abschnitt. Ueber die Identificirung eines rechten Quaternions mit seinem eignen Index in der Bezeichnung, und über die Construction eines Productes zweier rechtwinkligen Linien durch eine dritte Linie, welche rechtwinklig zu beiden ist 428

Fünfter Abschnitt. Ueber einige Vereinfachungen der Bezeichnung, oder der Ausdrucksweise, welche aus dieser Identificirung hervorgehn; und über den Begriff einer Einheitslinie, als rechten Versor 432

Sechster Abschnitt. Ueber die Deutung eines Products von drei, oder mehr Vectoren als Quaternion 436

Siebenter Abschnitt. Ueber die vierte Proportionale zu drei diplanaren Vectoren 462

Achter Abschnitt. Ueber eine gleichbedeutende Deutung der vierten Proportionale zu drei diplanaren Vectoren, welche aus den Sätzen des zweiten Theils abgeleitet ist 496

Neunter Abschnitt. Ueber eine dritte Methode, ein Product oder eine Function von Vectoren als Quaternion zu deuten; und über die Uebereinstimmung der Resultate der so erhaltnen Deutung mit denjenigen, welche aus den beiden vorhergehenden Methoden des gegenwärtigen Theils abgeleitet worden sind 516

Zehnter Abschnitt. Ueber die Deutung einer Potenz eines Vectors, als Quaternion 520

Elfter Abschnitt. Ueber Potenzen und Logarithmen diplanarer Quaternionen; und einige zusätzliche Formeln 554

Kapitel II.

Ueber Differentiale und Entwickelungen von Functionen der Quaternionen; und über einige Anwendungen der Quaternionen auf geometrische und physikalische Fragen 565

Erster Abschnitt. Ueber die Definition simultaner Differentiale 565

Zweiter Abschnitt. Elementare Erläuterungen der Definition, aus der Algebra und Geometrie 569

Dritter Abschnitt. Ueber einige allgemeine Folgerungen aus der Definition 576

Vierter Abschnitt. Beispiele für die quaternion Differentiation 594

Fünfter Abschnitt. Ueber mehrfache Differentiale und über Entwicklungen der Functionen von Quaternionen 612

Sechster Abschnitt. Ueber die Differentiation nicht-entwickelter Functionen von Quaternionen; und über die allgemeine Umkehrung einer linearen Function eines Vectors, oder eines Quaternions: und einige damit im Zusammenhang stehende Forschungen . . 639

Digitized by Google

Elemente der Quaternionen.

Theil I.

Ueber Vectoren, soweit sie ohne Einführung von Winkeln und Drehungen behandelt werden können.

Kapitel I.

Grundlegende Sätze in Betreff der Vectoren.

Erster Abschnitt.

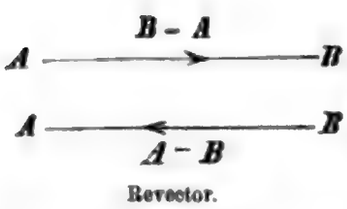
Ueber den Begriff eines Vectors und über Gleichheit von Vectoren.

1. — Eine grade Linie AB, von der man nicht nur ihre Länge sondern auch ihre Richtung in Betracht zieht, wird ein Vector genannt. Ihr Ausgangspunkt A heisst sein Anfangspunkt und ihr Endpunkt B sein Endpunkt. Wir können uns einen Vector AB vorstellen als die Differenz seiner Begrenzungspunkte oder können uns denken, dass wir sie durch ihn construiren können; oder, um uns vollständiger auszudrücken, er ist das Resultat der Subtraction seines Anfangspunktes von seinem Endpunkte und in Uebereinstimmung mit dieser Auffassung können wir ihn bezeichnen durch das Symbol $B-A$. Diese Bezeichnung ist sehr nützlich, denn sie gestattet Analogien im Zeichen zwischen geometrischen und algebraischen Operationen. Wenn die Grenzpunkte A und B verschieden sind, so heisst der Vector AB oder $B-A$ ein wirklicher oder ein wirksamer Vector; doch wenn im Grenzfall die beiden Punkte zusammenfallen, dann sagt man der Vector AA oder $A-A$ ist Null.

Entgegengesetzte Vectoren, wie AB und BA, oder $B-A$ und $A-B$, werden bisweilen Vector und Revector genannt. Aufeinanderfolgende Vectoren, wie AB und BC, oder $B-A$ und $C-B$, bezeichnet man gelegentlich auch mit Vector und Provector: die Linie AC, oder $C-A$, welche vom Anfangs-

punkt des ersten A zum Endpunkt des zweiten C gezogen ist, heisst Transvector. Später werden wir auch Bogenvectoren und Winkelvectoren betrachten, doch gegenwärtig sind unsere Vectoren wie vorher nur grade Linien.

Fig. 1.

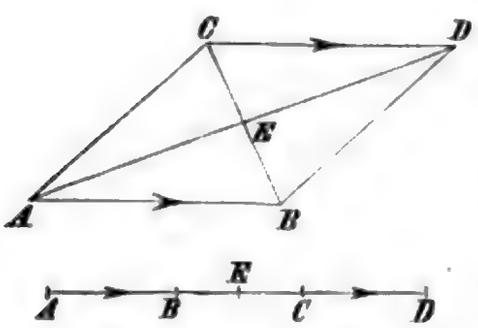


2. Zwei Vectoren sind einander gleich oder die Gleichung $AB = CD$, oder $B - A = C - D$, findet statt, wenn (und nur wenn) der Anfangspunkt und Endpunkt des einen zur Coincidenz gebracht werden kann mit den entsprechenden Punkten des anderen durch eine Verschiebung ohne Drehung. Daraus folgt, dass alle Null-Vectoren gleich sind und daher durch ein gemeinsames Zeichen dargestellt werden können, wie das, welches man für Null braucht; so dass wir schreiben können:

$$A - A = B - B = \text{etc.} = 0;$$

dagegen sind zwei wirkliche Vectoren, AB und CD, nicht gleich, (in dem gegenwärtigen vollständigen Sinne), wenn sie nicht sowohl gleiche Länge als auch gleiche Richtung haben. Wenn sie daher nicht Theile ein und derselben Linie sind, müssen sie die entgegengesetzten Seiten eines Parallelogramms $ABDC$ sein. Die beiden Linien AD und BC werden daher die beiden Diagonalen eines solchen Parallelogramms sein und halbiren einander folglich in einem Punkte E. Umgekehrt, wenn die beiden Gleichungen:

Fig. 3.



$$D - E = E - A,$$

und

$$C - E = E - B,$$

stattfinden, so dass die beiden Linien AD und BC einen gemeinsamen Mittelpunkt haben oder commedial sind, dann hat, auch wenn sie Theile einer graden Linie sind, die Gleichung:

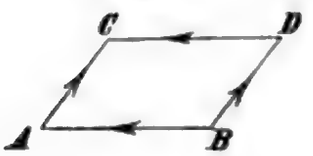
$$D - C = B - A$$

Digitized by Google

statt. Zwei Radien AB, AC, irgend eines Kreises (oder einer Kugel) können niemals gleiche Vectoren sein; und zwar desshalb nicht, weil sie verschiedene Richtung haben.

3. Eine Gleichung zwischen Vectoren, betrachtet als eine Gleichung zwischen den Unterschieden von Punkten, lässt sich umkehren und permutiren; oder in Zeichen, wenn:

Fig. 5.



$$D-C = B-A,$$

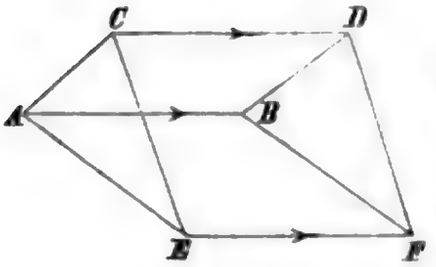
dann ist:

$$C-D = A-B,$$

und

$$D-B = C-A.$$

Fig. 6.



Zwei Vectoren, CD und EF, die demselben dritten Vector, AB, gleich sind, sind auch unter einander gleich. Diese drei gleichen Vectoren sind im Allgemeinen die drei parallelen Kanten eines Prismas.

Zweiter Abschnitt.

Ueber Differenzen und Summen von zwei Vectoren.

4. Um ebenso, wie in der Algebra, schreiben zu können

$$(C'-A')-(B-A) = C-B,$$

wenn

$$C'-A' = C-A,$$

wollen wir jetzt festsetzen, dass wenn ein erster Vector AB abgezogen wird von einem zweiten Vector AC, der mit ihm coinitial ist, oder von einem dritten Vector $A'C'$, der diesem zweiten gleich ist, der Rest der vierte Vector BC ist, der von dem Endpunkt B des ersten zum Endpunkt des zweiten C gezogen wird; so dass man als Rest den entsprechenden Provector erhält, wenn man einen Vector von einem Transvector (Art. 1) abzieht. Es ist einleuchtend, dass diese geometrische Subtraction von Vectoren der Zerlegung von Bewegungen (oder von Vectionen)

entspricht und dass wir durch eine solche Zerlegung einer Null-Vection in zwei entgegengesetzte Vectionen die Formel erhalten,

$$0-(B-A)=(A-A)-(B-A)=A-B.$$

Wird also ein wirklicher Vector AB abgezogen von einem Nullvector, AA, so ist der Rest der Revector BA. Wenn wir daher übereinkommen einen Ausdruck von der Form $0-a$ im Allgemeinen abzukürzen zu der Form, $-a$, können wir kurz schreiben, $-AB=BA$; a und $-a$ sind also Bezeichnungen für entgegengesetzte Vectoren, während a und $-(-a)$ aus demselben Grunde ein und denselben Vector bezeichnen; so dass wir wie in der Algebra die identische Gleichung schreiben können,

$$-(-a)=a.$$

5. Um weitere Uebereinstimmung mit der Algebra zu erhalten, adoptiren wir die Relation zwischen den Zeichen + und −

$$(b-a)+a=b.$$

Wir sagen wie gewöhnlich: $(b-a)$ ist addirt zu a und die Summe ist b; $(b-a)$ und a nennen wir die Summanden. Dann haben wir die beiden Folgerungen:

I. Wenn ein Vector, AB oder $(B-A)$, addirt wird zu seinem Anfangspunkt A, so ist die Summe sein Endpunkt B (Art. 1); und

II. wenn ein Provector BC addirt wird zu einem Vector AB, so ist die Summe der Transvector AC; oder in Zeichen

$$\text{I.}\quad (B-A)+A=B$$

und

$$\text{II.}\quad (C-B)+(B-A)=C-A.$$

In der That, die erste Gleichung ist eine unmittelbare Folgerung der allgemeinen Formel, die oben die Zeichen + und − verbindet, im Zusammenhang mit der Auffassung (Art. 1) eines Vectors als Differenz zweier Punkte, und die zweite folgt aus derselben Formel in Verbindung mit der Definition der geometrischen Subtraction eines solchen Vectors von einem anderen, wie sie in Art. 4 angegeben wurde und derzufolge wir (wie in der Algebra) für irgend drei Punkte, A, B, C, die Identität haben:

$$(C-A)-(B-A)=C-B.$$

Es ist klar, dass diese geometrische Addition aufeinanderfolgender Vectoren der Zusammensetzung aufeinanderfolgender Vec-

Digitized by Google

tionen oder Fortbewegungen entspricht; (vgl. Art. 4) und dass die Summe zweier entgegengesetzter Vectoren (oder eines Vectors und Revectors) eine Null-Linie ist; so dass

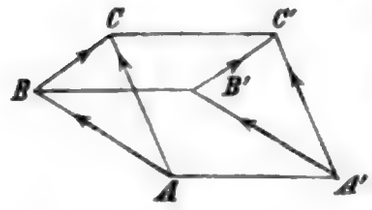
$$BA + AB = 0,$$

oder

$$(A-B) + (B-A) = 0.$$

Es folgt auch, dass die Summen gleicher Paare aufeinanderfolgender Vectoren gleich sind; oder ausführlicher, dass wenn

Fig. 7.



$$B' - A' = B - A,$$

und

$$C' - B' = C - B,$$

dann

$$C' - A' = C - A$$

ist. Die beiden Dreiecke ABC und $A'B'C'$ sind im Allgemeinen die beiden entgegengesetzten Flächen eines Prismas. (Vergl. Art. 3).

6. Um ferner, ebenso wie in der Algebra, schreiben zu können:

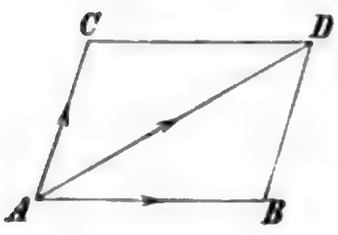
$$(C' - B') + (B - A) = C - A,$$

wenn

$$C' - B' = C - B,$$

wollen wir festsetzen, dass wenn wir zwei aufeinanderfolgende Vectoren, AB, BC, haben, und einen dritten Vector $B'C'$ gleich dem zweiten, der aber nicht auf den ersten folgt, die Summe, die man erhält, wenn man den dritten zum ersten addirt, jener vierte Vector, AC, ist, der vom Anfangspunkt A des ersten zum Endpunkt C des zweiten gezogen ist. Es folgt daraus, dass die Summe irgend zweier coinitialen Seiten, AB, AC, eines Parallelogramms $ABDC$ die zwischenliegende und coinitiale Diagonale AD ist; oder in Zeichen:

Fig. 8.



$$(C - A) + (B - A) = D - A,$$

wenn

$$D - C = B - A;$$

denn wir haben dann (nach 3)

$$C - A = D - B.$$

7. Die Summe irgend zweier gegebener Vectoren hat also

Digitized by Google

einen Werth, der unabhängig von ihrer Anordnung ist; oder in Zeichen:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha.$$

Wenn gleiche Vectoren zu gleichen Vectoren addirt werden, sind die Summen gleiche Vectoren, auch wenn die Summanden nicht als aufeinanderfolgend gegeben sind (vergl. 5); wenn ferner ein Null-Vector zu einem wirklichen Vector addirt wird, so ist die Summe dieser wirkliche Vector; oder in Zeichen:

$$0 + \alpha = \alpha.$$

Wenn wir ferner übereinkommen allgemein (vergl. 4) den Ausdruck $0 + \alpha$ in α abzukürzen, und wenn α einen Vector bezeichnet, dann sind $+\alpha$, und $+(+\alpha)$, u. s. w. nur andere Zeichen für denselben Vector; und wir haben, wie in der Algebra, die Identitäten,

$$\begin{aligned} -(-\alpha) &= +\alpha, \\ +(-\alpha) = -(+\alpha) &= -\alpha, \\ (+\alpha) + (-\alpha) &= 0, \end{aligned}$$

u. s. w.

Dritter Abschnitt.

Ueber Summen von drei und mehr Vectoren.

8. Die Summe von drei gegebenen Vectoren α, β, γ wollen wir definiren als den vierten Vector

$$\delta = \gamma + (\beta + \alpha)$$

oder abgekürzt:

$$\delta = \gamma + \beta + \alpha$$

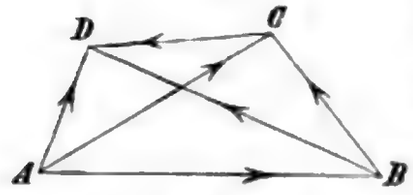
den man erhält, wenn man den dritten zur Summe vom ersten und zweiten addirt; und in gleicher Weise wird die Summe von irgend einer Anzahl Vectoren gebildet, indem man den letzten zur Summe der vorhergehenden addirt. Auch für irgend vier Vectoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wird die Summe $\delta + (\gamma + \beta + \alpha)$ einfach bezeichnet mit $\delta + \gamma + \beta + \alpha$ ohne Klammern und ebenso für irgend eine Anzahl von Summanden.

9. Die Summe irgend einer Anzahl aufeinanderfolgender Vectoren AB, BC, CD ist also die Linie AD, vom Anfangspunkt A des ersten zum Endpunkt D des letzten; und weil wir bei drei solchen Vectoren (wie in Fig. 9) die beiden Diago-

Digitized by Google

nalen AC, BD des ebenen oder windschiefen Vierseits $ABCD$ ziehen können und dann nach Belieben AD ansehn können entweder als die Summe von AB, BD oder als die Summe von AC, CD, können wir für irgend drei Summand-Linien α, β, γ die folgende Formel für die Association aufstellen:

Fig. 9.



$$(\gamma + \beta) + \alpha = \gamma + (\beta + \alpha) = \gamma + \beta + \alpha.$$

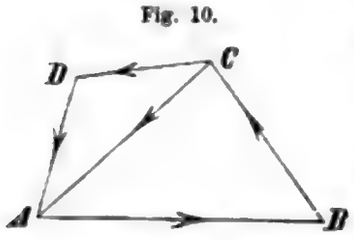
Verbinden wir sie mit der Formel für die Commutation (Art. 7), nämlich mit der Gleichung:

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,$$

die vorher für irgend zwei solche Summanden aufgestellt wurde, so folgt leicht, dass die Addition von Vectoren stets sowohl eine assiociative als eine commutative Operation ist. Mit anderen Worten, die Summe irgend einer Anzahl gegebener Vectoren hat einen Werth, der unabhängig ist von ihrer Reihenfolge und von der Art sie in Gruppen zusammenzufassen; so dass, wenn die Längen und Richtungen der Summanden beibehalten werden, auch die Länge und Richtung der Summe ungeändert bleibt; ausser wenn die Richtung der letzteren als unbestimmt angesehn werden muss, wenn nämlich die Länge der Summenlinie verschwindet. Diesen Fall wollen wir jetzt betrachten.

10. Wenn irgend n Summandlinien AB, BC, CA, oder AB, BC, CD, DA, u. s. w. in irgend einer Reihenfolge zusammengestellt, die n aufeinanderfolgenden Seiten eines Dreiecks ABC oder eines Vierseits $ABCD$ oder irgend eines anderen geschlossenen Polygons sind, so ist ihre Summe eine Null-Linie AA; und, umgekehrt, wenn die Summe irgend eines Systems von n gegebenen Vectoren der Null gleich ist, so können sie (in irgend einer Reihenfolge durch Fortbewegung ohne Drehung) zu den n aufeinanderfolgenden Seiten eines geschlossenen ebenen oder windschiefen Vielecks gemacht werden. Wenn daher irgend ein solches Vieleck (P) gegeben ist, z. B. ein Fünfeck $ABCDE$, so kann

Fig. 10.



Digitized by Google

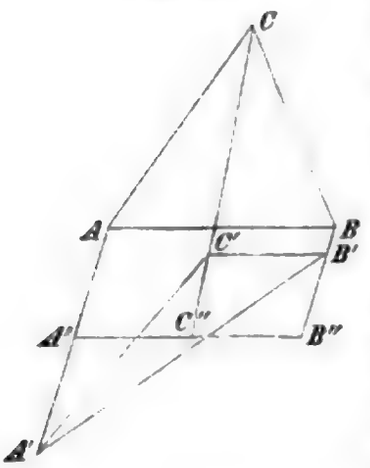
man ein anderes geschlossenes Polygon (P') oder $A'B'C'D'E'$ mit einem willkürlichen Anfangspunkt A', doch mit derselben Anzahl Seiten $A'B', \ldots E'A'$ construiren. Diese neuen Seiten sind als Vectoren den vorigen $AB, \ldots EA$, genommen in einer willkürlichen Reihenfolge, gleich. Ziehen wir z. B. vier aufeinanderfolgende Vectoren

$$A'B' = CD, B'C' = AB, C'D' = EA, D'E' = BC$$

und vervollständigen dann dies neue Fünfeck durch die Linie $E'A'$, so wird diese abschliessende Linie der zweiten Figur (P') der übrigbleibenden Seite DE der ersten Figur (P) gleich sein.

11. Da eine geschlossene Figur $ABC\ldots$ eine geschlossene Figur erzeugt, wenn alle ihre Punkte auf irgend eine angenommene Ebne durch irgend ein System paralleler Ordinaten projicirt werden, (obwohl die Fläche der projicirten Figur $A'B'C'\ldots$ im besonderen Falle verschwinden kann), so folgt, dass wenn die Summe irgend einer Anzahl gegebener Vectoren $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ Null ist, und wenn wir sie alle auf irgend eine Ebne durch parallele Linien, von ihren Endpunkten aus gezogen, projiciren, die Summe der projicirten Vectoren $\alpha', \beta', \gamma'\ldots$ gleichfalls Null ist; so dass diese letzteren Vectoren, wie die früheren, so angeordnet werden können, dass sie die aufeinanderfolgenden Seiten eines geschlossenen Vielecks werden, wenn sie es nicht schon von vornherein sind. (In Fig. 11 ist $A''B''C''$ ein solches Polygon, nämlich ein Dreieck mit verschwindender Fläche; und wir haben die Gleichung:

Fig. 11.



$$A''B'' + B''C'' + C''A'' = 0$$

ebenso auch

$$A'B' + B'C' + C'A' = 0$$

und

$$AB + BC + CA = 0.)$$

Vierter Abschnitt.

Ueber Coefficienten von Vectoren.

Der einfache oder einzelne Vector, α, wird auch bezeichnet durch 1α, oder durch $1.\alpha$, oder durch $(+1)\alpha$; ebenso wird der doppelte Vector, $\alpha + \alpha$, bezeichnet durch 2α, oder, $2.\alpha$ oder $(+2)\alpha$, u. s. w.; die Regel ist, dass wir für irgend eine algebraische ganze Zahl m, wenn man sie als Coefficienten auffasst, mit der der Vector α multiplicirt wird, stets haben:

$$1\alpha + m\alpha = (1 + m)\alpha;$$

das Zeichen $1 + m$ hat hier dieselbe Bedeutung, wie in der Algebra. Also $0\alpha = 0$, die Null auf der einen Seite bezeichnet einen Null-Coefficienten und die Null auf der anderen Seite einen Null-Vector; denn nach der Regel ist,

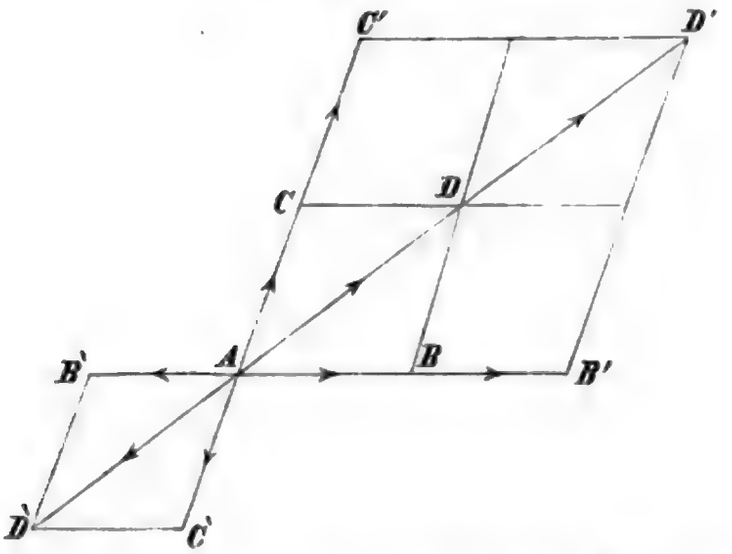
$$1\alpha + 0\alpha = (1 + 0)\alpha = 1\alpha = \alpha,$$

und daher

$$0\alpha = \alpha - \alpha = 0.$$

Ferner, da $(1)\ \alpha + (-1)\alpha = (1-1)\alpha = 0\alpha = 0$; so haben wir $(-1)\alpha = 0 - \alpha = -\alpha = -(1\alpha)$; ebenso, da $(1)\alpha + (-2)\alpha = (1-2)\alpha = (-1)\alpha = -\alpha$, schliessen wir, dass $(-2)\alpha = -\alpha - \alpha = -(2\alpha)$;

Fig. 12.



und allgemein, $(-m)\alpha = -(m\alpha)$, welche ganze Zahl auch m sein mag: so dass wir ohne Gefahr der Verwechslung, die Paren-

thesen in den letzteren Bezeichnungen fortlassen und einfach schreiben können $-1\alpha, -2\alpha, -m\alpha$.

13. Es folgt daraus, dass welche zwei ganze Zahlen (positiv, oder negativ, oder null) auch durch m und n dargestellt werden mögen und welche beiden Vectoren man auch durch α und β bezeichnen mag, wir stets wie in der Algebra die Formeln haben,

$$n\alpha \pm m\alpha = (n \pm m)\alpha,$$
$$n(m\alpha) = (nm)\alpha = nm\alpha,$$

und (vergl. Fig. 12),

$$m(\beta \pm \alpha) = m\beta \pm m\alpha;$$

so dass die Multiplication von Vectoren mit Coefficienten eine zweifach distributive Operation ist, wenigstens wenn die Multiplicatoren ganze Zahlen sind. Diese Beschränkung werden wir indessen bald fallen lassen.

14. Wenn $m\alpha = \beta$, und der Coefficient m noch ganz ist, so heisst der Vector β ein Vielfaches von α; und umgekehrt, (wenigstens wenn die ganze Zahl m von Null verschieden ist), heisst der Vector α ein Theil von β. Ein Vielfaches eines Theiles eines Vectors heisst ein Bruch dieses Vectors; also, wenn $\beta = m\alpha$, und $\gamma = n\alpha$, dann ist γ ein Bruch von β, der in folgender Weise bezeichnet wird, $\gamma = \frac{n}{m}\beta$; man sagt auch β wird multiplicirt mit dem Bruch $\frac{n}{m}$, und γ heisst das Product dieser Multiplication. Es folgt, dass, wenn x und y irgend zwei Brüche (positiv, oder negativ, oder null, ganze Zahlen eingeschlossen) sind und α und β irgend zwei Vectoren, dann:

$$y\alpha \pm x\alpha = (y \pm x)\alpha,$$
$$y(x\alpha) = (yx)\alpha = yx\alpha,$$
$$x(\beta \pm \alpha) = x\beta \pm x\alpha;$$

Resultate, die diejenigen des Art. 13 einschliessen und ausgedehnt werden können auf den Fall, in dem x und y incommensurable Coefficienten sind, die man als Grenzwerthe von Brüchen auffassen kann.

15. Für irgend einen wirklichen Vector, α, und für irgend einen Coefficienten, x, von irgend einer der vorhergehenden Arten, stellt das Product $x\alpha$, interpretirt wie oben, stets einen Vector β dar, der dieselbe Richtung hat wie die Multiplicand-

Linie α, wenn $x > 0$, doch die entgegengesetzte, wenn $x < 0$, und null wird, wenn $x = 0$. Umgekehrt, wenn α und β irgend zwei wirkliche Vectoren sind, mit entweder gleichen oder entgegengesetzten Richtungen, Fälle, in welchen wir sagen werden, dass sie parallele Vectoren sind und schreiben werden $\beta \parallel \alpha$ (da beide dann, im gewöhnlichen Sinne des Wortes, einer gemeinsamen Linie parallel sind), so können wir stets finden, oder gefunden denken, einen Coefficienten $x \gtrless 0$, der der Gleichung

$$\beta = x\alpha$$

genügt; oder, wie wir sie auch schreiben können

$$\beta = \alpha x;$$

und diese positive oder negative Zahl x hat zu ± 1 dasselbe Verhältniss wie die Länge der Linie β zu der Länge von α.

16. Daher ist es natürlich zu sagen, dass dieser Coefficient x der Quotient ist, der sich ergiebt durch Division des Vectors β durch den parallelen Vector α; und demgemäss zu schreiben:

$$x = \beta \div \alpha$$

oder

$$x = \beta : \alpha$$

oder

$$x = \frac{\beta}{\alpha};$$

wir haben dann, wenigstens wenn die Divisor-Linie α ein wirklicher Vector und die Dividend-Linie β ihr parallel ist, wie in der Algebra die Identität

$$(\beta : \alpha) . \alpha = \frac{\beta}{\alpha}\alpha = \beta,$$

und

$$x\alpha : \alpha = \frac{x\alpha}{\alpha} = x;$$

wir werden sie später durch Definition auf den Fall nicht paralleler Vectoren ausdehnen. Wir können auch unter denselben Bedingungen schreiben, $\alpha = \frac{\beta}{x}$, und können sagen, dass der Vector α der Quotient aus der Division des anderen Vectors β durch die Zahl x ist; so dass wir die weiteren Identitäten haben:

$$\frac{\beta}{x} . x = \alpha x = \beta,$$

und

$$\frac{\alpha x}{x} = \alpha.$$

Digitized by Google

17. Der positive oder negative Quotient, $x = \frac{\beta}{\alpha}$, der so durch Division eines von zwei parallelen Vectoren durch den anderen erhalten wird und der die Null als Grenze einschliesst, kann auch eine Skalar genannt werden, denn er kann stets gefunden und in gewissem Sinne construirt werden, durch Vergleichung von Strecken auf ein und derselben Skala (oder Achse); oder er kann unter die Form:

$$x = \frac{C - A}{B - A} = \frac{AC}{AB}$$

gebracht werden, in der die drei Punkte A, B, C, collinear sind (wie in der nebenstehenden Figur). Solche Skalaren sind daher einfach die Reellen (oder reellen Grössen) der Algebra; doch in Verbindung mit den nicht weniger reellen vorher betrachteten Vectoren bilden sie eins der Hauptelemente des Systems oder der Rechenart, der das vorliegende Buch gewidmet ist. Wir werden auf einer späteren Stufe zeigen, dass es einen sehr wichtigen Sinn hat, in dem wir uns einen Skalar zu einem Vector addirt denken können, und dass die so erhaltene Summe, oder die Combination,

Fig. 13.

„Skalar plus Vector“

ein Quaternion ist.

Kapitel II.

Anwendungen auf Punkte und Linien in einer gegebenen Ebne.

Erster Abschnitt.

Ueber lineare Gleichungen zwischen zwei coinitialen Vectoren.

18. Wenn verschiedene Vectoren, OA, OB, ... alle von einem gemeinsamen Punkt O aus gezogen werden, so heisst dieser Punkt der Anfangspunkt des Systems, und jeder besondere Vector, wie OA, heisst der Vector seines Endpunktes, A. In dem gegenwärtigen und den künftigen Ab-

Digitized by Google

schnitten werden wir stets annehmen, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt ist, dass alle Vectoren α, β, ... die wir zu betrachten Gelegenheit haben werden, von ein und demselben Anfangspunkt aus gezogen sind. Wollen wir jedoch diesen Anfangspunkt O ändern, ohne die Endpunkte A, ... zu ändern, so brauchen wir nur von jedem der früheren Vectoren α, ... ein und denselben Vector ω, nämlich den früheren Vector OO' des neuen Anfangspunktes O' zu subtrahiren; dann sind die Reste, $\alpha - \omega$, $\beta - \omega$, ... die neuen Vectoren α', β', ... derselben Punkte A, B, ... So haben wir z. B.

$$\alpha' = O'A = A - O' = (A - O) - (O' - O) = OA - OO' = \alpha - \omega.$$

19. Wenn zwei Vectoren α, β, oder OA, OB so von einem gegebenen Anfangspunkte O in gleicher oder entgegengesetzter Richtung aus gezogen sind, dass die drei Punkte O, A, B in einer graden Linie liegen (wie in nebenstehender Figur), dann ist (nach 16, 17) ihr Quotient $\frac{\beta}{\alpha}$ irgend ein positiver oder negativer Skalar, z. B. x; und, umgekehrt, die Gleichung $\beta = x\alpha$, interpretirt mit Beziehung auf einen Anfangspunkt, drückt die Bedingung der Collinearität der Punkte O, A, B aus; die besonderen Werthe, $x = 0$, $x = 1$, entsprechen den besonderen Lagen, O und A, des variablen Punktes B, dessen Ort die unbegrenzte Grade OA ist.

Fig. 14.

20. Die lineare Gleichung zwischen den beiden Vectoren α und β nimmt eine mehr symmetrische Form an, wenn wir sie schreiben:

$$a\alpha + b\beta = 0;$$

in der a und b zwei Skalaren sind, deren Verhältniss indess nur von Bedeutung ist. Die Bedingung der Coincidenz der zwei Punkte A und B, die vorher dem Werthe $x = 1$ entsprach, ist jetzt $\frac{-a}{b} = 1$; oder symmetrischer

$$a + b = 0.$$

Wenn demgemäss $a = -b$ ist, so wird die lineare Gleichung

$$b(\beta - \alpha) = 0,$$

oder

$$\beta - \alpha = 0,$$

denn wir nehmen an, dass nicht beide Coefficienten verschwinden; und die Gleichung $\beta = \alpha$, oder $OB = OA$, erfordert, dass der Punkt B mit dem Punkte A zusammenfällt: ein Fall, der auch passend durch die Formel ausgedrückt wird

$$B = A;$$

zusammenfallende Punkte werden daher (wenigstens in der Bezeichnung) als gleich behandelt. Im Allgemeinen ergiebt die lineare Gleichung:

$$a \,.\, OA + b \,.\, OB = 0,$$

und daher

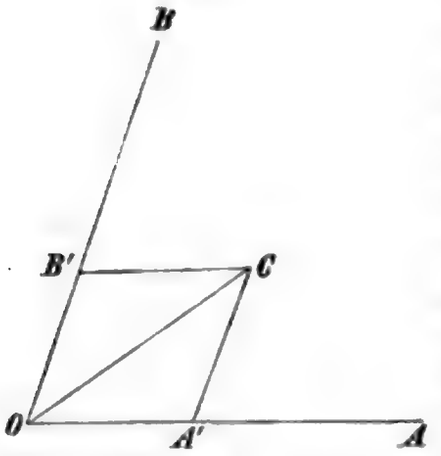
$$a : b = BO : OA.$$

Zweiter Abschnitt.

Ueber lineare Gleichungen zwischen drei coinitialen Vectoren.

21. Wenn zwei (wirkliche und coinitiale) Vectoren α, β, nicht durch irgend eine Gleichung von der Form $a\alpha + b\beta = 0$, mit irgend zwei beliebigen Skalar-Coefficienten a und b, verbunden sind, so können ihre Richtungen einander weder gleich noch entgegengesetzt sein. Sie bestimmen daher eine Ebene AOB, in welcher der (jetzt wirkliche) Vector, der durch die Summe $a\alpha + b\beta$ dargestellt wird, liegt. Denn wenn wir, der Symmetrie wegen, diese Summe mit dem Symbol, $-c\gamma$ bezeichnen, in dem c ein dritter Skalar ist und $\gamma = OC$ ein dritter Vector, so dass die drei coinitialen Vectoren α, β, γ verbunden sind durch die lineare Gleichung,

Fig. 15.



$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0;$$

und wenn wir

$$OA' = \frac{-a\alpha}{c}, \quad OB' = \frac{-b\beta}{c},$$

machen; so liegen die beiden Hülfspunkte A' und B' (nach 19)

Digitized by Google

auf den beiden unbegrenzten Graden OA, resp. OB: und wir haben die Gleichung,

$$OC = OA' + OB',$$

so dass die Figur $A'OB'C$ (nach 6) ein Parallelogramm ist und folglich eben.

22. Umgekehrt, wenn C irgend ein Punkt in der Ebene AOB ist, so können wir von ihm die Ordinaten CA' und CB' zu den Linien OA und OB ziehen und die Verhältnisse der drei Skalaren, a, b, c, so bestimmen, dass sie den beiden Gleichungen,

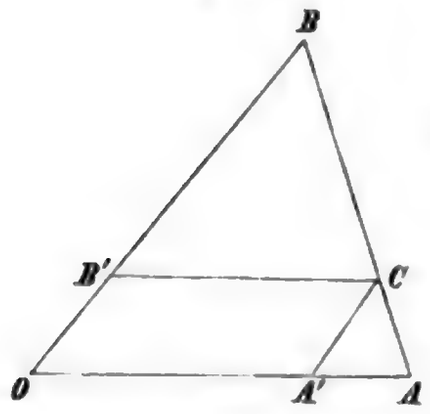
$$\frac{a}{c} = -\frac{OA'}{OA},$$
$$\frac{b}{c} = -\frac{OB'}{OB},$$

genügen; in Folge derselben erhalten wir die früheren Ausdrücke für OA', OB' und wie vorher die Beziehung $OC = OA' + OB'$; und werden so wieder auf die lineare Gleichung, $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, zurückgeführt. Von dieser Gleichung kann man daher sagen, sie drückt die Bedingung für die Complanarität der vier Punkte, O, A, B, C aus. Und wenn wir sie unter der Form:

$$x\alpha + y\beta + z\gamma = 0,$$

schreiben und die Vectoren α und β als gegeben ansehen, aber γ als einen variablen Vector und x, y, z als variable Skalaren, dann ist der Ort des variablen Punktes C die gegebene Ebene, OAB.

Fig. 16.



23. Es kann kommen, dass der Punkt C auf der graden Linie AB liegt, die hier als gegeben betrachtet wird. In diesem Falle (vergl. Art. 17, Fig. 13) muss der Quotient $\frac{AC}{AB}$ gleich einem gewissen Skalar sein, nehmen wir an t; so dass wir eine Gleichung haben werden von der Form,

$$\frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = t$$

oder

$$\gamma = \alpha + t(\beta - \alpha),$$

oder

$$(1-t)\alpha + t\beta - \gamma = 0;$$

wenn wir diese letzte Form mit der linearen Gleichung des Art. 21. vergleichen, so sehen wir, dass die Bedingung der Collinearität der drei Punkte A, B, C, in der gegebenen Ebne OAB, ausgedrückt wird durch die Formel:

$$a + b + c = 0.$$

Diese Bedingung kann auch so geschrieben werden:

$$1 = \frac{-a}{c} + \frac{-b}{c},$$

oder

$$\frac{OA'}{OA} + \frac{OB'}{OB} = 1;$$

und in dieser letzten Form drückt sie eine geometrische Relation aus, deren Vorhandensein anderweitig bekannt ist.

24. Wenn wir also die beiden Gleichungen haben:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

und

$$a + b + c = 0,$$

so dass die drei coinitialen Vectoren α, β, γ in einer graden Linie endigen und desshalb termino-collinear genannt werden können, und dann, nach einander und einzeln, jeden der drei Skalaren a, b, c eliminiren, so werden wir zu folgenden anderen drei Gleichungen geführt, die gewisse Verhältnisse von Abschnitten ausdrücken:

$$\begin{aligned} b(\beta - \alpha) + c(\gamma - \alpha) &= 0, \\ c(\gamma - \beta) + a(\alpha - \beta) &= 0, \\ a(\alpha - \gamma) + b(\beta - \gamma) &= 0; \end{aligned}$$

oder

$$0 = b.AB + c.AC = c.BC + a.BA = a.CA + b.CB.$$

Daraus folgt folgende Proportion zwischen Coefficienten und Segmenten:

$$a : b : c = BC : CA : AB.$$

Wir hätten auch bemerken können, dass die angegebenen Gleichungen ergeben:

$$\alpha = \frac{b\beta + c\gamma}{b + c},$$

$$\beta = \frac{c\gamma + a\alpha}{c + a},$$

$$\gamma = \frac{a\alpha + b\beta}{a + b};$$

Digitized by Google

ferner:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{b}{a+b} = -\frac{b}{c}, \text{ u. s. w.}$$

25. Wenn wir noch α und β als gegeben behandeln, aber γ und $\frac{y}{x}$ als variabel betrachten, so drückt die Gleichung:

$$\gamma = \frac{x\alpha + y\beta}{x+y}$$

aus, dass der veränderliche Punkt C irgendwo auf der unbegrenzten Graden AB liegt, oder dass diese Linie sein Ort ist, während er die begrenzte Linie AB in Abschnitte theilt, deren veränderliches Verhältniss ist:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{y}{x}.$$

Es sei C' irgend ein anderer Punkt auf derselben Linie und sein Vector sei:

$$\gamma' = \frac{x'\alpha + y'\beta}{x'+y'};$$

dann haben wir ebenso das weitere Verhältniss der Abschnitte:

$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{y'}{x'}.$$

Wenn wir nun übereinkommen, allgemein, für irgend eine Gruppe von vier collinearen Punkten, die Bezeichnung anzuwenden:

$$(ABCD) = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DA} = \frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC};$$

so dass das Symbol

$$(ABCD),$$

die anharmonische Function, oder der anharmonische Quotient, oder einfach die Anharmonische der Gruppe A, B, C, D genannt werden kann, so werden wir im gegenwärtigen Falle die Gleichung haben:

$$(ACBC') = \frac{AC}{CB} : \frac{AC'}{C'B} = \frac{yx'}{xy'}.$$

26. Wenn der anharmonische Quotient der negativen Einheit gleich wird, so wird die Gruppe (wie wohl bekannt ist) harmonisch. Wenn wir daher die beiden Gleichungen haben:

$$\gamma = \frac{x\alpha + y\beta}{x+y}, \quad \gamma' = \frac{x\alpha - y\beta}{x-y},$$

so sind die beiden Punkte C und C' einander harmonisch conjugirt, in Beziehung auf die beiden gegebenen Punkte, A und B;

und wenn sie sich zusammen ändern, in Folge der Aenderung des Werthes von $\frac{y}{x}$, so bilden sie (in einem wohlbekannten Sinne) auf der unbegrenzten Graden AB Theilpunkte in Involution. Die Doppelpunkte (oder Brennpunkte) dieser Involution, nämlich die Punkte, von denen jeder sich selbst conjugirt ist, sind die Punkte A und B selbst. Als Verification finden wir, wenn wir mit μ den Vector des Mittelpunktes M des gegebenen Intervalls AB bezeichnen, so dass

Fig. 17.

$$\beta - \mu = \mu - \alpha, \text{ oder } \mu = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),$$

leicht, dass

$$\frac{\gamma - \mu}{\beta - \mu} = \frac{y - x}{y + x} = \frac{\beta - \mu}{\gamma' - \mu},$$

oder

$$\frac{MC}{MB} = \frac{MB}{MC'};$$

so dass das Rechteck aus den Entfernungen MC, MC' der beiden veränderlichen, aber conjugirten Punkte C, C' von dem Mittelpunkte M der Involution gleich dem konstanten Quadrat des halben Abstandes zwischen den beiden Doppelpunkten, A, B, ist. Allgemeiner, wenn wir schreiben:

$$\gamma = \frac{x\alpha + y\beta}{x + y}, \quad \gamma' = \frac{lx\alpha + my\beta}{lx + my},$$

wo der anharmonische Quotient $\frac{l}{m} = \frac{yx'}{xy'}$, irgend ein konstanter Skalar ist, so bilden, in einer anderen bekannten und neueren*) Ausdrucksweise, die Punkte C und C' auf der unbegrenzten graden Linie AB zwei homographische Eintheilungen, deren Doppelpunkte wieder A und B sind. Noch allgemeiner, wenn wir die beiden Gleichungen aufstellen:

$$\gamma = \frac{x\alpha + y\beta}{x + y}, \text{ und } \gamma' = \frac{lx\alpha' + my\beta'}{lx + my},$$

$\frac{l}{m}$ wieder konstant, aber $\frac{y}{x}$ variabel nehmen, während $\alpha' = OA'$, $\beta' = OB'$ und $\gamma' = OC'$, so sind die beiden gegebenen Linien, AB und $A'B'$, homographisch eingetheilt durch die beiden

*) Vergl. die „*Géometrie Superieure*“ von M. Chasles, p. 107 (Paris, 1852).

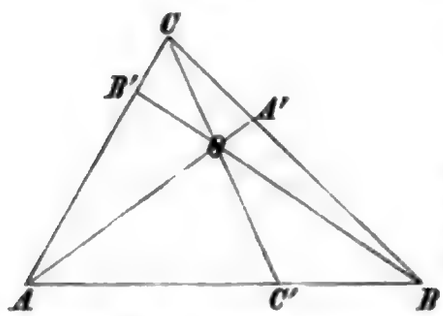
Digitized by Google

variablen Punkte C und C', von denen wir jetzt nicht voraussetzen, dass sie sich auf einer gemeinsamen Linie entlang bewegen.

27. Wenn die lineare Gleichung $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, ohne die Beziehung $a + b + c = 0$ zwischen ihren Coefficienten besteht, so sind die drei coinitialen Vectoren α, β, γ noch complanar, aber sie endigen nicht mehr in einer graden Linie; ihre Endpunkte A, B, C sind jetzt die Ecken eines Dreiecks.

In diesem allgemeineren Falle können wir uns die Aufgabe stellen, die Vectoren α', β', γ' der drei Punkte

Fig. 12.



$$A' = OA \cdot BC,$$
$$B' = OB \cdot CA,$$
$$C' = OC \cdot AB$$

zu finden, d. h. der Punkte, in denen die vom Anfangspunkte O zu den drei Ecken des Dreiecks gezogenen Linien die drei entsprechenden gegenüberliegenden Seiten schneiden. Die drei Collineationen OAA', u. s. w. geben (nach 19) drei Ausdrücke von den Formen:

$$\alpha' = x\alpha,$$
$$\beta' = y\beta,$$
$$\gamma' = z\gamma,$$

in denen x, y, z drei Skalare sind, die man zu bestimmen suchen kann vermittelst der drei anderen Collineationen $A'BC$ u. s. w., mit Hülfe von Beziehungen, die aus dem Satz des Art. 23 abzuleiten sind. Wenn man daher für α seinen Werth, $x^{-1}\alpha'$, in die gegebene lineare Gleichung einsetzt und die Summe der Coefficienten der neuen resultirenden linearen Gleichung gleich Null setzt, nämlich:

$$x^{-1}a\alpha' + b\beta + c\gamma;$$

und wenn man in gleicher Weise β, γ, jedes der Reihe nach, aus der ursprünglichen Gleichung eliminirt, so finden wir die Werthe:

$$x = \frac{-a}{b+c}, \quad y = \frac{-b}{c+a}, \quad z = \frac{-c}{a+b};$$

woraus die gesuchten Vectoren sich auf folgende zwei Arten ausdrücken lassen:

$$\text{I.} \ldots . \alpha' = \frac{-a\alpha}{b+c}, \ \beta' = \frac{-b\beta}{c+a}, \ \gamma' = \frac{-c\gamma}{a+b};$$

oder

$$\text{II.} \ldots . \alpha' = \frac{b\beta + c\gamma}{b+c}, \ \beta' = \frac{c\gamma + a\alpha}{c+a}, \ \gamma' = \frac{a\alpha + b\beta}{a+b}.$$

In der That sehen wir aus dem einen der Ausdrücke für α', dass A' auf der Linie OA liegt, und aus dem anderen Ausdruck für denselben Vector α', dass derselbe Punkt A' auf der Linie BC liegt. Als eine andere Verification können wir bemerken, dass die letzten Ausdrücke für α', β', γ' mit denen zusammenfallen, die in Artikel 24 für α, β, γ selbst, unter der besonderen Annahme, dass die drei Punkte A, B, C collinear waren, gefunden wurden.

28. Wir können uns ferner vornehmen, die Verhältnisse der Abschnitte der Seiten des Dreiecks ABC zu bestimmen, die durch die Punkte A', B', C', gebildet werden. Zu diesem Zwecke können wir die letzten Gleichungen für α', β', γ' unter der Form schreiben:

$$\begin{aligned} 0 &= b(\alpha' - \beta) - c(\gamma - \alpha') \\ &= c(\beta' - \gamma) - a(\alpha - \beta') \\ &= a(\gamma' - \alpha) - b(\beta - \gamma'); \end{aligned}$$

und wir sehen, dass sie dann die gesuchten Verhältnisse ergeben, wie folgt:

$$\frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b},$$
$$\frac{CB'}{B'A} = \frac{a}{c},$$
$$\frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{a};$$

und daraus erhalten wir sofort die bekannte Gleichung der sechs Abschnitte:

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1,$$

als die Bedingung des Zusammentreffens der drei graden Linien AA', BB', CC' in einem gemeinsamen Punkte, wie O. Es ist auch leicht, aus denselben Verhältnissen der Abschnitte auf die folgende Proportion der Coefficienten und Flächen zu schliessen:

$$a : b : c = OBC : OCA : OAB,$$

in der wir im Allgemeinen algebraische Vorzeichen beachten

Digitized by Google

müssen; ein Dreieck denken wir (durch Null) vom Positiven zum Negativen übergehend, im Vergleich mit irgend einem gegebenen Dreieck in seiner Ebne, wenn (in Folge irgend einer continuirlichen Aenderung) seine Spitze seine Basis schneidet. Man muss beachten, dass wir nach dieser Bestimmung (die wirklich eine nothwendige zur Aufstellung allgemeiner Formeln ist), für irgend drei Punkte, die Gleichung haben:

$$ABC + BAC = 0,$$

genau so, wie wir (in Art. 5) für irgend zwei Punkte die Gleichung hatten:

$$AB + BA = 0.$$

Vollständiger haben wir in diesem Sinne die Formeln:

$$ABC = -BAC = BCA = -CBA = CAB = -ACB;$$

und irgend zwei complanare Dreiecke, ABC, $A'B'C'$, haben zu einander ein positives oder negatives Verhältniss, je nachdem die beiden Rotationen, die durch dieselben Symbole ABC, $A'B'C'$, dargestellt gedacht werden können, gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind.

29. Wenn A' und B' resp. die Seiten BC und CA halbiren, dann ist

$$a = b = c,$$

und C' halbirt AB; daraus folgt das bekannte Theorem, dass die drei Halbirungslinien der Seiten eines Dreiecks in einem Punkte zusammentreffen, der oft der Schwerpunkt genannt wird, doch den wir vorziehen den mittleren Punkt des Dreiecks zu nennen und der hier der Anfangspunkt O ist. Zu gleicher Zeit werden die erste Ausdrücken in Art. 27 für α', β', γ'

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{2},\ \beta' = -\frac{\beta}{2},\ \gamma' = -\frac{\gamma}{2};$$

daraus ergiebt sich der andere bekannte Satz, dass die drei Halbirungslinien einander in einem Drittel ihrer Länge schneiden.

30. Die lineare Gleichung zwischen α, β, γ reducirt sich, in dem zuletzt betrachteten Falle, auf die Form

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

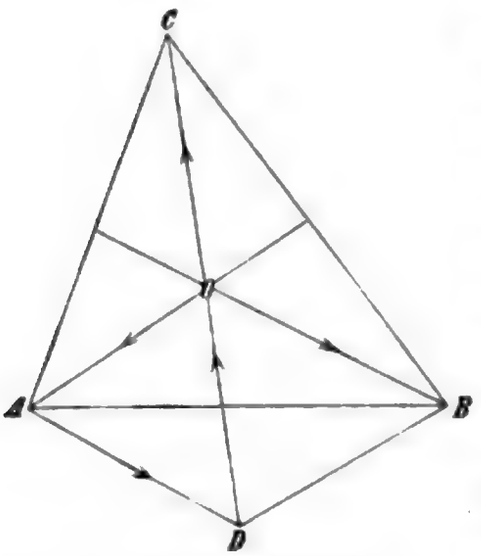
oder

$$OA + OB + OC = 0;$$

die drei Vectoren α, β, γ, oder OA, OB, OC können daher

(nach Art. 10) durch eine Fortbewegung ohne Drehung so zusammengesetzt werden, dass sie die aufeinanderfolgenden Seiten eines Dreiecks werden; und wenn wir daher (wie in Fig. 19) das Parallelogramm $AOBD$ herstellen, so ist das Dreieck OAD das erwähnte. Es folgt (nach 11), dass, wenn wir die vier Punkte O, A, B, C durch irgend ein System paralleler Coordinaten in vier andere Punkte O_1, A_1, B_1, C_1, auf irgend eine angenommene Ebne projiciren, die Summe der drei projicirten Vectoren $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$, oder $O_1 A_1$, u. s. w. ebenfalls Null ist; so dass wir

Fig. 19.



die neue lineare Gleichung,

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = 0,$$

oder,

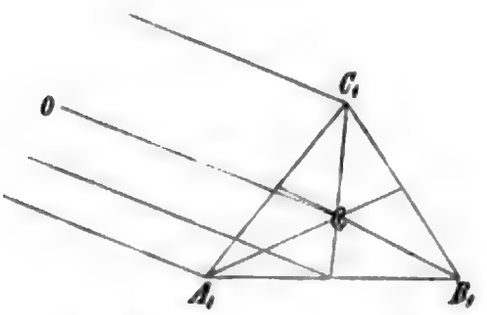
$$O_1A_1 + O_1B_1 + O_1C_1 = 0,$$

haben; und wirklich ist sofort ersichtlich (siehe Fig. 20), dass der projicirte mittlere Punkt O_1 der mittlere Punkt des projicirten Dreiecks, A_1, B_1, C_1, ist. Wir haben auch die Gleichung:

$(\alpha_1 - \alpha) + (\beta_1 - \beta) + (\gamma_1 - \gamma) = 0$;

in der

Fig 20.



$$\alpha_1 - \alpha = O_1A_1 - OA = (O_1A + AA_1) - (OO_1 + O_1A)$$
$$= AA_1 - OO_1;$$

daraus folgt:

$$OO_1 = \tfrac{1}{3}(AA_1 + BB_1 + CC_1),$$

oder die Coordinate des mittleren Punktes eines Dreiecks ist das Mittel der Coordinaten der drei Ecken.

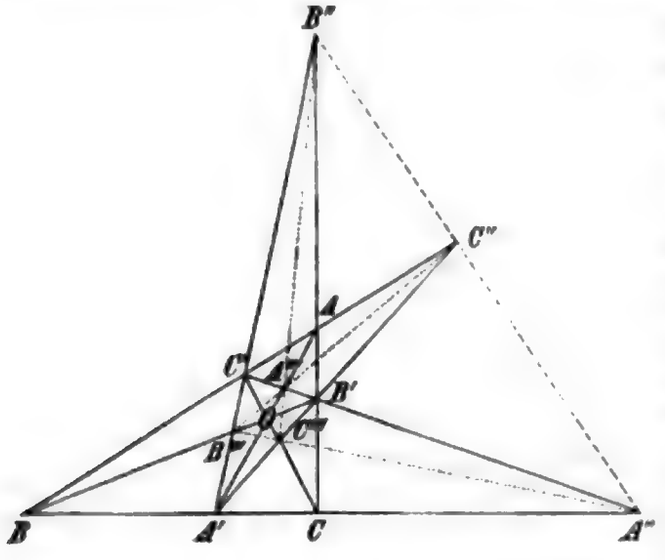
Digitized by Google

Dritter Abschnitt.

Ueber ebne geometrische Netze.

31. Wenn wir den allgemeineren Fall des Art. 27, in dem die Coefficienten a, b, c als ungleich angenommen wurden, wieder aufnehmen, so können wir zunächst untersuchen, in welchen Punkten A'', B'', C'' die Linien $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ respective die Seiten BC, CA, AB, des Dreiecks treffen; oder können anzugeben suchen die Vectoren $\alpha'', \beta'', \gamma''$ der Durchschnittspunkte (vergl. 27),

Fig. 21.



$$A'' = B'C'' \cdot BC,$$
$$B'' = C'A' \cdot CA,$$
$$C'' = A'B' \cdot AB,$$

Die ersten Ausdrücke im Art. 27 für β', γ', geben die Gleichungen:

$$(c + a)\beta' + b\beta = 0,$$
$$(a + b)\gamma' + c\gamma = 0;$$

woraus folgt:

$$\frac{b\beta - c\gamma}{b - c} = \frac{(a + b)\gamma' - (c + a)\beta'}{(a + b) - (c + a)};$$

aber (nach 25) ist die eine Seite der Vector eines Punktes auf BC, und die andere der eines Punktes auf $B'C'$; jede ist daher ein Werth für den Vector α'' von A'', und ähnliches gilt für β'' und γ''. Wir können daher schreiben:

$$\alpha'' = \frac{b\beta - c\gamma}{b - c}, \quad \beta'' = \frac{c\gamma - a\alpha}{c - a}, \quad \gamma'' = \frac{a\alpha - b\beta}{a - b};$$

und indem wir diese Ausdrücke mit der zweiten Reihe der Werthe von α', β', γ' in Art. 27 vergleichen, sehen wir (nach 26), dass die Punkte A'', B'', C'' harmonisch conjugirt (wie sie es, bekanntermassen, wirklich sind) respective zu den Punkten A', B', C', in Beziehung auf die drei Punktepaare, B, C; C, A; A, B; sind; so dass wir, in der Bezeichnung des Art. 25, die Gleichungen haben:

$$(BA'CA'') = (CB'AB'') = (AC'BC'') = -1.$$

Und da die Ausdrücke für $\alpha'', \beta'', \gamma''$ zu der folgenden linearen Gleichung zwischen diesen drei Vectoren führen:

$$(b-c)\alpha'' + (c-a)\beta'' + (a-b)\gamma'' = 0,$$

mit der Relation

$$(b-c) + (c-a) + (a-b) = 0$$

zwischen ihren Coefficienten, so kommen wir (nach 23) zu dem zweiten bekannten Satze, dass die drei Punkte A'', B'', C'' collinear sind, wie das durch eine der punktirten Linien in der vorstehenden Figur 21 angezeigt ist.

32. Die Linie $A''B'C'$ kann irgend eine gradlinige Transversale darstellen, die die Seiten des Dreiecks ABC schneidet; und da wir haben:

$$\frac{BA''}{A''C} = \frac{\alpha'' - \beta}{\gamma - \alpha''} = -\frac{c}{b},$$

$$\text{während } \frac{CB'}{B'A} = \frac{a}{c}, \text{ und } \frac{AC'}{C'B} = \frac{b}{a}, \text{ wie vorher,}$$

so kommen wir zu der zweiten Gleichung der sechs Segmente, für irgend ein Dreieck, das durch eine grade Linie geschnitten wird (vergl. 28):

$$\frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = -1;$$

was wiederum übereinstimmt mit bekannten Resultaten.

33. Wenn man β und γ zwischen jeder Reihe von Ausdrücken (27) für β' und γ' eliminirt, mit Hülfe der gegebenen linearen Gleichung, so kommen wir zu der weiteren Gleichung zwischen den drei Vectoren α, β', γ':

$$0 = -a\alpha + (c+a)\beta' + (a+b)\gamma'.$$

Behandelt man sie in derselben Weise wie die zwischen

Digitized by Google

α, β, γ gegebene Gleichung, so finden wir, dass wenn wir (wie in Fig. 21)

$$A''' = OA \cdot BC',$$
$$B''' = OB \cdot C'A',$$
$$C''' = OC \cdot A'B',$$

machen, die Vectoren dieser drei neuen Durchschnitts-Punkte ausgedrückt werden können auf einem der beiden folgenden Wege, von denen der erste der kürzere ist, doch der zweite für gewisse Zwecke (vergl. 34, 36) angemessener:

$$\text{I.} \ldots \alpha''' = \frac{a\alpha}{2a+b+c}, \quad \beta''' = \frac{b\beta}{2b+c+a}, \quad \gamma''' = \frac{c\gamma}{2c+a+b}$$

oder

$$\text{II.} \ldots \alpha''' = \frac{2a\alpha + b\beta + c\gamma}{2a+b+c},$$
$$\beta''' = \frac{2b\beta + c\gamma + a\alpha}{2b+c+a},$$
$$\gamma''' = \frac{2c\gamma + a\alpha + b\beta}{2c+a+b}.$$

Und die drei Gleichungen, von denen die folgende eine ist:

$$(b-c)\alpha'' - (2b+c+a)\beta''' + (2c+a+b)\gamma''' = 0,$$

mit den Beziehungen zwischen ihren Coefficienten, die nach dem Anblick sofort ersichtlich sind, zeigen (nach 23), dass wir die drei hinzukommenden Collineationen haben, $A''B'''C'''$, $B''C'''A'''$, $C'''A'''B'''$, wie sie durch drei von den punktirten Linien in der Figur angedeutet sind. Da wir ferner die beiden Ausdrücke haben:

$$\alpha''' = \frac{(a+b)\gamma' + (c+a)\beta'}{(a+b)+(c+a)},$$
$$\alpha'' = \frac{(a+b)\gamma' - (c+a)\beta'}{(a+b)-(c+a)},$$

so sehen wir (nach 26), dass die beiden Punkte A'', A''' harmonisch conjugirt sind in Beziehung auf B' und C'; und ebenso die beiden anderen Punktepaare B'', B''' und C'', C''' in Bezug auf C', A', und A', B': so dass wir, in einer schon angewandten Bezeichnung (25, 31), schreiben können,

$$(B'A'''C'A'') = (C'B'''A'B'') = (A'C'''B'C'') = -1.$$

34. Wenn wir, wie vorher, mit irgend vier complanaren Punkten beginnen, O, A, B, C, von denen nicht drei collinear sind, so können wir (wie in Fig. 18), durch, wie wir sagen können, eine erste Construction, von ihnen sechs Linien ableiten,

die sie zu zwei und zwei verbinden, und die einander in drei neuen Punkten A', B', C' schneiden; und dann können wir durch eine zweite Construction (dargestellt in Fig. 21) diese drei neuen Linien verbinden, die, durch ihre Durchschnitte mit den vorigen Linien, sechs neue Punkte, A'', ... C''' ergeben werden. Wir können fortfahren sie miteinander und mit den gegebenen Punkten durch sechszehn neue Linien, oder Linien einer dritten Construction, zu verbinden, nämlich, die vier punktirten Linien der Fig. 21, und zwölf andere Linien, von denen drei von jedem der vier gegebenen Punkte gezogen werden müssten: und diese würden vier und achtzig neue Durchschnittspunkte bestimmen, von denen man einige, obwohl sie nicht bezeichnet sind, in der Figur sehen kann.

Aber wie weit dieses Verfahren linearer Construction fortgesetzt werden möge, um das zu bilden, was man* ein ebenes geometrisches Netz genannt hat, die Vectoren der so bestimmten Punkte haben alle eine gemeinsame Eigenschaft: nämlich die, dass jeder dargestellt werden kann durch einen Ausdruck von der Form:

$$\varrho = \frac{xa\alpha + yb\beta + zc\gamma}{xa + yb + zc};$$

in dem die Coefficienten x, y, z irgend welche ganze Zahlen sind. Wirklich sehen wir (aus 27, 31, 33), dass solche Ausdrücke für die neun abgeleiteten Vectoren $\alpha', \ldots\ldots \gamma'''$, die bisher allein betrachtet worden sind, angegeben werden können; und es ist nicht schwer, aus der Art der angewandten Rechnungen, einzusehn, dass ein ähnliches Resultat für jeden folgenden abgeleiteten Vector gelten muss. Doch dieses und andere verwandte Resultate werden verständlicher und ihre geometrische Bedeutung wird besser verstanden werden, nach einer etwas eingehenderen Betrachtung von anharmonischen Quotienten und der Einführung eines gewissen Systems anharmonischer Coordinaten, für Punkte und Linien in einer Ebne, zu der wir uns jetzt wenden wollen; indem wir uns, für ein folgendes Kapitel, einige Anwendungen der vorigen Theorie auf den Raum vorbehalten.

---

* Prof. A. F. Möbius, auf Seite 274 seines barycentrischen Calcüls. (Der barycentrische Calcül, Leipzig, 1827.)

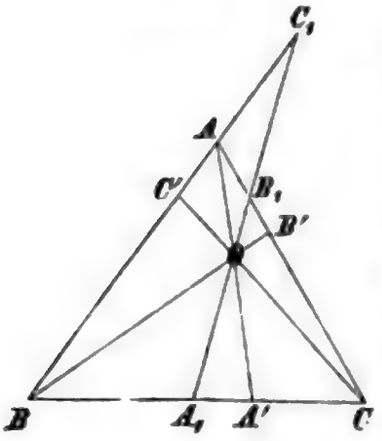
Digitized by Google

Vierter Abschnitt.

Ueber anharmonische Coordinaten und Gleichungen von Punkten und Linien in einer Ebne.

35. Wenn wir die letzten Gleichungen des Art. 33 mit den entsprechenden Gleichungen des Art. 31 vergleichen, so sehen wir, dass die harmonische Gruppe $BA'CA''$, auf der Seite BC des Dreiecks ABC in Fig. 21, einfach reflectirt worden ist in eine andere solche Gruppe, $B'A'''C'A''$, auf der Seite $B'C'$, durch ein harmonisches Büschel von vier Strahlen, die alle durch den Punkt O gehen; und ebenso ist es bei den anderen Gruppen. Allgemeiner, es sei OA, OB, OC, OD, oder kurz $O.ABCD$, irgend ein Büschel, mit dem Punkt O als Spitze; und es werde der neue Strahl OD, wie in Fig. 22, durch die drei Seiten des Dreiecks ABC, in den drei Punkten A_1, B_1, C_1 geschnitten; es sei ferner

Fig. 22.



$$OA_1 = \alpha_1 = \frac{y b\beta + z c\gamma}{yb + zc},$$

so dass wir (nach 25) die anharmonischen Quotienten haben;

$$(BA'CA_1) = \frac{y}{z}, \qquad (CA'BA_1) = \frac{z}{y};$$

wir wollen die beiden anderen Vectoren der Durchschnittspunkte, β_1 und γ_1, zu bestimmen suchen, und zwar in der Absicht die anharmonischen Verhältnisse der Gruppen auf den beiden anderen Seiten zu bestimmen. Die gegebene Gleichung (27),

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$

zeigt uns sofort, dass diese beiden Vectoren:

$$OB_1 = \beta_1 = \frac{(y-z)c\gamma + ya\alpha}{(y-z)c + ya},$$

$$OC_1 = \gamma_1 = \frac{(z-y)b\beta + za\alpha}{(z-y)b + za},$$

sind und daraus leiten wir (nach 25) die beiden anderen Anharmonischen ab,

$$(CB'AB_1) = \frac{y-z}{y}; \qquad (BC'AC_1) = \frac{z-y}{z};$$

so dass wir die Relationen haben:

$$(CB'AB_1) + (CA'BA_1) = (BC'AC_1) + BA'CA_1) = 1.$$

Ferner ist es im Allgemeinen, für irgend vier collineare Punkte A, B, C, D, nicht schwer zu beweisen, dass

$$\frac{AB}{BC} \cdot CD + \frac{AC}{CB} \cdot BD = DA;$$

und daraus kann nach der Definition (25) der Bezeichnung des Symbols $(ABCD)$, die folgende Identität abgeleitet werden:

$$(ABCD) + (ACBD) = 1.$$

Wenn wir dies dann mit den zuletzt gefundenen Relationen vergleichen, haben wir, für Fig. 22, die folgenden anharmonischen Gleichungen:

$$(CAB'B_1) = (CA'BA_1) = \frac{z}{y};$$

$$(BAC'C_1) = (BA'CA_1) = \frac{y}{z};$$

und wir sehen (wie nach bekannten Sätzen zu erwarten war), dass sich die Anharmonische der Gruppe nicht ändert, wenn wir von einer Seite des Dreiecks, diese als eine Transversale des Büschels betrachtet, zu einer anderen Seite, oder Transversale übergehen.

Wir können daher (wie üblich) von solch einer Anharmonischen einer Gruppe, als zu gleicher Zeit von der Anharmonischen eines Büschels sprechen; und, mit Rücksicht auf die Reihenfolge der Strahlen, und auf die Definition (25) die beiden letzten Anharmonischen durch die beiden folgenden reciproken Ausdrücke bezeichnen:

$$(O.CABD) = \frac{z}{y}; \qquad (O.BACD) = \frac{y}{z};$$

mit anderen sich daraus ergebenden Werthen, wenn die Reihenfolge der Strahlen geändert wird; wir wollen schreiben, dass

$$(O.CABD) = (C'A'B'D'),$$

wenn die Strahlen OC, OA, OB, OD durch irgend eine grade Linie in den Punkten C', A', B', D', geschnitten werden.

36. Der Ausdruck (34),

$$\varrho = \frac{xa\alpha + yb\beta + zc\gamma}{xa + yb + zc},$$

kann den Vector irgend eines Punktes P in der gegebenen Ebne, durch eine passende Wahl der Coefficienten x, y, z, oder einfach der Verhältnisse derselben darstellen. Denn da (nach 22)

Digitized by Google

die drei complanaren Vectoren PA, PB, PC durch eine lineare Gleichung von der Form:

$$a'.PA + b'.PB + c'.PC = 0,$$

verbunden sein müssen, oder:

$$a'(\alpha - \varrho) + b'(\beta - \varrho) + c'(\gamma - \varrho) = 0,$$

eine Gleichung, die ergiebt

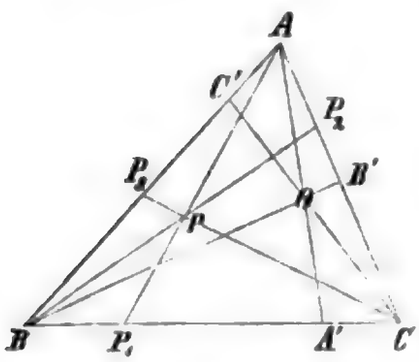
$$\varrho = \frac{a'\alpha + b'\beta + c'\gamma}{a' + b' + c'},$$

so haben wir nur zu schreiben:

$$\frac{a'}{a} = x, \quad \frac{b'}{b} = y, \quad \frac{c'}{c} = z,$$

um den angegebenen Ausdruck für ϱ zu erhalten. Daraus ist leicht zu folgern, aus Sätzen die schon entwickelt worden sind, dass wenn wir schreiben (vergleiche die nebenstehende Figur 23),

Fig. 23.



$$P_1 = PA \cdot BC,$$
$$P_2 = PB \cdot CA,$$
$$P_3 = PC \cdot AB,$$

wir, mit denselben Coefficienten xyz die folgenden Ausdrücke für die Vectoren OP, OP_2, OP_3, oder $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3$, der drei Durchschnittspunkte, P_1, P_2, P_3 haben werden:

$$\varrho_1 = \frac{yb\beta + zc\gamma}{yb + zc}, \quad \varrho_2 = \frac{zc\gamma + xa\alpha}{zc + xa},$$
$$\varrho_3 = \frac{xa\alpha + yb\beta}{xa + yb};$$

und dies ergiebt sofort die folgenden Anharmonischen der Büschel oder Gruppen:

$$(A.BOCP) = (BA'CP_1) = \frac{y}{z};$$
$$(B.COAP) = (CB'AP_2) = \frac{z}{x};$$
$$(C.AOBP) = (ACBP_3) = \frac{x}{y};$$

wir ersehen daraus, dass ihr Product gleich eins ist.

Irgend zwei von diesen drei Büscheln genügen zur Bestimmung der Lage des Punktes P, wenn das Dreieck ABC und der Anfangspunkt O gegeben sind, und daraus leuchtet ein,

dass die drei Coefficienten x, y, z, oder irgend welche ihnen proportionale Skalare, deren Quotienten also die Anharmonischen dieser Büschel darstellen, passend die Anharmonischen Coordinaten des Punktes, P, mit Rücksicht auf das gegebene Dreieck und den gegebenen Anfangspunkt genannt werden können: während der Punkt P selbst durch das Zeichen:

$$P = (x, y, z),$$

bezeichnet werden kann.

Mit dieser Bezeichnung werden die dreizehn Punkte der Fig. 21 so bezeichnet:

$A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$, $C = (0,0,1)$, $O = (1,1,1)$,
$A' = (0,1,1)$, $B' = (1,0,1)$, $C' = (1,1,0)$;
$A'' = (0,1,-1)$, $B'' = (-1,0,1)$, $C'' = (1,-1,0)$;
$A''' = (2,1,1)$, $B''' = (1,2,1)$, $C''' = (1,1,2)$.

37. Wenn P_1 und P_2 irgend zwei Punkte in der gegebenen Ebne sind:

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1), \qquad P_2 = (x_2, y_2, z_2),$$

und wenn t und u irgend zwei Skalar-Coefficienten sind, dann ist der folgende dritte Punkt,

$$P = (tx_1 + ux_2, ty_1 + uy_2, tz_1 + uz_2),$$

collinear mit den zwei vorigen Punkten, oder (in anderen Worten er liegt auf der graden Linie $P_1 P_2$. Denn, wenn wir setzen:

$$x = tx_1 + ux_2,$$
$$y = ty_1 + uy_2,$$
$$z = tz_1 + uz_2,$$

und:

$$\varrho_1 = \frac{x_1 a\, a + \dots}{x_1 a + \dots.}, \qquad \varrho_2 = \frac{x_2 a\, a + \dots.}{x_2 a + \dots..}, \qquad \varrho = \frac{x a\, a + \dots.}{x a + \dots..},$$

so sind diese Vectoren der drei Punkte $P_1 P_2 P$ durch die lineare Gleichung verbunden:

$$t(x_1 a + \dots)\varrho_1 + u(x_2 a + \dots.)\varrho_2 - (x a + \dots.)\varrho = 0;$$

in der (vergl. 23) die Summe der Coefficienten Null ist. Umgekehrt, der Punkt P kann nicht collinear mit P_1, P_2 sein, wenn sich nicht seine Coordinaten in dieser Weise durch die ihrigen ausdrücken lassen. Es folgt daraus, dass wenn ein variabler Punkt P gezwungen wird sich eine gegebene grade Linie $P_1 P_2$ entlang zu bewegen, oder wenn er solch eine Linie (in der gegebenen

Digitized by Google

Ebne) zu seinem Orte hat, dass seine Coordinaten xyz einer homogenen Gleichung ersten Grades genügen müssen, mit constanten Coefficienten; die, in der bekannten Bezeichnung der Determinanten, so geschrieben werden kann:

$$0 = \begin{vmatrix} x, & y, & z \\ x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \end{vmatrix};$$

oder vollständiger,

$$0 = x(y_1z_2 - z_1y_2) + y(z_1x_2 - x_1z_2) + z(x_1y_2 - y_1x_2);$$

oder kurz:

$$0 = lx + my + nz;$$

in ihr sind l, m, n drei konstante Skalare, deren Quotienten die Lage der graden Linie A bestimmen, einer Linie, die also der Ort des Punktes P ist. Es ist naturgemäss, die Gleichung, die so die Coordinaten des Punktes P verbindet, die Anharmonische Gleichung der Linie A zu nennen; und man wird es auch angemessen finden, von den Coefficienten l, m, n in dieser Gleichung, als von den Anharmonischen Coordinaten der Linie zu sprechen: diese Linie kann auch bezeichnet werden durch das Symbol:

$$A = [l, m, n].$$

38. So haben z. B. die drei Seiten BC, CA, AB des gegebenen Dreiecks zu ihren Gleichungen:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

und zu ihren Symbolen:

$$[1, 0, 0], \quad [0, 1, 0], \quad [0, 0, 1].$$

Die drei weiteren Linien OA, OB, OC, der Figur 18 haben in gleicher Weise zu ihren Gleichungen und Symbolen:

$$y - z = 0, \quad z - x = 0, \quad x - y = 0,$$
$$[0, 1, -1], \quad [-1, 0\,1] \quad [1, -1, 0].$$

Die Linien $B'C'A''$, $C'A'B''$, $A'B'C''$ der Figur 21 sind:

$$y + z - x = 0, \quad z + x - y = 0, \quad x + y - z = 0,$$

oder:

$$[-1, 1, 1], \quad [1, -1, 1], \quad [1, 1, -1];$$

die Linien $A''B''C'''$, $B''C'''A'''$, $C''A'''B'''$, derselben Figur, werden ebenso dargestellt durch die Gleichungen und Symbole:

$$y + z - 3x = 0, \quad z + x - 3y = 0, \quad x + y - 3z = 0,$$
$$[-3, 1, 1], \qquad [1, -3, 1], \qquad [1, 1, -3];$$

und die Linie $A'''B'''C'''$ ist,

$$x + y + z = 0, \text{ oder } [1, 1, 1].$$

Endlich, wollen wir bemerken, dass in derselben Weise die Gleichung und das Symbol dessen, was oft die Linie im Unendlichen genannt wird, oder des Ortes aller unendlich entfernten Punkte in der gegebenen Ebne, bezüglich sind:

$$ax + by + cz = 0, \text{ und } [a, b, c];$$

denn die lineare Function, $ax + by + cz$, der Coordinaten x, y, z eines Punktes P in der Ebne, ist der Nenner des Ausdrucks (34, 36) für den Vector ρ dieses Punktes: so dass der Punkt P in unendlicher Entfernung vom Anfangspunkte O ist, wenn, und nur wenn, diese lineare Function verschwindet.

39. Die anharmonischen Coordinaten einer Linie, obwohl sie vorher (37) in Beziehung auf die Gleichung dieser Linie interpretirt wurden, die Gleichung aufgefasst als eine Verbindung zwischen den Coordinaten eines variablen Punktes derselben, sind auch einer unabhängigen geometrischen Deutung fähig. Denn die drei Punkte L, M, N, in denen die Linie A, oder $[l, m, n]$ oder $lx + my + nz = 0$, die drei Seiten BC, CA, AB des gegebenen Dreiecks ABC, oder die drei gegebenen Linien $x = 0, y = 0, z = 0$ (38) schneidet, können augenscheinlich (nach Massgabe von 36) in folgender Weise bezeichnet werden:

$$L = (0, n, -m); \quad M = (-n, 0, l); \quad N = (m, -l, 0).$$

Aber wir haben auch (nach 36):

$$A'' = (0, 1, -1); \quad B'' = (-1, 0, 1); \quad C'' = (1, -1, 0);$$

daraus folgt leicht, nach den Sätzen früherer Artikel, dass:

$$\frac{n}{m} = (BA''CL); \quad \frac{l}{n} = (CB''AM); \quad \frac{m}{l} = (AC''BN);$$

mit der sich daraus ergebenden Relation:

$$(BA''CL).(CB''AM).(AC''BN) = 1.$$

40. Umgekehrt, diese letzte Gleichung wird leicht bewiesen, mit Hülfe der bekannten und allgemeinen Relation zwischen Segmenten (32), wenn man sie auf irgend zwei Transversalen $A''B''C''$ und LMN, eines Dreiecks ABC anwendet. In der That, haben wir die beiden Gleichungen:

$$\frac{BA''}{A''C} \cdot \frac{CB''}{B''A} \cdot \frac{AC''}{C''B} = -1, \qquad \frac{BL}{LC} \cdot \frac{CM}{MA} \cdot \frac{AN}{NB} = -1;$$

dividirt man die erste derselben durch die letztere, so folgt die letzte Formel des vorigen Artikels. Wir hätten daher auf diesem Wege, ohne irgend welche Betrachtung eines variablen

Digitized by Google

Punktes P, dazu geführt werden können, drei Hülfs-Skalare, l, m, n, einzuführen, dadurch definirt, dass ihre Quotienten $\frac{n}{m}, \frac{l}{n}, \frac{m}{n}$ respective gleich sind, wie in 39, den drei Anharmonischen von Gruppen,

$$(BA''CL), \quad (CB''AM), \quad (AC''BN);$$

und dann würde es augenscheinlich gewesen sein, dass diese drei Skalare, l, m, n (oder irgend welche andere ihnen proportionale) genügen, die Lage der geraden Linie Λ, oder LMN, betrachtet als eine Transversale des gegebenen Dreiecks ABC, zu bestimmen: so dass sie naturgemäss, im Hinblick darauf, wie vorher, die anharmonischen Coordinaten dieser Linie hätten genannt werden können. Doch obwohl die anharmonischen Coordinaten eines Punktes und einer Linie so in unabhängiger Weise definirt werden können, so findet man doch, dass die geometrische Nützlichkeit solcher Definitionen hauptsächlich von ihrer Combination abhängt: oder von der Formel $lx + my + nz = 0$ in 37, die nach Belieben betrachtet werden kann, entweder als Ausdruck dafür, dass der variable Punkt (x, y, z) irgend wo auf der gegebenen geraden Linie $[l, m, n]$ liegt; oder dafür, dass die variable Linie $[l, m, n]$ in irgend einer Richtung, durch den gegebenen Punkt (x, y, z) geht.

41. Wenn Λ_1 und Λ_2 irgend zwei gerade Linien in der gegebenen Ebne sind,

$$\Lambda_1 = [l_1, m_1, n_1], \qquad \Lambda_2 = [l_2, m_2, n_2],$$

dann kann irgend eine dritte gerade Linie Λ in derselben Ebne, die durch den Durchschnittspunkt $\Lambda_1 \cdot \Lambda_2$ geht, oder (in anderen Worten), die mit ihnen zusammentrifft (in endlicher oder unendlicher Entfernung), dargestellt werden (vergl. 37) durch ein Symbol von der Form,

$$\Lambda = [tl_1 + ul_2, tm_1 + um_2, tn_1 + un_2];$$

in ihm sind t und u Skalar-Coefficienten. Oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn l, m, n die anharmonischen Coordinaten der Linie Λ sind, dann muss (vergl. wieder 37), der Gleichung

$$0 = l(m_1 n_2 - n_1 m_2) + \text{u. s. w.} = \begin{vmatrix} l, & m, & n \\ l_1, & m_1, & n_1 \\ l_2, & m_2, & n_2 \end{vmatrix},$$

genügt werden; denn, wenn (X, Y, Z) der angenommene den drei Linien gemeinsame Punkt ist, so müssen die drei Gleichungen:

$$l\,X + m\,Y + n\,Z = 0,$$
$$l_1 X + m_1 Y + n_1 Z = 0,$$
$$l_2 X + m_2 Y + n_2 Z = 0,$$

zugleich stattfinden. Umgekehrt, diese Coexistenz wird möglich sein, und die drei Linien werden einen gemeinsamen Punkt haben (der unendlich weit entfernt sein kann), wenn die vorige Bedingung des Zusammentreffens erfüllt ist. Zum Beispiel, da wir (in 38) gesehen haben, dass $[a, b, c]$ das Symbol der Linie in der Unendlichkeit ist (wenigstens wenn wir noch dieselben Bedeutungen der Skalare a, b, c beibehalten wie in den Artikeln 27, u. s. w.), so folgt, dass

$$\mathcal{A} = [l, m, n], \text{ und } \mathcal{A}' = [l + ua, m + ub, n + uc],$$

die Symbole zweier parallelen Linien sind; denn sie treffen im Unendlichen zusammen. Im Allgemeinen, führen alle Probleme über Durchschnitte von geraden Linien, Collineationen von Punkten, u. s. w., in der gegebenen Ebne, wenn sie mit dieser anharmonischen Methode behandelt werden, zu leichten Eliminationen zwischen linearen Gleichungen (von der Skalar-Art), bei denen wir uns hier nicht aufzuhalten brauchen: der Mechanismus solcher Rechnungen ist meistens derselbe wie in den bekannten Methoden trilinearer Coordinaten: obwohl (wie wir gesehen haben) die geometrische Deutung völlig verschieden ist.

Fünfter Abschnitt.

Ueber ebne geometrische Netze, (Fortsetzung).

42. Wenn wir jetzt, für einen Augenblick, die Betrachtung derjenigen ebenen geometrischen Netze wiederaufnehmen, die in Art. 34 erwähnt wurden; und übereinkommen diese Punkte und Linien, in der gegebenen Ebne, respective rationale Punkte und rationale Linien zu nennen, deren anharmonische Coordinaten gleich (oder proportional) ganzen Zahlen sind; weil dann die anharmonischen Quotienten, die im letzten Abschnitt discutirt wurden, rational sind; wenn wir dagegen sagen, dass ein

Digitized by Google

Punkt oder eine Linie irrational ist, oder dass er in irrationaler Beziehung zu dem gegebenen System von vier Anfangspunkten O, A, B, C, steht, wenn seine anharmonischen Coordinaten nicht alle gleich (oder proportional) ganzen Zahlen sind; so ist es klar, dass welche vier Punkte wir als Anfangspunkte annehmen mögen, und wie weit wir die Construction des Netzes treiben mögen, die Netzpunkte und Netzlinien, die so entstehen, alle rational sein werden, in dem eben jetzt definirten Sinne. In der That, beginnen wir mit solchen; die folgenden Eliminationen (41) können nachher niemals zu irgend welchen führen, die von der entgegengesetzten Art sind: die gerade Linie, die zwei rationale Punkte verbindet, ist immer eine rationale Linie; und der Durchschnittspunkt zweier rationalen Linien ist nothwendig ein rationaler Punkt. Die in Art. 34 gemachte Behauptung ist daher völlig gerechtfertigt.

43. Umgekehrt, jeder rationale Punkt der gegebenen Ebne, mit Rücksicht auf die vier angenommenen Anfangspunkte $OABC$, ist ein Punkt des Netzes, das diese vier Punkte bestimmen. Dies zu beweisen, ist es augenscheinlich genügend zu zeigen, dass jeder rationale Punkt $A_1 = (0, y, z)$, auf irgend einer Seite BC des gegebenen Dreiecks ABC, auf diese Weise construirt werden kann. Macht man, wie in Fig. 22,

$$B_1 = OA_1 \cdot CA, \text{ und } C_1 = OA_1 \cdot AB,$$

so haben wir (nach 35, 36) die Ausdrücke,

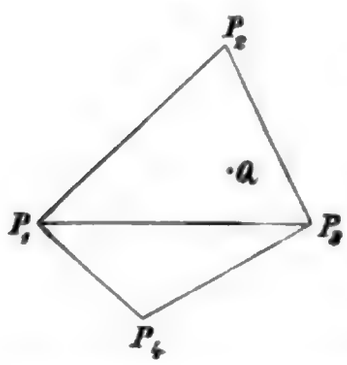
$$B_1 = (y, 0, y - z), \qquad C_1 = (z, z - y, 0);$$

aus ihnen ist leicht zu folgern (nach 36, 37), dass

$$C'B_1 \cdot BC = (0, y, z - y),$$

$$B'C_1 \cdot BC = (0, y - z, z);$$

Fig. 24.



und so können wir die lineare Construction des rationalen Punktes $(0, y, z)$, bei dem die beiden ganzen Zahlen y und z als Primzahlen zu einander angenommen werden können, darauf zurückführen, dass sie von derjenigen des Punktes $(0, 1, 1)$, abhängt, der schon als A' construirt worden ist. Es folgt ferner, dass obwohl kein irrationaler Punkt Q der Ebne

Digitized by Google

ein Netzpunkt sein kann, man doch jedem solchen Punkte unendlich nahe kommen kann, wenn man die lineare Construction fortsetzt; er kann daher in einer vierseitigen Masche $P_1P_2P_3P_4$, oder auch in einer dreiseitigen Masche $P_1P_2P_3$ eingeschlossen werden und diese Masche des Netzes kann man so klein machen als man will. Entsprechende Bemerkungen ergeben sich für irrationale Linien in der Ebne, die niemals mit Netz-Linien zusammenfallen, doch ihnen unendlich nahe liegen können.

44. Wenn P, P_1, P_2 irgend drei collineare Punkte des Netzes sind, so dass die Formeln von 37 anwendbar sind, und wenn P' irgend ein vierter Netzpunkt (x', y', z') auf derselben Linie ist, dann haben wir, wenn man schreibt:

$$x_1a + y_1b + z_1c = v_1, \qquad x_2a + y_2b + z_2c = v_2,$$

zwei Ausdrücke von den Formen:

$$\varrho = \frac{tv_1\varrho_1 + uv_2\varrho_2}{tv_1 + uv_2}, \qquad \varrho' = \frac{t'v_1\varrho_1 + u'v_2\varrho_2}{t'v_1 + u'v_2},$$

in denen die Coefficienten $tut'u'$ rational sind, denn die Coordinaten xyz, u. s. w., sind es, wie auch die Constanten abc sein mögen. Wir haben daher (nach 25) den folgenden rationalen Ausdruck für die Anharmonische dieser Netzgruppe:

$$(P_1PP_2P') = \frac{ut'}{tu'} = \frac{(yx_1 - xy_1)(y'x_2 - x'y_2)}{(xy_2 - yx_2)(x'y_1 - y'x_1)},$$

und ebenso für jede andere Gruppe derselben Art. Daher hat jede Gruppe von vier collinearen Netzpunkten, und folglich auch jedes Bündel von vier zusammenlaufenden Netzlinien, einen rationalen Werth für seine anharmonische Function; dieser Werth hängt nur von den bei der linearen Construction angewandten Processen ab, durch die man zu dieser Gruppe oder diesem Bündel kam, und ist ganz unabhängig von der Configuration oder der Anordnung der vier Anfangspunkte: denn die drei Anfangsconstanten, a, b, c, verschwinden aus dem resultirenden Ausdruck. So waren, in Fig. 21, die neun Büschel, welche die neun abgeleiteten Punkte $A' \ldots C''$ zu ihren Ausgangspunkten hatten, alle harmonische Büschel, in welcher Art auch die vier Punkte O, A, B, C angeordnet sein mochten. Im Allgemeinen kann man sagen, dass alle ebenen geometrischen Netze homographische Figuren sind;* und umgekehrt, können in irgend

* Vergl. die Géometrie Supérieure von Chasles, p. 362.

Digitized by Google

zwei solchen ebenen Figuren, entsprechende Punkte betrachtet werden als entweder zusammenfallend, oder wenigstens (nach 43) als unendlich nahe der Coincidenz mit ähnlich construirten Punkten zweier ebenen Netze: d. h. mit Punkten, deren anharmonische Coordinaten (36) in ihren respectiven Systemen gleich ganzen Zahlen sind.

45. Ohne hier auf eine allgemeine Theorie der Transformation anharmonischer Coordinaten einzugehn, können wir doch schon sehn, dass wenn wir irgend vier Netzpunkte O_1, A_1, B_1, C_1, von denen nicht drei collinear sind, auswählen, jeder andere Punkt P desselben Netzes in rationaler Beziehung (42) zu ihnen steht; denn (nach 44) sind die drei neuen Anharmonischen der Büschel, $(A_1 . B_1 O_1 C_1 P) = \frac{y_1}{z_1}$, u. s. w., rational: und daher sind die jetzigen Coordinaten x_1, y_1, z_1 des Punktes P (vergl. 36) sowohl, als seine alten Coordinaten xyz, gleich oder proportional ganzen Zahlen. Es folgt (nach 43), dass jeder Punkt P des Netzes linear construirt werden kann, wenn irgend vier solche Punkte gegeben sind; (von denen nicht drei collinear sind, wie oben); oder mit anderen Worten, dass das ganze Netz reconstruirt werden kann,* wenn irgend eins seiner Vierseite (sowie der Zwischenraum in Fig. 24) bekannt ist. Als ein Beispiel können wir annehmen, dass die vier Punkte $OA'B'C'$ in Fig. 21 gegeben sind, und dass gesucht wird von ihnen aus die drei Punkte ABC wiederzufinden, die vorher zu den gegebenen Daten der Construction gehörten. Zu diesem Zweck ist es nur nöthig, zuerst die drei Hülfspunkte A''', B''', C'''' zu

* Dieser Satz (45) von der möglichen Reconstruction eines ebenen Netzes, von irgend einem seiner Vierseite aus, und das Theorem (43) in Bezug auf die Möglichkeit der unendlichen Annäherung durch Netzlinien an die vorher erwähnten irrationalen Punkte (42), ohne diese Punkte durch irgend welche Processe linearer Construction von der hier betrachteten Art jemals erreichen zu können, sind schon aufgestellt worden, wenigstens ihrem Wesen nach, (obwohl durch eine völlig verschiedene Analysis begründet), in der an tiefen und originalen Gedanken reichen Abhandlung von Möbius, auf die ich mich in einer früheren Anmerkung bezogen habe. (Art. 34, p. 26). Vergleiche die Anmerkung über den barycentrischen Calcül; und die Bemerkungen in dem folgenden Kapitel über Netze im Raum.

bestimmen, als die Durchschnittspunkte $OA' \cdot B'C'$, u. s. w.; und dann die drei anderen Hülfspunkte A'', B'', C'' als $B'C' \cdot B'''C'''$, u. s. w.: dann setzen uns die Formeln, $A = B'B'' \cdot C'C'$, u. s. w., in den Stand, wie gewünscht wird, wieder zu den Punkten A, B, C, als Durchschnittspunkten bekannter gerader Linien zurückzukehren.

Sechster Abschnitt.

Ueber anharmonische Gleichungen und Vector-Ausdrücke, für Curven in einer gegebenen Ebne.

46. Wenn, in den Ausdrücken 34 oder 36 für einen variablen Vector $\varrho = OP$, die drei variablen Skalare (oder anharmonischen Coordinaten) x, y, z durch irgend eine algebraische Gleichung, z. B.

$$f_p\,(x, y, z) = 0,$$

die wir als rational und ganz und homogen vom p-ten Grade annehmen wollen, verbunden sind, dann ist der Ort des Endpunktes P (Art. 1) dieses Vectors eine ebene Curve p-ter Ordnung; denn (vergl. 37) sie wird in p Punkten (verschiedenen oder zusammenfallenden, und reelen oder imaginären) durch irgend eine gerade Linie, $lx + my + nz = 0$, in der gegebenen Ebne, geschnitten. Wenn wir z. B. schreiben:

$$\varrho = \frac{t^2 a\,\alpha + u^2 b\,\beta + v^2 c\,\gamma}{t^2 a + u^2 b + v^2 c},$$

wo t, u, v drei neue variable Skalare sind, von denen wir annehmen wollen, dass ihre Summe gleich null ist, und sie aus den vier Gleichungen:

$$x = t^2, y = u^2, z = v^2, t + u + v = 0,$$

eliminiren, so werden wir zu der folgenden Gleichung zweiten Grades geführt:

$$0 = f_p = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy;$$

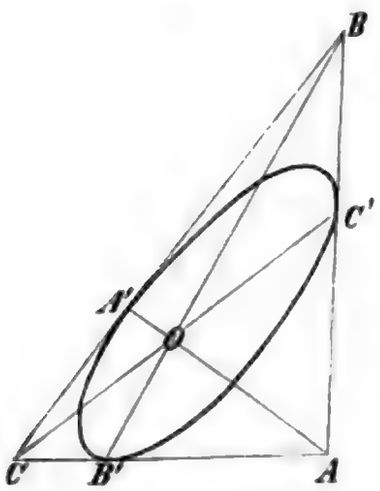
hier ist $p = 2$, und der Ort von P ist ein Kegelschnitt. In der That, ist es der Kegelschnitt, der die Seiten des gegebenen Dreiecks ABC in den vorher genannten Punkten A', B', C' berührt; denn wenn wir seine Durchschnittspunkte mit der Seite BC suchen, indem wir $x = 0$ setzen (38), so erhalten wir eine quadratische Gleichung mit gleichen Wurzeln, nämlich, $(y - z)^2 = 0$;

Digitized by Google

sie zeigt, dass es einen Berührungspunkt mit dieser Seite im Punkte (0, 1, 1), oder A' (36) giebt; und ähnliches gilt für die beiden anderen Seiten.

47. Wenn der Punkt O, in dem die drei geraden Linien AA', BB', CC' zusammentreffen, (wie in Fig. 18, u. s. w.) ein innerer Punkt des Dreiecks ABC ist, so werden die Seiten dieses Dreiecks alle im Innern berührt, in den Berührungspunkten A', B', C' mit dem Kegelschnitt; so dass in diesem Falle (nach 28) die Verhältnisse der Constanten a, b, c alle positiv sind, und der Nenner des vorigen Ausdrucks (46) für ϱ nicht verschwinden kann, für irgend welche reelen Werthe der variablen Skalare t, u, v; und folglich kann kein solcher Werth den Vector ϱ unendlich machen. Der Kegelschnitt ist daher im Allgemeinen in diesem Falle, wie in Fig. 25, eine eingeschriebene Ellipse; die indessen der eingeschriebene Kreis wird, wenn:

Fig. 25.



$$a^{-1} : b^{-1} : c^{-1} = s - a : s - b : s - c;$$

a, b, c bezeichnen hier die Längen der Seiten des Dreiecks und s ist ihre halbe Summe.

48. Aber wenn der Schnittpunkt O ein äusserer Punkt des Tangenten-Dreiecks ABC ist, so dass zwei seiner Seiten ausserhalb des Dreiecks berührt werden, dann sind zwei von den drei Verhältnissen der Abschnitte (28) negativ; und dann kann eine von den drei Constanten a, b, c als <0, und jede der beiden anderen als >0 angesehen werden.

Wenn wir also annehmen

$$b>0,\ c>0,\ a<0,\ a+b>0,\ a+c>0,$$

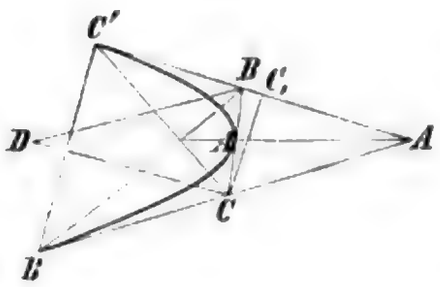
so wird A' ein Punkt auf der Seite BC selbst sein, aber die Punkte B', C', O werden auf den Verlängerungen der Linien AC, AB, AA' liegen, wie in Fig. 26; und dann ist der Kegelschnitt $A'B'C'$ eine Ellipse (mit Einschluss eines Kreises), oder

eine Parabel, oder eine Hyperbel, je nachdem die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$(a + c)\,t^2 + 2ctu + (b + c)\,u^2 = 0,$$

die man erhält, wenn man den Nenner (46) des Vectors ϱ gleich Null setzt, entweder, 1) imaginär; oder 2) reell und gleich; oder 3) reell und ungleich sind: d. h. je nachdem wir haben:

Fig. 26.



$$bc + ca + ab > 0, \text{ oder } = 0, \text{ oder } < 0;$$

oder (da das Produkt abc hier negativ ist), je nachdem:

$$a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} < 0, \text{ oder } = 0, \text{ oder } > 0.$$

Zum Beispiel, wenn der Kegelschnitt der Kreis ist, den man oft den umschriebenen Kreis genannt hat, so geben die bekannten Verhältnisse der Abschnitte die Proportion:

$$a^{-1} : b^{-1} : c^{-1} = -s : s-c : s-b;$$

und,

$$-s + s - c + s - b < 0.$$

49. Allgemeiner, wenn C_1 (wie in Fig. 26) ein Punkt auf der Seite AB, oder deren Verlängerung, ist, so dass CC_1 parallel der Sehne $B'C'$ ist, dann ist:

$$C_1C' : AC' = CB' : AB' = -a : c,$$

und:

$$AB : AC' = a + b : b;$$

schreibt man dann die Bedingung (48) der Ellipticität (oder der Kreisform) unter der Form: $\frac{-a}{c} < \frac{a+b}{b}$, so sehen wir, dass der Kegelschnitt eine Ellipse, Parabel, oder Hyperbel ist, je nachdem $C_1C' <$ oder $=$ oder $> AB$ ist; die Anordnung ist hierbei wieder, in anderen Beziehungen, wie sie in Fig. 26 dargestellt ist. Oder, um dieselbe Sache mehr symmetrisch auszudrücken, wenn wir das Parallelogramm $CABD$ vervollständigen, dann ist, je nachdem der Punkt D, 1) jenseits der Sehne $B'C'$, in Beziehung auf den Punkt A; oder 2) auf diese Sehne; oder 3) in das Dreieck $AB'C'$ fällt, wenn die allgemeine Anordnung

Digitized by Google

derselben Figur beibehalten wird, die Curve elliptisch, oder parabolisch, oder hyperbolisch. In der anderen Anordnung oder Configuration, die dem System von Ungleichheiten $b>0$, $c>0$, $a+b+c<0$, entspricht, liegt der Punkt A' noch auf der Seite BC selbst, aber O liegt auf der Verlängerung von $A'A$ über A hinaus; und dann zeigt die Ungleichheit:

$$a(b+c)+bc<-(b^2+bc+c^2)<0,$$

dass der Kegelschnitt nothwendiger Weise eine Hyperbel ist; daraus ist leicht zu sehn, dass ein Zweig von der Seite BC in A' berührt wird, während der andere Zweig in B' und C' von den über A hinaus verlängerten Seiten CA und BA berührt wird. Die Curve ist also hyperbolisch, wenn entweder $a+b$ oder $a+c$ negativ sind, während a und b positiv sind, wie vorher.

50. Wenn die quadratische Gleichung (48) reelle und ungleiche Wurzeln hat, so dass der Kegelschnitt eine Hyperbel ist, dann können die Richtungen der Asymptoten gefunden werden, indem man diese Wurzeln, oder die ihnen entsprechenden Werthe von t, u, v (oder irgend welche ihnen proportionale Skalare) in den Zähler des Ausdrucks (46) für ρ setzt; und ebenso können wir die Richtung der Achse der Parabel finden, in dem Falle, dass die Wurzeln reell und gleich sind: denn wir werden so die Richtungen, oder die Richtung, erhalten, in der eine gerade Linie OP von O aus gezogen werden muss, so, dass sie den Kegelschnitt im Unendlichen schneidet. Und dieselben Bedingungen wie vorher, zur Unterscheidung der Arten des Kegelschnitts, können in anderer Weise erhalten werden, wenn man die anharmonische Gleichung, $f=0$ (46), dieses Kegelschnitts mit der entsprechenden Gleichung $ax+by+cz=0$ (38) der Linie in der Unendlichkeit combinirt; um so zu erörtern, (nach bekannten Sätzen der neueren Geometrie), ob diese Linie die Curve in zwei imaginären Punkten trifft, oder sie berührt, oder sie schneidet in Punkten, die (obwohl unendlich entfernt) doch hier als reell zu betrachten sind.

51. Im Allgemeinen, wenn $f(x, y, z)=0$ die anharmonische Gleichung (46) irgend einer ebenen Curve ist, betrachtet als

der Ort eines variablen Punktes P; und wenn das Differential* dieser Gleichung in folgender Weise bezeichnet wird:

$$0 = df(x, y, z) = Xdx + Ydy + Zdz;$$

dann haben wir, in Folge der vorausgesetzten Homogenität (46) der Function f, die Beziehung:

$$Xx + Yy + Zz = 0,$$

und wir werden auch diese zweite und analoge Beziehung haben:

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0,$$

wenn:

$$x' - x : y' - y : z' - z = dx : dy : dz;$$

d. h. (nach den Sätzen des Art. 37), wenn $P' = (x', y', z')$ irgend ein Punkt auf der Tangente der Curve ist, die an den Punkt $P = (x, y, z)$ gezogen ist und als die Grenze der Secante betrachtet wird. Das Zeichen (37) dieser Tangente in P kann daher so geschrieben werden:

$$[X, Y, Z], \text{ oder } [D_x f, D_y f, D_z f];$$

wo D_x, D_y, D_z die bekannten Bezeichnungen für die partiellen Ableitungen sind.

52. Zum Beispiel, wenn f die in 46 angegebene Form hat, die dem eben betrachteten Kegelschnitt entspricht, so haben wir $D_x f = 2(x - y - z)$, u. s. w.; danach kann die Tangente in irgend einem Punkte (x, y, z) dieser Curve durch das Symbol bezeichnet werden:

$$[x - y - z,\ y - z - x,\ z - x - y];$$

in dem, wie gewöhnlich, die Coordinaten der Linie durch irgend andere ersetzt werden können, die ihnen proportional sind. So ist im Punkte A, oder (nach 36) in $(0, 1, 1)$, der (nach der Form von f) augenscheinlich ein Punkt der Curve ist, die Tangente die Linie $[-2, 0, 0]$, oder $[1, 0, 0]$; d. h. (nach 38), die Seite BC des gegebenen Dreiecks, wie es auch schon in anderer Weise vorher gefunden worden ist (46). Und im Allgemeinen

* In der Theorie der Quaternionen, die zu unterscheiden ist von der der Vectoren (obwohl sie sie einschliesst), werden wir für nöthig finden, eine neue Definition der Differentiale einzuführen, wegen der Eigenschaft der Multiplication von Quaternionen nicht umkehrbar zu sein; doch, für den gegenwärtigen Zweck, sind die üblichen Bedeutungen der Zeichen d und D ausreichend.

Digitized by Google

ist es leicht zu sehn, dass das vorige Symbol die gerade Linie bezeichnet, die (in einem wohlbekannten Sinne) die Polare des Punktes (x, y, z) ist, in Beziehung auf den gegebenen Kegelschnitt; oder dass die Linie $[X', Y', Z']$ die Polare des Punktes (x', y', z') ist; denn die Gleichung:

$$Xx' + Yy' + Zz' = 0,$$

die für einen Kegelschnitt auch $X'x + Y'y + Z'z = 0$, geschrieben werden kann, drückt (nach 51) die nothwendige Bedingung aus, dass ein Punkt (x, y, z) der Curve * zu der Tangente gehört, die durch den Punkt (x', y', z') geht. Umgekehrt, ist der Punkt (x, y, z) (in demselben wohlbekannten Sinne) der Pol der Linie $[X, Y, Z]$; so dass der Mittelpunkt des Kegelschnitts, der (nach bekannten Sätzen) der Pol der Linie in der Unendlichkeit ist (38), der Punkt ist, für den die Bedingungen:

$$a^{-1}X = b^{-1}Y = c^{-1}Z$$

erfüllt sind; er ist daher, für den gegenwärtig betrachteten Kegelschnitt, der Punkt:

$$K = (b + c, c + a, a + b),$$

dessen Vector OK mit Hülfe der linearen Gleichung, $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$, (27) leicht auf die Form:

$$\varkappa = -\frac{a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma}{2(bc + ca + ab)},$$

gebracht werden kann; man kann verificiren, dass der Nenner verschwindet, nach 48, wenn der Kegelschnitt eine Parabel ist. In dem allgemeineren Falle, wenn dieser Nenner von Null verschieden ist, kann man zeigen, dass jede Sehne der Curve, die durch das Ende K des Vectors $\varkappa$ gezogen wird, in dem Punkte K halbirt wird: auf diesem Wege würde sich dieser Punkt daher ebenfalls als Mittelpunkt erweisen.

53. Statt des eingeschriebenen Kegelschnittes (46), der der Gegenstand der letzten Artikel gewesen ist, können wir, als ein weiteres Beispiel, den umschriebenen Kegelschnitt be-

* Wenn die Curve $f = 0$ von einem höheren als dem zweiten Grade wäre, dann würden die beiden Gleichungen, die wir vorher hingeschrieben haben, das darstellen, was man die erste Polare, und die letzte oder die Linien-Polare, des Punktes (x', y', z'), mit Rücksicht auf die gegebene Curve, genannt hat.

trachten, der durch die drei Ecken A, B, C des gegebenen Dreiecks geht, und der die Linien AA'', BB'', CC'' der Fig. 21 berührt. Die anharmonische Gleichung dieses neuen Kegelschnittes ist, wie leicht zu sehn:

$$yz + zx + xy = 0;$$

der Vector des variablen Punktes P der Curve kann daher in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\varrho = \frac{t^{-1}a\alpha + u^{-1}b\beta + v^{-1}c\gamma}{t^{-1}a + u^{-1}b + v^{-1}c},$$

mit der Bedingung $t + u + v = 0$, wie vorher. Für den Vector seines Mittelpunktes K' findet man:

$$\varkappa' = \frac{2(a^3\alpha + b^3\beta + c^3\gamma)}{a^3 + b^3 + c^3 - 2bc - 2ca - 2ab};$$

und er ist eine Ellipse, eine Parabel, oder eine Hyperbel, je nachdem der Nenner dieses letzten Ausdruckes negativ, oder null, oder positiv ist. Und da die beiden letzten Vectoren $\varkappa, \varkappa'$ das Verhältniss von Skalaren zu einander haben, so folgt (nach 19), dass die drei Punkte O, K, K' collinear sind; oder mit anderen Worten, dass die Mittelpunktslinie KK', der beiden hier betrachteten Kegelschnitte, durch den Schnittpunkt O der drei Linien AA', BB', CC' geht. Allgemeiner, wenn L der Pol irgend einer gegebenen geraden Linie $\mathcal{A} = [l, m, n]$ (37), in Beziehung auf den eingeschriebenen Kegelschnitt (46), ist und $\mathcal{A}'$ der Pol derselben Linie $\mathcal{A}$ mit Beziehung auf den umschriebenen Kegelschnitt des gegenwärtigen Artikels, so kann man zeigen, dass die Vectoren OL, OL', oder λ, λ', der beiden Pole von der Form sind:

$$\lambda = k(la\alpha + mb\beta + nc\gamma),$$
$$\lambda' = k'(la\alpha + mb\beta + nc\gamma),$$

wo k und k' Skalare sind; die drei Punkte O, L, L' liegen daher auf einer geraden Linie.

54. Als Beispiel für den Vector-Ausdruck einer Curve von höherem als dem zweiten Grade wollen wir den folgenden nehmen:

$$OP = \varrho = \frac{t^3a\alpha + u^3b\beta + v^3c\gamma}{t^3a + u^3b + v^3c};$$

wo $t + u + v = 0$, wie vorher. Macht man $x = t^3, y = u^3, z = v^3$,

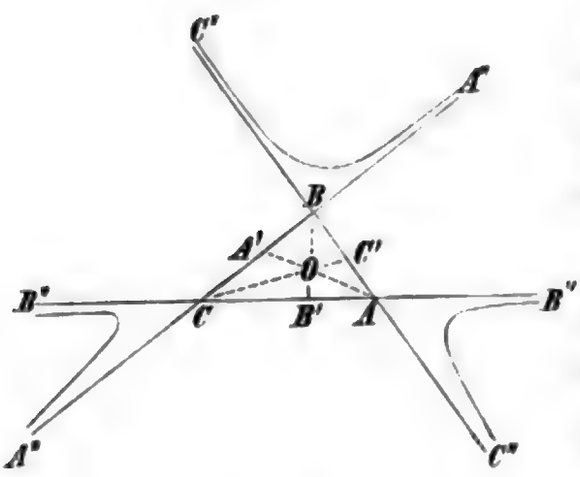
Digitized by Google

so finden wir durch Elimination von t, u, v die anharmonische Gleichung:

$$(x + y + z)^3 - 27xyz = 0;$$

der Ort des Punktes P ist daher, in diesem Beispiel, eine Curve dritter Ordnung, oder kurz ausgedrückt eine cubische Curve. Die Art (41) des Rechnens mit anharmonischen Coordinaten ist so völlig dieselbe, wie die der bekannten Coordinatenmethode, dass es genügen mag hier kurz zu bemerken, dass die Seiten des gegebenen Dreiecks ABC die drei (reelen) Tangenten der Wendepunkte sind; die Wendepunkte sind diejenigen, welche mit A', B'', C'' in Fig. 21 bezeichnet sind; und der Anfangspunkt der Vectoren O ist ein conjugirter Punkt.* Wenn $a = b = c$, ein Fall, in welchem (nach 29) der Anfangspunkt O (wie in Fig. 19) der Mittelpunkt des Dreiecks wird, so ist die Sehne der Wendepunkte $A''B''C''$ die Linie in der Unendlichkeit und die Curve nimmt die in Fig. 27 dargestellte Form an; sie hat drei unendliche Zweige, die in den Winkeln liegen, die Scheitelwinkel zu denen des Dreiecks ABC sind; die Seiten des Dreiecks sind die drei gegebenen Asymptoten.

Fig. 27.



55. Es würde hier nicht der Ort sein, in irgend welche Einzelheiten der Discussion solcher cubischer Curven einzugehen, zu ihrem Studium mag sich der Leser naturgemäss anderen Werken zuwenden.** Doch es mag kurz bemerkt werden, dass, da die allgemeine cubische Curve, in der vorligenden Behand-

* Er entspricht den Werthen $t = 1, u = \theta, v = \theta^2$, wo θ eine der imaginairen Cubikwurzeln der Einheit ist; diese Werthe von t, u, v geben $x = y = z$, und $\varrho = 0$.

** Besonders das ausgezeichnete Werk über höhere ebne Curven von Georg Salmon, *F. T. C. D.*, u. s. w. Dublin 1852.

lung, durch Combination des allgemeinen Ausdrucks der Art. 34 oder 36 für den Vector ϱ, mit der Skalar-Gleichung:

$$s^3 = 27kxyz, \text{ wo } s = x + y + z,$$

dargestellt werden kann; wenn k eine willkürliche Constante bedeutet, die gleich der Einheit wird, wenn der Anfangspunkt (wie in 54) ein conjugirter Punkt ist; es folgt, dass, wenn $P = (x, y, z)$ und $P' = (x', y', z')$ irgend zwei Punkte der Curve sind, und wir $s' = x' + y' + z'$ machen, die Relation folgt:

$$xyzs'^3 = x'y'z's^3,$$

oder:

$$\frac{xs'}{sx'} \cdot \frac{ys'}{sy'} \cdot \frac{zs'}{sz'} = 1;$$

in ihr ist nicht schwierig zu beweisen, dass:

$$\frac{xs'}{sx'} = (A''.PB\,P'B'),$$
$$\frac{ys'}{sy'} = (B''.PC\,P'C'),$$
$$\frac{zs'}{sz'} = (C''.PA\,P'A''),$$

ist; die Bezeichnung (35) für anharmonische Büschel ist hier beibehalten. Wir erhalten so den folgenden Satz: „Wenn die Seiten eines gegebenen ebenen* Dreiecks ABC (wie in Fig. 21) durch irgend eine gegebene geradlinige Transversale $A''B''C''$ geschnitten werden, und wenn irgend zwei Punkte P und P' in seiner Ebne die Eigenschaft haben, dass für sie die anharmonische Relation gilt:

$$(A''.PB\,P'B').(B''.PC\,P'C').(C''.PA\,P'A') = 1,$$

dann liegen die beiden Punkte P, P' auf einer beiden gemeinsamen cubischen Curve, die die drei collinearen Punkte A'', B'', C'' zu ihren drei reellen Wendepunkten und die Seiten BC, CA, AB des Dreiecks zu ihren drei Tangenten in diesen Punkten hat.“ Dieses Resultat scheint eine neue geometrische Erzeugung für Curven dritter Ordnung darzubieten.

56. Wie auch die Ordnung einer ebenen Curve sein mag, oder was auch immer der Grad p der Function f in 46, wir

* Dieser Satz kann ohne irgend welche erhebliche Veränderung von ebene auf sphärische Curven dritter Ordnung ausgedehnt werden.

sahen in 51, dass die Tangente zur Curve in irgend einem Punkte $P = (x, y, z)$ die gerade Linie

$$A = [l, m, n],$$

ist, wenn

$$l = D_x f,\ m = D_y f,\ n = D_z f;$$

diese Ausdrücke ergeben, bei der angenommenen Homogenität von f, die Relation, $lx + my + nz = 0$, und befähigen uns daher, das System der folgenden beiden Differentialgleichungen aufzustellen:

$$l\,dx + m\,dy + n\,dz = 0,$$
$$x\,dl + y\,dm + z\,dn = 0.$$

Wenn wir dann, durch Elimination der Verhältnisse von x, y, z, zu einer neuen homogenen Gleichung kommen von der Form:

$$0 = F(D_x f,\ D_y f,\ D_z f),$$

die für alle Werthe von x, y, z gilt, welche die Function $f = 0$ machen, (obwohl es nöthig sein kann Factoren, die durch diese Elimination eingeführt worden sind, fortzuschaffen), so erhalten wir die Gleichung:

$$F(l, m, n) = 0,$$

als eine Bedingung, die durch die Tangente A der Curve erfüllt sein muss, in allen Lagen, die diese gerade Linie einnehmen kann. Und, wenn wir die beiden Differentialgleichungen:

$$d_F(l, m, n) = 0, \qquad x\,dl + y\,dm + z\,dn = 0,$$

vergleichen, so sehn wir, dass wir die Proportion schreiben können:

$$x : y : z = D_l F : D_m F : D_n F,$$

und das Symbol:

$$P = (D_l F,\ D_m F,\ D_n F),$$

wenn (x, y, z), wie vorher, der Berührungspunkt P der variablen Linie $[l, m, n]$ in irgend einer ihrer Lagen, mit der Curve ist, die sie einhüllt. Wir können daher übergehn (oder zurückkehren) von der Tangential-Gleichung $F = 0$, einer Curve, wenn man sie auffasst als die Enveloppe einer geraden Linie A, zu der Punkt-Gleichung $f = 0$, derselben Curve, wenn wir sie (wie in 46) als den Ort eines Punktes P auffassen. Wenn wir daher, durch Elimination der Verhältnisse von l, m, n, eine Gleichung von der Form:

$$0 = f(D_l F,\ D_m F,\ D_n F),$$

Digitized by Google

erhalten, (die, wenn nöthig, von fremden Factoren befreit worden ist) als eine Folgerung aus der homogenen Gleichung $F = 0$, so haben wir nur für diese partiellen Differentialquotienten, $D_\iota F$, u. s. w., die anharmonischen Coordinaten x, y, z einzusetzen, denen sie proportional sind. Uud wenn die Functionen f und F nicht nur homogen sind, (wie wir sie stets annehmen wollen), sondern auch rational und ganz, (eine Annahme, die es mitunter passend ist, nicht zu machen), dann ist, weil der Grad der Function f, oder der Punkt-Gleichung, wie vorher, die Ordnung der Curve bezeichnet, leicht zu sehn, dass der Grad der anderen homogenen Funktion F, oder der Tangentialgleichung, in dieser anharmonischen Methode (wie nach Analogie mit anderen und älteren Methoden erwartet werden konnte) die Klasse der Curve bezeichnet, zu der die Gleichung gehört, oder die Anzahl der Tangenten, (verschieden oder zusammenfallend, und reell oder imaginär), die an die Curve, von irgend einem willkürlichen Punkte in ihrer Ebne gezogen werden können.

57. Zum Beispiel (vergl. 52), wenn wir x, y, z aus den Gleichungen:

$$l = x - y - z,$$
$$m = y - z - x,$$
$$n = z - x - y,$$
$$lx + my + nz = 0,$$

eliminiren, in denen l, m, n die Coordinaten der Tangente des eingeschriebenen Kegelschnitts des Art. 46 sind, so werden wir zur folgenden Tangentialgleichung dieses Kegelschnitts, oder dieser Curve zweiter Klasse geführt:

$$F(l, m, n) = mn + nl + lm = 0;$$

und wir können verificiren, dass die Seiten $[1, 0, 0]$, u. s. w. (38), des Dreiecks ABC zu den Linien gehören, die dieser Gleichung genügen. Umgekehrt, wenn diese Tangentialgleichung gegeben wäre, so könnten wir aus ihr (nach 56) Ausdrücke für die Coordinaten des Berührungspunktes x, y, z ableiten, nämlich:

$$x = D_\iota F = m + n, \quad y = n + l, \quad z = l + m;$$

wir können verificiren, dass die Seite $[1, 0, 0]$ den Kegelschnitt, den wir jetzt als eine Enveloppe betrachten, im Punkte $(0, 1, 1)$, oder A', berührt, wie vorher; und dann würden wir, durch Eli-

Digitized by Google

mination von l, m, n, wieder auf die Punktgleichung, $f=0$, von 46 zurückkommen. Ebenso können wir, aus der Punktgleichung $f = yz + zx + xy = 0$ des umschriebenen Kegelschnitts (53), durch Differentiation die Tangential-Coordinaten* ableiten:

$$l = D_x f = y + z, \quad m = z + x, \quad n = x + y,$$

und so durch Elimination die Tangentialgleichung erhalten, nämlich:

$$F(l, m, n) = l^2 + m^2 + n^2 - 2mn - 2nl - 2lm = 0;$$

aus der wir rückwärts die Punktgleichung ableiten könnten. Und die so einfache Formel (vergl. 40)

$$lx + my + nz = 0,$$

die wir so oft Gelegenheit hatten anzuwenden, und die zwei Arten anharmonischer Coordinaten verbindet, kann nicht nur (wie in 37) als die Punktgleichung einer gegebenen geraden Linie A betrachtet werden, auf der sich ein Punkt P bewegt, sondern auch als die Tangentialgleichung eines gegebenen Punktes, um welchen sich eine gerade Linie dreht, je nachdem wir l, m, n oder x, y, z als gegeben ansehn. So kann, während die gerade Linie $A''B''C''$, oder [1, 1, 1] der Fig. 21 in 38 durch die Gleichung $x + y + z = 0$ dargestellt wurde, der Punkt O derselben Figur, oder der Punkt (1, 1, 1) durch die analoge Gleichung,

$$l + m + n = 0,$$

dargestellt werden; denn die Coordinaten l, m, n jeder Linie, die durch den Punkt O geht, müssen dieser Gleichung ersten Grades genügen. Als ein Beispiel dafür kann man in demselben Art. 38 die Linien OA, OB, OC ansehn.

58. Um ein oder zwei Beispiele für den Gebrauch von Formen zu geben, die, obwohl homogen, doch nicht rational und ganz sind (56), können wir die Punktgleichung des eingeschriebenen Kegelschnitts (46) folgendermassen schreiben:

$$x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}} + 0;$$

* Die Benennung „Tangentialcoordinate" scheint zuerst von Dr. Booth in einer im Jahre 1840 veröffentlichten Abhandlung eingeführt worden zu sein, auf die wir hier nicht näher eingehn können; doch das System des Dr. Booth war ganz verschieden von dem hier mitgetheilten. Siehe den Hinweis in Salmon's Höhere ebene Curven, in der Anmerkung zu Seite 16.

und dann sind (wenn wir den gemeinsamen numerischen Factor $\frac{1}{4}$ weglassen) die partiellen Ableitungen

$$l = x^{-\frac{1}{2}}, \quad m = y^{-\frac{1}{2}}, \quad n = z^{-\frac{1}{2}};$$

so dass eine Form der Tangentialgleichung dieses Kegelschnitts

$$l^{-1} + m^{-1} + n^{-1} = 0,$$

ist; sie stimmt offenbar, wenn die Brüche fortgeschafft werden, mit der ersten Form des letzten Artikels überein. Wir können verificiren (48), dass $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = 0$ ist, wenn die Curve eine Parabel ist; d. h., wenn sie berührt wird (50) durch die Linie in der Unendlichkeit (38). Für den umschriebenen Kegelschnitt (53) können wir die Punktgleichung so schreiben:

$$x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = 0;$$

wonach man auch schreiben kann:

$$l = x^{-2}, \quad m = y^{-2}, \quad n = z^{-2},$$

und

$$l^{\frac{1}{2}} + m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}} = 0;$$

und diese Form der Tangentialgleichung stimmt, wenn die Wurzeln fortgeschafft werden, wieder mit 57 über. Und es ist augenscheinlich, dass wir mit gleicher Leichtigkeit von diesen Tangentialgleichungen zu den Punktgleichungen zurückkehren könnten.

59. Für die kubische Curve mit einem conjugirten Punkt (54), kann die Punktgleichung so geschrieben werden,*

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 0;$$

wir können daher für ihre Tangentialcoordinaten die Ausdrücke:

$$l = x^{-\frac{2}{3}}, \quad m = y^{-\frac{2}{3}}, \quad n = z^{-\frac{2}{3}},$$

setzen und wir finden so als eine Form ihrer Tangentialgleichung:

$$l^{-\frac{1}{2}} + m^{-\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}} = 0.$$

Umgekehrt, wenn diese Tangentialgleichung gegeben wäre, könnten wir zu der Punktgleichung zurückkehren, indem wir setzten:

$$x = l^{-\frac{1}{2}}, \quad y = m^{-\frac{1}{2}}, \quad z = n^{-\frac{1}{2}};$$

daraus würde sich, $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} + z^{\frac{1}{3}} = 0$, ergeben, wie vorher.

* Vergleiche Salmon's Höhere ebne Curven, Seite 172.

Digitized by Google

Die soeben gefundene Tangentialgleichung wird, wenn wir die Wurzeln fortschaffen:

$$0 = l^{-2} + m^{-2} + n^{-2} - 2m^{-1}n^{-1} - 2n^{-1}l^{-1} - 2l^{-1}m^{-1};$$

oder, wenn auch die Brüche fortgeschafft werden:

$$0 = F = m^2n^2 + n^2l^2 + l^2m^2 - 2nl^2m - 2lm^2n - 2mn^2l;$$

ihre biquadratische Form zeigt (nach 56), dass die kubische Curve eine Curve vierter Klasse ist, wie das auch schon bekannt ist. Der Charakter des Wendepunktes (54), den die Punkte A'', B'', C'', auf dieser Curve haben, zeigt sich hier durch den Umstand, dass wenn wir $m - n = 0$ machen, um die vier Tangenten von $A'' = (0, 1, -1)$ (36) zu finden, die resultirende biquadratische Gleichung, $0 = m^4 - 4lm^3$, drei gleiche Wurzeln hat; so dass die Linie $[1, 0, 0]$, oder die Seite BC, dreifach zählt und daher eine Tangente eines Wendepunktes ist; die vierte Tangente von A'' ist die Linie $[1, 4, 4]$, welche die kubische Curve im Punkt $(-8, 1, 1)$ berührt.

60. Im Allgemeinen können die beiden Gleichungen (56):

$$n D_x f - l D_z f = 0, \quad n D_y f - m D_z f = 0,$$

als der Ausdruck betrachtet werden, dass die homogene Gleichung:

$$f(nx, ny, -lx - my) = 0,$$

die man erhält, wenn man z mit Hülfe der Relation $lx + my + nz = 0$, aus $f(x, y, z) = 0$, eliminirt, und die wir mit $\varphi(x, y) = 0$, bezeichnen können, zwei gleiche Wurzeln $x : y$ hat, wenn l, m, n wieder die Coordinaten einer Tangente der Curve f sind; diese Gleichheit entspricht offenbar der Coincidenz zweier Durchschnittspunkte dieser Linie mit der Curve. Umgekehrt, wenn wir nach den üblichen Methoden die Bedingung der Gleichheit zweier Wurzeln $x : y$ der homogenen Gleichung p^{ten} Grades:

$$0 = \varphi(x, y) = f(nx, ny, -lx - my),$$

suchen, indem wir das Verhältniss $x : y$ zwischen den beiden abgeleiteten homogenen Gleichungen,

$$0 = D_x \varphi, \qquad 0 = D_y \varphi,$$

eliminiren, so werden wir im allgemeinen zu einer resultirenden Gleichung von der Dimension $2p(p-1)$ in l, m, n, geführt werden, die die Form hat:

$$0 = n^{p(p-1)} F(l, m, n);$$

und so erhalten wir, nach Fortlassung des durch diese Elimination* eingeführten fremden Factors $n^{p(p-1)}$, die Tangentialgleichung $F=0$, die im Allgemeinen von dem $p(p-1)^{\text{ten}}$ Grade sein wird; dies ist auch im Allgemeinen die bekannte Klasse (56) der Curve, deren Ordnung (46) mit p bezeichnet wird und wir haben folglich auch rückwärts eine ähnliche Art des Ueberganges von einer Tangential- zu einer Punktgleichung,

61. Zum Beispiel, wenn die Function f die in 54 angegebene kubische Form hat, so werden wir darauf geführt, die Bedingung für die Existenz zweier gleichen Wurzeln in der kubischen Gleichung:

$$0 = \varphi(x,y) = \{(n-l)x + (m-l)y\}^3 + 27n^2xy(lx+my),$$

zu suchen, wenn wir $x:y$ aus zwei abgeleiteten und quadratischen Gleichungen eliminiren; das Resultat ergiebt sich, im ersten Augenblick, von der zwölften Dimension in den Tangential-Coordinaten l, m, n; doch man findet, dass es durch n^6 theilbar ist, und wenn diese Division ausgeführt wird, wird es auf den sechsten Grad reducirt und es ergiebt sich so, dass die Curve von der sechsten Klasse ist, wie es von der allgemeinen kubischen Curve in der That bekannt ist. In dem gegenwärtigen Falle ist indess eine weitere Reduction möglich, wegen des conjugirten Punktes O (54), der den quadratischen Factor (vergl. 57):

$$(l+m+n)^2 = 0,$$

einführt; wenn dieser Factor beseitigt ist, so findet man, dass die Tangentialgleichung auf die schon in 59 angegebene biquadratische Form** reducirt wird. Die zuletzt ausgeführte

---

* Vergleiche die in Salmon's Höheren ebnen Curven, Seite 98, angewandte Methode, die Gleichung der reciproken einer gegebenen Curve zu finden, mit Rücksicht auf den imaginären Kegel, $x^2+y^2+z^2=0$. Im Allgemeinen sind $F(xyz)=0$, und $f(xyz)=0$, die Gleichungen zweier reciproken Curven, wenn die Function F wie vorher aus f abgeleitet wird.

** Wenn wir die Form $F=0$ (59) mit z^2 multipliciren, und dann nz in $-lx-my$ verwandeln, so erhalten wir eine biquadratische Gleichung in $l:m$, nämlich,

$$0 = \psi(l,m) = (l-m)^2(lx+my)^2 + 2lm(l+m)(lx+my)z + l^2m^2z^2;$$

und wenn wir dann $l:m$ aus den beiden abgeleiteten kubischen Gleichun-

Digitized by Google

algebraische Division entspricht der bekannten geometrischen Depression einer kubischen Curve mit einem Doppelpunkt, von der sechsten zur vierten Klasse. Doch es ist Zeit diesen Abschnitt über ebne Curven zu schliessen, und zur Betrachtung und Vergleichung der Vectoren von Punkten im Raume überzugehn, wie wir es im nächsten Kapitel thun wollen.

Kapitel III.

Anwendungen auf Vectoren im Raume.

Erster Abschnitt.

Ueber lineare Gleichungen zwischen nicht complanaren Vectoren.

62. Wenn drei gegebene und wirkliche Vectoren OA, OB, OC, oder α, β, γ, nicht in ein und derselben Ebne liegen und wenn die drei Skalaren a, b, c nicht alle verschwinden, dann kann (nach 21, 22) der Ausdruck $a\alpha + b\beta + c\gamma$ nicht gleich Null werden; er muss daher irgend einen wirklichen Vector (1) darstellen, den wir, der symmetrischen Bezeichnung wegen, mit dem Symbol $-d\delta$ bezeichnen können, wo der neue (wirkliche) Vector δ, oder OD, nicht in einer der drei gegebenen und verschiedenen Ebnen, BOC, COA, AOB, liegt, wenigstens solange nicht einer der drei gegebenen Coefficienten a, b, c verschwindet; der neue Skalar, d, ist entweder grösser oder kleiner

gen, $0 = D_\iota \psi$, $0 = D_\infty \psi$, eliminiren, so werden wir zu folgender Gleichung zwölften Grades geführt, $0 = x^3y^3z^3f(x, y, z)$, in der f dieselbe kubische Form hat wie in 54. Wir werden daher wieder zurückgeführt (vergl. 59) von der Tangential- zu der Punktgleichung der kubischen Curve (54); die, indessen, wie wir sehn, mit dem Factor $x^3y^3z^3$ behaftet ist. Er entspricht dem System dreier reellen Tangenten der Wendepunkte der Curve, wenn man jede Tangente dreimal rechnet. Der Grund, warum wir hier nicht gezwungen sind, auch den fremden Factor, z^{12}, fortzuschaffen, wie nach der allgemeinen Theorie hätte erwartet werden können (60), ist der, dass wir die biquadratische Function F nur mit z^3, und nicht mit z^4 multiplicirten.)

Digitized by Go

als Null. Wir erhalten so eine lineare Gleichung zwischen vier Vectoren:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0;$$

aus ihr ergiebt sich:

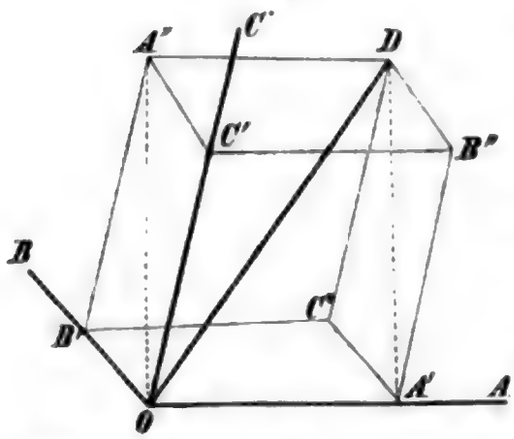
$$\delta = \frac{-a\alpha}{d} + \frac{-b\beta}{d} + \frac{-c\gamma}{d},$$

oder

$$OD = OA' + OB' + OC';$$

wo OA', OB', OC' oder $\frac{-a\alpha}{d}, \frac{-b\beta}{d}, \frac{-c\gamma}{d}$ die Vectoren der drei Punkte A', B', C' sind, auf welche der Punkt D auf die drei gegebenen Linien OA, OB, OC, durch Ebenen projicirt wird, die parallel zu den drei gegebenen Ebnen, BOC, u. s. w. sind; sie sind daher die drei coinitialen Ecken eines Paralleleepipeds, während die Summe, OD oder δ, die innere und mit ihnen coinitiale Diagonale (vergl. 6) ist. Oder wir können D auf die drei Ebnen projiciren, durch die Linien DA'', DB'', DC'' parallel zu den drei gegebenen Linien und dann haben wir:

Fig. 28.



$$OA'' = OB' + OC' = \frac{b\beta + c\gamma}{-d}, \text{ u. s. w.,}$$

und

$$\delta = OD = OA' + OA'' = OB' + OB'' = OC' + OC''.$$

Und es ist einleuchtend, dass sich diese Construction auf irgend einen fünften Punkt D im Raume anwenden lässt, wenn die vier Punkte $OABC$ wieder als gegeben und nicht complanar angenommen werden; und dass ferner, wenigstens eins der drei Verhältnisse der vier Skalare a, b, c, d (wo der letztere Buchstabe hier nicht als Zeichen der Differentiation gebraucht ist) mit der Lage des Punktes D, oder mit dem Werthe seines Vectors δ variiren muss. Zum Beispiel, es ist $a = 0$, wenn D in der Ebne BOC liegt; und ähnlich für die beiden anderen gegebenen Ebnen durch O.

Digitized by Google

63. Wir können untersuchen (vergl. 23), welche Relation zwischen diesen Skalar-Coefficienten bestehen muss, damit der Punkt D in der vierten gegebenen Ebne ABC liegen kann; oder was die Bedingung der Complanarität der vier Punkte A, B, C, D ist. Da die drei Vectoren DA, DB, DC jetzt als complanar angenommen werden, so müssen sie (nach 22) durch eine lineare Gleichung verbunden sein, von der Form:

$$a(\alpha - \delta) + b(\beta - \delta) + c(\gamma - \delta) = 0;$$

wenn wir sie mit der früheren und allgemeineren Form (62) vergleichen, so sehn wir, dass die erforderliche Bedingung,

$$a + b + c + d = 0,$$

ist. Diese Gleichung kann auch so geschrieben werden, (vergl. wieder 23):

$$\frac{-a}{d} + \frac{-b}{d} + \frac{-c}{d} = 1,$$

oder:

$$\frac{OA'}{OA} + \frac{OB'}{OB} + \frac{OC'}{OC} = 1;$$

und unter dieser letzten Form drückt sie eine bekannte geometrische Eigenschaft einer Ebne $ABCD$, bezogen auf drei Coordinatenachsen OA, OB, OC, die von irgend einem gemeinsamen Anfangspunkte O aus gezogen sind und in der Ebne endigen, aus. Wir haben auch, in diesem Falle von Complanarität (vergl. 28), die folgende Proportion der Coefficienten und Flächen:

$$a : b : c : -d = DBC : DCA : DAB : ABC;$$

oder, in mehr symmetrischer Form, und mit Rücksicht auf die Vorzeichen der Flächen:

$$a : b : c : d = BCD : -CDA : DAB : -ABC;$$

die Figur 18 kann hierzu als Erläuterung dienen, wenn wir O in ihr durch D ersetzt denken.

64. Wenn wir daher zugleich die beiden Gleichungen haben:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0, \text{ und } a + b + c + d = 0,$$

so dass die vier coinitialen Vectoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wie vorher in einer Ebne endigen, und daher (vergl. 24) termino-complanar genannt werden können, so ist augenscheinlich, dass die beiden geraden Linien, DA und BC, die je zwei von den vier com-

planaren Punkten verbinden, sich in irgend einem Punkte A' der Ebne schneiden müssen, in endlicher oder unendlicher Entfernung. Es ist ferner, nach Massgabe von 31, leicht zu sehn, dass die Vectoren der drei Durchschnittspunkte A', B', C', die sich so ergeben, die folgenden sind:

$$\text{für } A' = BC \cdot DA,\ \alpha' = \frac{b\beta + c\gamma}{b+c} = \frac{a\alpha + d\delta}{a+d};$$

$$\text{für } B' = CA \cdot DB,\ \beta' = \frac{c\gamma + a\alpha}{c+a} = \frac{b\beta + d\delta}{b+d};$$

$$\text{für } C' = AB \cdot DC,\ \gamma' = \frac{a\alpha + b\beta}{a+b} = \frac{c\gamma + d\delta}{c+d};$$

Ausdrücke, die unabhängig von der Lage des willkürlichen Anfangspunktes O sind und die demnach mit den entsprechenden Ausdrücken in 27 zusammenfallen, wenn wir diesen Anfangspunkt in den Punkt D versetzen, oder $\delta = 0$ machen. In der That, die letzten Resultate bleiben bestehen (vergl. 31), auch wenn die vier Vectoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, oder die fünf Punkte O, A, B, C, D, alle complanar sind. Denn, obwohl dann zwei lineare Gleichungen zwischen diesen vier Vectoren existiren, die im Allgemeinen geschrieben werden können:

$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + d'\delta = 0,$$
$$a''\alpha + b''\beta + c''\gamma + d''\delta = 0,$$

ohne die Relationen, $a' +$ u. s. w. $= 0$, $a'' +$ u. s. w. $= 0$, zwischen den Coefficienten, so haben wir doch nur, wenn wir von ihnen aus eine weitere lineare Gleichung bilden, von der Form:

$$(a'' + ta')\alpha + (b'' + tb')\beta + (c'' + tc')\gamma + (d'' + td')\delta = 0,$$

und t durch die Bedingung:

$$t = -\frac{a'' + b'' + c'' + d''}{a' + b' + c' + d'},$$

bestimmen, doch nur $a = a'' + ta'$, u. s. w., zu machen und die beiden zu Anfang dieses Artikels hingeschriebenen Gleichungen sind erfüllt und führen zu den vorher angegebenen Ausdrücken für die drei Vectoren der Durchschnittspunkte; diese Vectoren können also gefunden werden, ohne dass es nöthig wäre, das Eliminationsverfahren für die Skalare anzuwenden, das in dem vorhergehenden Kapitel behandelt wurde.

Digitized by Google

Zum Beispiel, es seien die beiden Gleichungen gegeben (vergl. 27, 33):

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0,$$
$$(2a + b + c)\alpha''' - a\alpha = 0;$$

es sollen die Vectoren der Durchschnittspunkte der drei Linienpaare BC, AA'''; CA, BA'''; und AB, CA''' bestimmt werden. Bildet man die Combination:

$$(2a + b + c)\alpha''' - a\alpha + t(a\alpha + b\beta + c\gamma) = 0,$$

und bestimmt t durch die Bedingung:

$$(2a + b + c) - a + t(a + b + c) = 0,$$

die $t = -1$ ergiebt, so haben wir für die drei gesuchten Vectoren die Ausdrücke:

$$\frac{b\beta + c\gamma}{b + c}, \quad \frac{c\gamma + 2a\alpha}{c + 2a}, \quad \frac{2a\alpha + b\beta}{2a + b};$$

von denen der erste $= \alpha'$, nach 27. Demnach schneidet die Linie AA''', in Fig. 21, BC im Punkte A'; und obwohl die beiden anderen hier betrachteten Durchschnittspunkte, die zu der vorher sogenannten dritten Construction (in 34) gehören, in der Figur nicht bezeichnet sind, so hätten doch ihre anharmonischen Bezeichnungen (36), nämlich, (2, 0, 1) und (2, 1, 0), in anderer Weise durch Combination der Gleichungen $y = 0$, und $x = 2z$, für die beiden Linien CA, BA''' gefunden werden können; ebenso durch Combination von $z = 0$, $x = 2y$ für das übrigbleibende Linienpaar.

65. In dem allgemeineren Falle, wenn die vier gegebenen Punkte A, B, C, D nicht in einer Ebne liegen, sei E irgend ein fünfter gegebener Punkt im Raume, der nicht auf einer der vier Seitenflächen der gegebenen Pyramide $ABCD$ liegt, und auch nicht auf ihren Verlängerungen; es sei $OE = \varepsilon$ sein Vector. Dann müssen die vier coinitialen Vectoren, EA, EB, EC, ED, von denen (nach der Voraussetzung) nicht drei complanar sind, und die nicht in einer Ebne endigen, nach 62 durch eine Gleichung von der Form:

$$a.EA + b.EB + c.EC + d.ED = 0,$$

verbunden sein, in der die vier Skalare, a, b, c, d, und ihre Summe, die wir mit $-e$ bezeichnen wollen, alle von Null verschieden sind. Also, da $EA = \alpha - \varepsilon$, u. s. w., so können wir die

Digitized by Google

folgende lineare Gleichung zwischen fünf coinitialen Vectoren, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, aufstellen, von denen nicht vier termino-complanar (64) sind:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon = 0;$$

mit der Relation, $a + b + c + d + e = 0$, zwischen den fünf Skalaren a, b, c, d, e, von denen nicht einer allein gleich Null ist.

Daher ist auch:

$$\varepsilon = (a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta) : (a + b + c + d), \text{ u. s. w..}$$

66. Wenn wir unter diesen Bedingungen schreiben:

$$D_1 = DE \cdot ABC, \text{ und } OD_1 = \delta_1,$$

d. h., wenn wir mit δ_1 den Vector des Punktes D_1 bezeichnen, in dem die gerade Linie DE die Ebne ABC schneidet, so haben wir:

$$\delta_1 = \frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{a + b + c} = \frac{d\delta + e\varepsilon}{d + e}.$$

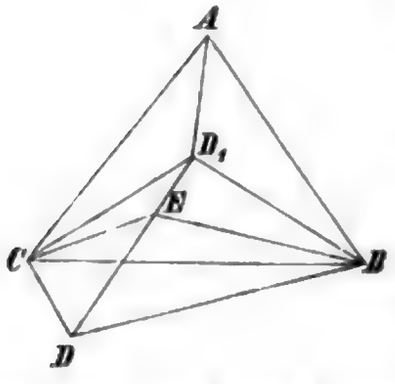
Wirklich sind diese beiden Ausdrücke äquivalent oder stellen ein und denselben Vector dar, in Folge der gegebenen Gleichungen; aber der erste zeigt (nach 63), dass der Vector δ_1 in der Ebne ABC endigt und der zweite zeigt (nach 25), dass er in der Linie DE endigt; sein Endpunkt D_1 muss daher, wie gefordert wurde, der Durchschnittspunkt dieser Linie mit der Ebne sein. Wir haben daher die beiden Gleichungen:

$$\text{I.} \ldots\ldots a(\alpha - \delta_1) + b(\beta - \delta_1) + c(\gamma - \delta_1) = 0;$$
$$\text{II.} \ldots\ldots d(\delta - \delta_1) + e(\varepsilon - \delta_1) = 0;$$

daraus folgen (nach 28 und 24) die beiden Proportionen:

$$\text{I'} \ldots\ldots a : b : c = D_1BC : D_1CA : D_1AB;$$
$$\text{II'} \ldots\ldots d : e = ED_1 : D_1D;$$

Fig. 30.



die Anordnung der Punkte in der nebenstehenden Figur 29 entspricht dem Falle, wenn alle vier Coefficienten a, b, c, d positiv sind, (oder dasselbe Vorzeichen haben), und wenn daher der übrigbleibende Coefficient e negativ ist (oder das entgegengesetzte Vorzeichen hat).

67. Für die drei complanaren Dreiecke der ersten Proportion können wir irgend drei Pyramiden setzen, die diese Dreiecke zu

ihren Basen und eine gemeinsame Spitze haben wie D oder E; und weil die Collineation DED_1 ergiebt $DD_1BC - ED_1BC = DEBC$, u. s. w., können wir zweitens die Verhältnisse hinschreiben:

$$\text{I}''\ldots\ a:b:c = DEBC:DECA:DEAB.$$

Ebenso ergiebt dieselbe Collineation:

$$ED_1:DD_1 = EABC:DABC;$$

wir haben daher, nach II′, die Proportion:

$$\text{II}''\ldots\ d:-e = EABC:DABC.$$

Aber

$$DEBC + DECA + DEAB + EABC = DABC,$$

und

$$a + b + c + d = -e;$$

wir können daher die folgende vollständigere Formel der Proportion zwischen Coefficienten und Volumina aufstellen:

$$\text{III}\ldots\ a:b:c:d:-e = DEBC:DECA:DEAB:EABC:DABC;$$

die Verhältnisse aller dieser fünf Pyramiden zu einander werden als positiv betrachtet, für die besondere Anordnung der Punkte, die in der vorigen Figur dargestellt ist.

68. Die Formel III kann indess als völlig allgemein angesehn werden, wenn wir übereinkommen zu sagen, dass das Volumen einer Pyramide sein Vorzeichen ändert, oder besser, dass es seinen algebraischen Charakter ändert, als positiv oder negativ, im Vergleich mit einer gegebenen Pyramide, und mit einer gegebenen Anordnung der Punkte, wenn es durch Null (vergl. 28) hindurchgeht; nämlich wenn im Laufe einer continuirlichen Aenderung irgend eine seiner Spitzen die entsprechende Basis kreuzt. Nach dieser Uebereinkunft* haben wir allgemein:

$$DABC = -ADBC = ABDC = -ABCD,$$
$$DEBC = BCDE,$$
$$DECA = CDEA;$$

* Unter den Folgerungen dieser Uebereinkunft in Betreff des Vorzeichens der Volumina, die schon von einigen neueren Geometern angenommen worden ist, und die wirklich (vergl. 28) zur Aufstellung allgemeiner Formeln nöthig sind, ist eine die, dass irgend zwei Pyramiden, $ABCD$, $A'B'C'D'$, zu einander ein positives oder negatives Verhältniss haben, je nachdem die zwei Drehungen, BCD und $B'C'D'$, wenn man sie von den Punkten A, respective A' aus betrachtet, gleiche oder entgegengesetzte Richtungen haben, z. B. rechtsläufig oder linksläufig sind.

die Proportion III. kann daher in folgender mehr symmetrischer Art ausgedrückt werden, doch gleichfalls allgemein:

III′... $a:b:c:d:e = BCDE:CDEA:DEAB:EABC:ABCD$;

die Summe dieser fünf Pyramiden ist stets gleich Null, wenn die Vorzeichen (wie vorher) berücksichtigt werden.

69. Wir sahen (in 24), dass die beiden Gleichungen:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = 0, \quad a + b + c = 0,$$

das Verhältniss der Segmente,

$$a:b:c = BC:CA:AB,$$

ergaben, wie auch die Lage des Anfangspunktes O sein mochte. Ebenso sahen wir (in 63), dass die beiden anderen Gleichungen:

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0, \quad a + b + c + d = 0,$$

das Verhältniss der Flächen,

$$a:b:c:d = BCD: -CDA:DAB: -ABC,$$

ergaben, wo wieder der Anfangspunkt willkürlich war. Und wir haben eben (in 68) eine entsprechende Proportion der Volumina aus den beiden analogen Gleichungen (65):

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon = 0, \quad a + b + c + d + e = 0,$$

abgeleitet, mit einem gleichfalls willkürlichen Anfangspunkte.

Wenn wir nun diese Abschnitte, Flächen und Volumina durch Skalare ersetzt denken, denen sie proportional sind, so können wir die drei allgemeinen Formeln aufstellen:

I. $OA.BC + OB.CA + OC.AB = 0$;

II. $OA.BCD - OB.CDA + OC.DAB - OD.ABC = 0$;

III. $OA.BCDE + OB.CDEA + OC.DEAB + OD.EABC + OE.ABCD = 0$;

wo in I., A, B, C irgend drei collineare Punkte sind; in II., A, B, C, D irgend vier complanare Punkte, und in III., A, B, C, D, E irgend fünf Punkte im Raume sind, während O in jeder dieser drei Formeln ein ganz willkürlicher Punkt ist. Es muss, indessen, daran erinnert werden, dass die Additionen und Subtractionen hierbei nach den Regeln für Vectoren zu bilden sind, wie sie im ersten Kapitel des gegenwärtigen Theiles festgestellt wurden; die Segmente, oder Flächen, oder Volumina, die die Gleichungen enthalten, werden hierbei als Coefficienten dieser

Digitized by Google

Vectoren behandelt. Wir können die Bezeichnungen noch weiter abkürzen, während wir den Sinn der Formeln beibehalten, wenn wir das Zeichen für den willkürlichen Anfangspunkt O fortlassen; und also schreiben:*

$$\text{I}'. \quad A.BC + B.CA + C.AB = 0,$$

für irgend drei collineare Punkte; ebenso erhalten wir die entsprechenden Formeln II′. und III′., für irgend vier complanare Punkte und für irgend fünf Punkte im Raume.

Zweiter Abschnitt.

Ueber fünfzahlige Symbole von Punkten und Ebnen im Raum.

70. Die Gleichungen des Art. 65 können wir noch als richtig ansehn, der Vector ϱ irgend eines Punktes P im Raum mag, in unendlich verschiedener Weise, unter der Form (vergl. 36):

$$\text{I}\ldots OP = \varrho = \frac{xa\alpha + yb\beta + zc\gamma + wd\delta + ve\varepsilon}{xa + yb + zc + wd + ve},$$

ausgedrückt sein, in der die Verhältnisse der Differenzen der fünf Coefficienten, $xyzwv$, die Lage des Punktes bestimmen. In der That existirt, da die vier Punkte $ABCD$ nicht in einer Ebene liegen, nothwendig (vergl. 65) eine bestimmte lineare Beziehung zwischen den vier Vectoren, die vom Punkte P aus zu ihnen gezogen werden können, die so geschrieben werden kann:

$$x'a.PA + y'b.PB + z'c.PC + w'd.PD = 0;$$

sie ergiebt den Ausdruck:

$$\text{II}\ldots \varrho = \frac{x'a\alpha + y'b\beta + z'c\gamma + w'd\delta}{x'a + y'b + z'c + w'd},$$

in dem die Verhältnisse der vier Skalare $x'y'z'w'$, von der Lage von P abhängen und sie umgekehrt bestimmen. Schreibt man dann:

$$x = tx' + v, \quad y = ty' + v, \quad z = tz' + v, \quad w = tw' + v,$$

wo t und v zwei neue und willkürliche Skalare sind, und beachtet, dass $a\alpha + \ldots. + e\varepsilon = 0$, und $a + \ldots\ldots + e = 0$ (65), so kommen wir zur Form ϱ, die oben angegeben worden ist.

---

* Wir würden so einige von den Bezeichnungen des barycentrischen Calcüls haben, die aber hier mit verschiedener Bedeutung angewandt sind.

71. Wenn der Vector ϱ in dieser Weise ausgedrückt wird, kann der Punkt P durch das fünfzahlige Zeichen (x, y, z, w, v) bezeichnet werden; und wir können die Gleichung hinschreiben:

$$P = (x, y, z, w, v).$$

Aber man sieht, dass derselbe Punkt P auch durch das andere Symbol derselben Art, (x', y', z', w', v'), bezeichnet werden kann, vorausgesetzt, dass die folgende Proportion zwischen den Differenzen der Coefficienten (70) besteht:

$$x' - v' : y' - v' : z' - v' : w' - v' = x - v : y - v : z - v : w - v.$$

Unter dieser Bedingung wollen wir die folgende Formel für die Congruenz hinschreiben:

$$(x', y', z', w', v') \equiv (x, y, z, w, v),$$

um auszudrücken, dass die beiden fünfzahligen Symbole, obwohl in ihrer Zusammensetzung nicht identisch, doch dieselbe geometrische Bedeutung haben, oder ein und denselben Punkt bezeichnen. Und wir wollen die symbolische Gleichung:

$$(x', y', z', w', v') = (x, y, z, w, v),$$

gebrauchen, um auszudrücken, dass die fünf Coefficienten $x', \ldots v'$, des einen Symbols einzeln den entsprechenden Coefficienten des anderen gleich sind, also $x' = x, \ldots v' = v$.

72. Wenn wir allgemein schreiben:

$$(tx, ty, tz, tw, tv) = t\,(x, y, z, w, v),$$
$$(x' + x, \ldots . v' + v) = (x', \ldots v') + (x, \ldots v), \text{ u. s. w.}$$

und das besondere Symbol* $(1, 1, 1, 1, 1)$ mit (U) abkürzen, während (Q), (Q'), .. kurz die fünfzahligen Symbole $(x, .. v)$, $(x', \ldots v') \ldots$ bezeichnen mögen, so können wir die Congruenz (71) aufstellen:

$$(Q') \equiv (Q), \text{ wenn } (Q) = t(Q') + u(U);$$

in der t und u willkürliche Coefficienten sind. Zum Beispiel,

$$(0, 0, 0, 0, 1) \equiv (1, 1, 1, 1, 0),$$

und

$$(0, 0, 0, 1, 1) \equiv (1, 1, 1, 0, 0);$$

* Das fünfzahlige Symbol (U) bezeichnet keinen bestimmten Punkt, da es (nach 70, 71) dem unbestimmten Vector $\varrho = \frac{0}{0}$ entspricht; doch es lässt nützliche Combinationen mit anderen fünfzahligen Symbolen zu, wie oben.

Digitized by Google

jedes Symbol des ersten Paares bezeichnet (65) den gegebenen Punkt E; und jedes Symbol des zweiten Paares bezeichnet (66) den abgeleiteten Punkt D_1. Wenn die Coefficienten so einfach sind wie in den letzten Ausdrücken, so können wir gelegentlich die Kommata auslassen und also noch kürzer schreiben:

$$(00001) \equiv (11110); \quad (00011) \equiv (11100).$$

73. Wenn drei Vectoren, $\varrho, \varrho', \varrho''$, von denen jeder in der ersten Form (70) ausgedrückt ist, termino-collinear (24) sind und wenn wir ihre Nenner, $xa + \ldots.$, $x'a + \ldots.$, $x''a + \ldots$, mit m, m', m'' bezeichnen, dann müssen sie (23) durch eine lineare Gleichung verbunden sein, in der die Summe der Coefficienten gleich Null ist, und die so geschrieben werden kann:

$$tm\varrho + t'm'\varrho' + t''m''\varrho'' = 0; \quad tm + t'm' + t''m'' = 0.$$

Wir haben daher die zwei Bedingungsgleichungen:

$$t(xa\alpha + \ldots + ve\varepsilon) + t'(x'a\alpha + \ldots + v'e\varepsilon) + t''(x''a\alpha + \ldots + v''e\varepsilon) = 0;$$
$$t(xa + \ldots + ve) + t'(x'a + \ldots + v'e) + t''(x''a + \ldots + v''e) = 0;$$

in denen t, t', t'' drei neue Skalare sind, während die fünf Vectoren $\alpha, \ldots\ldots \varepsilon$, und die fünf Skalare $a \ldots e$, nur den beiden Gleichungen (65) unterworfen sind. Aber diese Bedingungsgleichungen werden erfüllt, wenn man annimmt, dass

$$tx + t'x' + t''x'' = \ldots = tv + t'v' + t''v'' = -u,$$

wo u irgend ein neuer Skalar ist, und sie können nicht in anderer Weise befriedigt werden. Folglich kann die Bedingung der Collinearität der drei Punkte P, P', P'', in denen die drei Vectoren ϱ, ϱ', ϱ'' endigen und deren fünfzahlige Symbole (Q), (Q'), (Q'') sind, kurz durch die Gleichung:

$$t(Q) + t'(Q') + t''(Q'') = -u(U),$$

ausgedrückt werden; so dass, wenn irgend vier Skalare, t, t', t'', u, gefunden werden können, die dieser letzten symbolischen Gleichung genügen, dann, und nur dann, die drei Punkte $PP'P''$ auf einer geraden Linie liegen. Zum Beispiel, die drei Punkte D, E, D_1, die (72) durch die fünfzahligen Symbole, (00010), (00001), (11100), bezeichnet wurden, sind collinear; denn die Summe der drei Symbole ist (U). Und wenn wir die Gleichung haben:

$$(Q') = t(Q) + t'(Q') + u(U),$$

in der t, t', u, irgend drei Skalare sind, dann ist (Q') ein Symbol für einen Punkt P', auf der Linie PP'. Zum Beispiel, das Symbol $(0,0,0,t,t')$ kann irgend einen Punkt auf der Linie DE bezeichnen.

74. Durch ganz gleiche Betrachtungen kann bewiesen werden, dass, wenn $(Q)(Q')(Q'')(Q''')$ fünfzahlige Symbole für irgend vier Punkte $PP'P''P'''$ sind, die in einer Ebne liegen, so dass die vier Vectoren $\varrho, \varrho', \varrho'', \varrho'''$ termino-complanar (64) sind, dann eine Gleichung von der Form:

$$t(Q) + t'(Q') + t''(Q'') + t'''(Q''') = -u(U),$$

bestehn muss; und umgekehrt, wenn das vierte Symbol in der folgenden Weise ausgedrückt werden kann:

$$(Q''') = t(Q) + t'(Q') + t''(Q'') + u(U),$$

mit irgend welchen Skalar-Werthen von t, t', t'', u, dann liegt der vierte Punkt P''' in der Ebne $PP'P''$ der drei anderen. Zum Beispiel, die vier Punkte,

$$(10000), \quad (01000), \quad (00100), \quad (11100),$$

oder A, B, C, D_1 (66), sind complanar; und das Symbol $(t, t', t'', 0, 0)$ kann irgend einen Punkt in der Ebne ABC darstellen.

75. Wenn also ein Punkt P complanar mit drei gegebenen Punkten, P_0, P_1, P_2, ist, so haben wir Ausdrücke von den folgenden Formen für die fünf Coefficienten $x, \ldots v$ seines fünfzahligen Symbols, diese ausgedrückt durch die fünfzehn gegebenen Coefficienten ihrer Symbole und durch vier neue und willkürliche Skalare:

$$x = t_0 x_0 + t_1 x_1 + t_2 x_2 + u; \ldots\ldots v = t_0 v_0 + t_1 v_1 + t_2 v_2 + u.$$

Und wir erhalten daher, durch Elimination dieser vier Skalare, $t_0 \ldots u$, eine lineare Gleichung von der Form:

$$l(x - v) + m(y - v) + n(z - v) + r(w - v) = 0,$$

die wir die fünfzahlige Gleichung der Ebne $P_0 P_1 P_2$, oder des Ortes des angenommenen Punktes P, nennen können, denn sie drückt eine gemeinsame Eigenschaft aller Punkte dieses Ortes aus; und, weil die drei Verhältnisse der vier neuen Coefficienten l, m, n, r die Lage der Ebne im Raume bestimmen.

Es ist indessen besser, die fünfzahlige Gleichung einer Ebne Π in der mehr symmetrischen Form:

$$lx + my + nz + rw + sv = 0,$$

Digitized by Google

zu schreiben, in der der fünfte Coefficient, s, mit den andern durch die Relation:

$$l + m + n + r + s = 0,$$

verbunden ist; dann können wir sagen, dass $[l, m, n, r, s]$ (vergl. 37) das fünfzahlige Symbol der Ebne II ist, und können die Gleichung schreiben:

$$II = [l, m, n, r, s].$$

Zum Beispiel, die Coefficienten des Symbols für einen Punkt P in der Ebne ABC können so ausgedrückt werden, (vergl. 74):

$$x = t_0 + u, \quad y = t_1 + u, \quad z = t_2 + u, \quad w = u, \quad v = u;$$

zwischen ihnen besteht nur die Relation $w - v = 0$, unabhängig von den vier willkürlichen Skalaren $t_0 .. u$; sie ist daher die Gleichung der Ebne ABC und das Symbol dieser Ebne ist $[0, 0, 0, 1, -1]$; es kann mitunter kürzer (vergl. 72) ohne Kommata geschrieben werden $[0001\bar{1}]$. Es ist einleuchtend, dass in irgend einem solchen Symbol die Coefficienten alle mit einem gemeinsamen Factor multiplicirt werden können.

76. Das Symbol der Ebne $P_0 P_1 P_2$ wäre so bestimmt; wir wollen jetzt ein Symbol für den Punkt, P, suchen, in dem die Ebne durch eine gegebene Linie $P_3 P_4$ geschnitten wird, oder die Coefficienten $x .. v$, oder wenigstens die Verhältnisse ihrer Differenzen (70) in dem fünfzahligen Symbol dieses Punktes,

$$(x, y, z, w, v) = P = P_0 P_1 P_2 \cdot P_3 P_4,$$

bestimmen. Combiniren wir zu diesem Zwecke die Ausdrücke:

$$x = t_3 x_3 + t_4 x_4 + u', .. \quad v = t_3 v_3 + t_4 v_4 + u',$$

die in der symbolischen Gleichung (73):

$$(Q) = t_3 (Q_3) + t_4 (Q_4) + u' (U),$$

enthalten sind, und die Collinearität $P P_3 P_4$ ausdrücken, mit den Gleichungen (75):

$$lx + \ldots sv = 0, \quad l + \ldots\ldots + s = 0,$$

die die Complanarität $P P_0 P_1 P_2$ ausdrücken, so kommen wir zur Formel:

$$t_3 (l x_3 + \ldots + s v_3) + t_4 (l x_4 + .. + s v_4) = 0,$$

die das Verhältniss $t_3 : t_4$ bestimmt und die Lösung des Pro-

blems enthält. Zum Beispiel, wenn P ein Punkt auf der Linie DE ist, dann ist (vergl. 73):

$$x = y = z = u', \; w = t_3 + u', \; v = t_4 + u';$$

und wenn es auch ein Punkt in der Ebne ABC ist, dann ist $w - v = 0$ (75), und daher $t_3 - t_4 = 0$; daher ist:

$$(Q) = t_3\,(00011) + u'\,(11111),$$

oder

$$(Q) \equiv (00011);$$

von diesem letzten Symbol hatten wir gefunden (72), dass es den Durchschnittspunkt (66), $D_1 = ABC' DE$, darstellt.

77. Wenn die fünf Coefficienten, $xyzwv$, irgend eines gegebenen fünfzahligen Symbols (Q) für einen Punkt P, oder die irgend eines congruenten Symbols (71), irgend welche ganzen Zahlen sind, (positiv, oder negativ, oder null), so wollen wir sagen, (vergl. 42), dass der Punkt P in rationaler Beziehung zu den fünf gegebenen Punkten, $A \ldots E$, steht, oder kurz, dass er ein rationaler Punkt des Symbols ist, das diese fünf Punkte bestimmen. Und ebenso wollen wir, wenn die fünf Coefficienten, $lmnrs$, des fünfzahligen Symbols (75) einer Ebne Π entweder gleich oder proportional ganzen Zahlen sind, sagen, dass die Ebne eine rationale Ebne desselben Systems ist, oder dass sie in rationaler Beziehung zu denselben fünf Punkten steht. Dagegen wollen wir, wenn das fünfzahlige Symbol eines Punktes, oder einer Ebne, nicht schon so ganzzahlige Coefficienten hat, und nicht so transformirt (vergl. 72) werden kann, dass es welche erhält, sagen, der Punkt oder die Ebne steht in irrationaler Beziehung zu den gegebenen Punkten, oder kurz, er ist irrational. Eine gerade Linie, die zwei rationale Punkte verbindet, oder der Durchschnitt zweier rationaler Ebnen ist, kann in demselben Sinne eine rationale Linie genannt werden; und Linien, die nicht auf einem von diesen beiden Wegen construirt werden können, können im Gegensatz dazu irrationale Linien genannt werden. Es ist augenscheinlich aus der Art der angewandten Eliminationen (vergl. wieder 42), dass eine Ebne, die dadurch bestimmt ist, dass sie drei rationale Punkte enthält, nothwendig eine rationale Ebne ist; und ebenso, dass ein Punkt, der als der gemeinsame Durchschnittspunkt dreier rationaler Ebnen

Digitized by Google

bestimmt ist, stets ein rationaler Punkt ist; so ist es auch jeder Punkt, der erhalten wird als der Durchschnitt einer rationalen Linie mit einer rationalen Ebne, oder von zwei rationalen Linien mit einander, wenn sie gerade complanar sind.

78. Endlich, wenn zwei Punkte, oder zwei Ebnen, sich nur durch die Anordnung (oder Aufeinanderfolge) der Coefficienten ihrer fünfzahligen Symbole unterscheiden, so kann man sagen, diese Punkte oder Ebnen haben einen gemeinsamen Typus, oder kurz, sie sind syntypisch. Zum Beispiel, die fünf gegebenen Punkte, $A, \ldots . E$, sind in diesem Sinne syntypisch, denn sie werden dargestellt durch die fünfzahligen Symbole (10000), ... (00001); und die zehn Ebnen, die man erhält, wenn man von diesen fünf Punkten alle Combinationen zu je dreien nimmt, haben ebenfalls ein und denselben Typus. So haben wir gesehn, dass das fünfzahlige Symbol der Ebne ABC (75) $[0001\bar{1}]$ ist; und das analoge Symbol $[1\bar{1}000]$ stellt die Ebne CDE, u. s. w., dar.

Andere Beispiele bieten sich von selbst in einem der folgenden Abschnitte über Netze im Raume dar. Doch es scheint angemessen, hier einige wenige Worte über diejenigen Anharmonischen Coordinaten, Gleichungen, Symbole und Typen für den Raum hinzuzufügen, die man aus der Theorie und den Ausdrücken des gegenwärtigen Abschnitts erhält, indem man (wie wir es thun können) die Anzahl der Coefficienten in jedem Symbole oder jeder Gleichung von fünf auf vier reducirt.

Dritter Abschnitt.

Ueber Anharmonische Coordinaten im Raume.

79. Wenn wir die zweite Form (70) für ϱ adoptiren, oder annehmen, wie wir es können, dass der fünfte Coefficient in der ersten Form verschwindet, so bekommen wir einen anderen allgemeinen Ausdruck (vergl. 34, 36) für den Vector ϱ eines Punktes im Raume:

$$OP = \varrho = \frac{xa\alpha + yb\beta + zc\gamma + wd\delta}{xa + yb + zc + wd};$$

und wir können dann die symbolische Gleichung (vergl. 36, 71):

$$P = (x, y, z, w),$$

hinschreiben und können sie das vierzahlige Symbol des Punktes P nennen; wir werdeu bald Grund haben sie auch das Anharmonische Symbol dieses Punktes zu nennen. Inzwischen wollen wir bemerken, dass die einzigen congruenten Symbole (71) dieser letzten Form diejenigen sind, die sich nur durch Einführung eines gemeinsamen Factors unterscheiden; die drei Verhältnisse der vier Coefficienten, $x \ldots . w$, sind daher allein nöthig, die Lage des Punktes zu bestimmen; daher können diese vier Coefficienten (vergl. 36) seine anharmonischen Coordinaten im Raume genannt werden.

80. Wenn wir also annehmen, dass $v = 0$ ist in dem fünfzahligen Symbole des Punktes P, so können wir das fünfte Glied sv in der fünfzahligen Gleichung einer Ebne Π, $lx + \ldots . + sv = 0$, (75), fortlassen; und dann auch, da er hier nicht nöthig ist, den fünften Coefficienten, s, in dem fünfzahligen Symbol dieser Ebne, die also auf die vierzahlige Form:

$$\Pi = [l, m, n, r],$$

reducirt wird. Die letztere kann auch (37, 79) das Anharmonische Symbol der Ebne genannt werden, deren Anharmonische Gleichung:

$$lx + my + nz + rw = 0,$$

ist; die vier Coefficienten, $lmnr$, die wir auch (vergl. wieder 37) die Anharmonischen Coordinaten der Ebne Π nennen können, sind unter einander nicht durch irgend eine allgemeine Relation (wie $l + \ldots + s = 0$) verbunden, da ihre drei Verhältnisse (vergl. 79) im Allgemeinen allein nöthig sind, die Lage der Ebne im Raume zu bestimmen.

81. Wenn wir annehmen, dass der vierte Coefficient, w, in dem neuen Symbol eines Punktes auch verschwindet, dann liegt dieser Punkt P in der Ebne ABC; und dann kann er genügend (wie in 36) durch das dreizahlige Symbol (x, y, z) dargestellt werden. Wenn wir daher nur solche Punkte in Betracht ziehen, in denen eine willkürliche Ebne Π die gegebene Ebne ABC schneidet, so können wir den vierten Coefficienten, r, fortlassen, da er für solche Punkte nicht nöthig ist. In dieser Weise kommen wir dann auf die Gleichung: $lx + my + nz = 0$, zurück, und auf das Symbol, $A = [l, m, n]$, für eine

Digitized by Google

gerade Linie (37) in der Ebne ABC, die hier als der Durchschnitt dieser Ebne mit irgend einer willkürlichen Ebne Π im Raum, oder als die Spur der letzteren auf die erstere, aufgefasst wird. Wenn die Ebne Π durch ihr fünfzahliges Symbol (75) gegeben ist, so erhalten wir das dreizahlige Symbol für ihre Spur A, wenn wir einfach die beiden letzten Coefficienten, r und s, fortlassen.

82. In dem allgemeineren Falle, wenn der Punkt P nicht auf die Ebne ABC beschränkt ist, bleiben die zuletzt aufgestellten Formeln der Collineation und Complanarität (73, 74) noch bestehn, wenn wir (vergl. 72) sein vierzahliges Symbol mit (Q) bezeichnen, vorausgesetzt, dass wir jetzt das Symbol (U) fortlassen, oder seinen Coefficienten gleich Null setzen. Also, die Formel:

$$(Q) = t'(Q') + t''(Q'') + t'''(Q'''),$$

drückt aus, dass der Punkt P in der Ebne $P'P''P'''$ liegt; und wenn der Coefficient t''' verschwindet, so bedeutet die dann übrigbleibende Gleichung, nämlich:

$$(Q) = t'(Q') + t''(Q''),$$

dass P dann complanar mit den zwei gegebenen Punkten, P', P'' und mit einem beliebigen dritten Punkt ist; oder, mit anderen Worten, dass er auf der geraden Linie $P'P''$ liegt; damit (vergl. 76) können leicht Probleme über den Durchschnitt von Linien mit Ebnen gelöst werden. Wenn wir kurz mit $[R]$ das vierzahlige Symbol $[l, m, n, r]$ einer Ebne Π bezeichnen, so drückt ebenso die Formel:

$$[R] = t'[R'] + t''[R''] + t'''[R'''],$$

aus, dass die Ebne Π durch den Durchschnittspunkt der drei Ebnen, Π', Π'', Π''', geht; und wenn wir $t''' = 0$ setzen, so dass:

$$[R] = t'[R'] + t''[R''],$$

so bezeichnet die so erhaltene Formel, dass die Ebne Π durch den Durchschnittspunkt der beiden Ebnen Π', Π'', mit irgend einer dritten Ebne geht; oder (vergl. 41), dass die Ebne Π die Durchschnittslinie von, Π', Π'' enthält; in diesem Falle kann man die drei Ebnen, Π, Π', Π'', collinear nennen. Daraus ergiebt sich, dass jeder der beiden Ausdrücke:

$$\text{I.} \;\ldots\; t'(Q') + t''(Q''), \qquad \text{II.} \;\ldots\; t'[R'] + t''[R''],$$

als das Symbol einer geraden Linie im Raume gebraucht werden kann, jenachdem wir die Linie A entweder 1) als Verbindungslinie zweier gegebenen Punkte, oder 2) als Durchschnitt zweier gegebenen Ebnen ansehn. Die Bemerkungen (77) über rationale und irrationale Punkte, Ebnen und Linien erfordern hier keine Aenderung; und die über Typen (78) passen sich von selbst leicht vierzahligen und fünfzahligen Symbolen an.

83. Aus den vorhergehenden allgemeinen Formeln der Collineation und Complanarität folgt, dass der Punkt P', in welchem die Linie AB die Ebne CDP durch CD und irgend einen angenommenen Punkt $P = (xyzw)$ im Raume schneidet, bezeichnet werden kann durch:

$$P' = AB \cdot CDP = (xy00);$$

zum Beispiel, $E = (1111)$, und $C' = AB \cdot CDE = (1100)$.

Allgemein, wenn $ABCDEF$ irgend sechs Punkte im Raume sind, so sagt man, dass die vier collinearen Ebnen (82), ABC, ABD, ABE, ABF, ein Büschel um AB bilden; und wenn dieses Büschel durch irgend eine gradlinige Transversale in den vier Punkten C', D', E', F', geschnitten wird, dann heisst (vergl. 35) die anharmonische Function dieser Gruppe von Punkten (25) auch die Anharmonische des Ebnenbüschels. Sie kann in folgender Weise bezeichnet werden:

$$(AB.CDEF) = (C'D'E'F').$$

Daher können wir, (vergl. wieder 25, 35) nach dem, was wir eben in Bezug auf C' und P' gezeigt haben, die wichtige Formel aufstellen:

$$(CD.AEBP) = (AC'BP') = \frac{x}{y};$$

so dass das Verhältniss der Coefficienten in dem Symbol $(xyzw)$ für einen variablen Punkt P (79) die Anharmonische eines Ebnenbüschels darstellt, dessen eine Ebne CDP variabel ist, während die drei anderen Ebnen dieses Büschels gegeben sind. Ebenso ist:

$$(AD.BECP) = \frac{y}{z}, \text{ und } (BD.CEAP) = \frac{z}{x};$$

so dass (vergl. 36) das Product der drei letzten Anharmoni-

Digitized by Google

schen gleich der Einheit ist. In demselben Sinne haben wir auch:

$$(BC.AEDP) = \frac{x}{w}, (CA.BEDP) = \frac{y}{w}, (AB.CEDP) = \frac{z}{w};$$

so dass die drei Verhältnisse der drei ersten Coefficienten xyz zum vierten Coefficienten w genügen, die drei Ebnen, BCP, CAP, ABP, zu bestimmen, deren gemeinsamer Durchschnittspunkt der Punkt P ist, vermittelst der Anharmonischen der drei Ebnenbüschel, zu denen die drei Ebnen respective gehören. Und so haben wir einen Grund, ausser der Analogie mit den schon gebrauchten Ausdrücken für Punkte in einer gegebenen Ebne, die vier Coefficienten, $xyzw$, in dem vierzahligen Symbol (79) eines Punktes im Raume die Anharmonischen Coordinaten dieses Punktes zu nennen.

84. Allgemein, wenn wir irgend vier collineare Punkte, $P_0 \ldots P_3$, haben, so dass (vergl. 82) ihre Symbole durch zwei lineare Gleichungen von folgender Form verbunden sind:

$$(Q_1) = t\,(Q_0) + u\,(Q_2),$$
$$(Q_3) = t'\,(Q_0) + u'\,(Q_2),$$

dann kann die Anharmonische ihrer Gruppe (vergl. 25, 44) in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$(P_0 P_1 P_2 P_3) = \frac{ut'}{tu'};$$

man sieht das sofort ein, wenn man das Büschel $(CD.P_0 P_1 P_2 P_3)$ und die Transversale AB (83) in Betracht zieht. Und ebenso, wenn wir (vergl. wieder 82) die beiden anderen symbolischen Gleichungen haben, welche vier collineare Ebnen, $\Pi_0 \ldots \Pi_3$, verbinden:

$$[R_1] = t\,[R_0] + u\,[R_2],$$
$$[R_3] = t'\,[R_0] + u'\,[R_2],$$

so wird die Anharmonische ihres Büschels (83) durch die genau gleiche Formel:

$$(\Pi_0 \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3) = \frac{ut'}{u't},$$

ausgedrückt; man kann sie beweisen, wenn man sich das Büschel durch dieselbe transversale Linie AB geschnitten denkt.

85. Es folgt, dass wenn $f(xyzw)$ und $f_1(xyzw)$ irgend zwei

homogene und lineare Functionen von x, y, z, w, sind; und wenn wir vier collineare Ebnen $\Pi_0, \ldots \Pi_3$, durch die vier Gleichungen:

$$f = 0, \quad f_1 = f, \quad f_1 = 0, \quad f_1 = kf,$$

bestimmen, in denen k irgend ein Skalar ist; wir folgenden Werth der anharmonischen Function des so bestimmten Ebnenbüschels erhalten werden:

$$(\Pi_0\, \Pi_1\, \Pi_2\, \Pi_3) = k = \frac{f_1}{f}.$$

Hieraus ergiebt sich folgendes Theorem, das von Wichtigkeit in der Anwendung des gegenwärtigen Systems von Raumcoordinaten ist: —

„Der Quotient irgend zweier gegebenen homogenen und linearen Functionen der anharmonischen Coordinaten (79) eines variablen Punktes P im Raume, kann ausgedrückt werden als die Anharmonische $(\Pi_0\, \Pi_1\, \Pi_2\, \Pi_3)$ eines Ebnenbüschels, von dem drei Ebnen gegeben sind, während die vierte durch den variablen Punkt P und durch eine gegebene grade Linie A geht, die den drei vorigen Ebnen gemeinsam ist."

86. Ebenso kann man das folgende analoge Theorem beweisen: —

„Der Quotient irgend zweier gegebenen homogenen und linearen Functionen der anharmonischen Coordinaten (80) einer variablen Ebne Π kann als die Anharmonische $(P_0\, P_1\, P_2\, P_3)$ einer Gruppe von Punkten ausgedrückt werden, von denen drei gegeben und collinear sind, und der vierte der Durchschnittspunkt $A \cdot \Pi$ ihrer gemeinsamen gegebenen graden Linie A mit der variablen Ebne Π ist."

Vollständiger, wenn die beiden gegebenen Functionen von $lmnr\, F$ und F_1 sind, und wenn wir drei Punkte $P_0\, P_1\, P_2$ durch die Gleichungen (vergl. 57) $F = 0$, $F_1 = F$, $F_1 = 0$, bestimmen und mit P_3 den Durchschnittspunkt ihrer gemeinsamen Linie A mit Π bezeichnen, so erhalten wir den Quotienten,

$$\frac{F_1}{F} = (P_0\, P_1\, P_2\, P_3).$$

Zum Beispiel, wenn wir annehmen, dass:

$$A_2 = (1001), \quad B_2 = (0101), \quad C_2 = (0011),$$
$$A'_2 = (100\bar{1}), \quad B'_2 = (010\bar{1}), \quad C'_2 = (001\bar{1}),$$

Digitized by Google

so dass:

$$A_2 = DA'BCE, \text{ u. s. w., und } (DA_2AA'_2) = -1,$$

u. s. w., so finden wir, dass die drei Verhältnisse von l, m, n zu r, in dem Symbol, $\Pi = [lmnr]$, in der Form von Anharmonischen von Gruppen (vergl. 39) in folgender Weise ausgedrückt werden können:

$$\frac{l}{r} = (DA'_2AQ); \quad \frac{m}{r} = (DB'_2BR); \quad \frac{n}{r} = (DC'_2CS);$$

hier sind Q, R, S die Durchschnittspunkte der Ebne Π mit den drei gegebenen graden Linien, DA, DB, DC. Und so haben wir einen Grund (vergl. 83), ausser der Analogie mit Linien in einer gegebenen Ebne (37), wie vorher die vier Coefficienten l, m, n, r, in dem vierzahligen Symbol einer Ebne Π (80), die anharmonischen Coordinaten dieser Ebne im Raume zu nennen.

87. Wir können hinzufügen, dass wenn wir mit L, M, N, die Punkte bezeichnen, in denen dieselbe Ebne Π durch die drei gegebenen graden Linien, BC, CA, AB, geschnitten wird, und die Bezeichnungen, A'', B'', C'', für diejenigen anderen Punkte auf denselben drei Linien zurückhalten, die vorher so bezeichnet wurden (in 31, u. s. w.), so dass wir jetzt schreiben können (vergl. 36):

$$A'' = (01\bar{1}0), \quad B'' = (\bar{1}010), \quad C'' = (1\bar{1}00),$$

so haben wir (vergl. 39, 83) die drei weiteren Anharmonischen von Gruppen, deren Producte gleich der Einheit sind:

$$\frac{m}{n} = (CA''BL); \quad \frac{n}{l} = (AB''CM); \quad \frac{l}{m} = (BC''AN);$$

und die sechs gegebenen Punkte, $A'', B'', C'', A'_2, B'_2, C'_2$, liegen alle in einer gegebenen Ebne $[E]$, deren Gleichung und Symbol:

$$x + y + z + w = 0; \text{ und } [E] = [1111],$$

sind. Die sechs Gruppen von Punkten, deren anharmonische Functionen mithin die sechs Verhältnisse der vier anharmonischen Coordinaten, $lmnr$, einer variablen Ebne Π darstellen, liegen daher auf den sechs Kanten der gegebenen Pyramide $ABCD$; zwei Punkte in jeder Gruppe sind Spitzen der Pyramide und die beiden andern sind die Durchschnittspunkte der Kante mit den beiden Ebnen $[E]$ und Π. Endlich ist die

Ebne $[E]$, in einer bekannten neueren Bezeichnung, die Ebne der Homologie,* und der Punkt E ist der Mittelpunkt der Homologie der gegebenen Pyramide, $ABCD$, und einer eingeschriebenen Pyramide, $A_1 B_1 C_1 D_1$, in der $A_1 = EA \cdot BCD$, u. s. w., so dass D_1 seine frühere Bezeichnung (66, 76) beibehält, und wir die anharmonischen Symbole hinschreiben können:

$$A_1 = (0111), \quad B_1 = (1011), \quad C_1 = (1101), \quad D_1 = (1110).$$

Und wenn wir mit, $A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$, die harmonisch Conjugirten der letzteren Punkte in Beziehung auf die Linien, EA, EB, EC, ED, bezeichnen, so dass:

$$(EA_1 AA'_1) = \cdots = (ED_1 DD'_1) = -1,$$

so haben wir die entsprechenden Symbole:

$$A'_1 = (2111), \quad B'_1 = (1211), \quad C'_1 = (1121), \quad D'_1 = (1112).$$

Es bestehen viele andere Beziehungen der Lage zwischen den verschiedenen Punkten, Linien und Ebnen, von denen wir einige naturgemäss in der Theorie der Netze im Raume betrachten werden, die wir im folgenden Abschnitt behandeln wollen.

Vierter Abschnitt.

Ueber geometrische Netze im Raume.

88. Wenn wir fünf gegebene Punkte, $A..E$, haben, von denen nicht vier complanar sind, so können wir irgend zwei von ihnen durch eine gerade Linie und die drei andern durch eine Ebne verbinden und den Punkt, in dem die letzteren einander schneiden, bestimmen; wir leiten so ein System von zehn Linien A_1, zehn Ebnen Π_1, und zehn Punkten P_1, von dem gegebenen System von fünf Punkten P_0, ab durch eine, wie wir sagen können, erste Construction (34). Wir können dann dazu übergehen, alle die neuen und verschiedenen Linien, A_2, und Ebnen, Π_2, zu bestimmen, die die zehn abgeleiteten Punkte P_1 mit den fünf gegebenen Punkten P_0, und mit einander, verbinden und können dann untersuchen, welche neuen und verschiedenen Punkte P_2 jetzt als Durchschnittspunkte von Linien mit Ebnen

* Siehe Poncelet's *Traité des Propriétés Projectives* (Paris, 1822).

Digitized by Google

oder von Linien in einer Ebne mit einander entstehen; von allen diesen neuen Linien, Ebnen und Punkten wollen wir sagen (vergl. wieder 34), sie gehören zu einer zweiten Construction. Und so können wir zu einer dritten Construction derselben Art übergehen und so fort; wir erhalten so das, was Möbius in seinem schon citirten barycentrischen Calcül p. 291 ein Geometrisches Netz im Raume genannt hat. Dieses geometrische Verfahren durch fünfzahlige Symbole (71, 75, 82) von Punkten, Ebnen und Linien und durch fünfzahlige Typen (78), wenigstens bis zum Ende der zweiten Construction, auszudrücken, ist eine nützliche Uebung für die Anwendung der zuletzt aufgestellten Sätze und daher auch schliesslich der Methode der Vectoren, die der Gegenstand des vorliegenden Theiles ist. Die fünfzahlige Form ist hier passender als die vierzahlige, denn sie zeigt viel deutlicher die geometrische Abhängigkeit der abgeleiteten Punkte und Ebnen von den fünf gegebenen Punkten und dabei setzt sie uns in den Stand, durch einen Satz der Symmetrie, die Anzahl der verschiedenen Typen zu reduciren.

89. Wir haben gesehen (78), dass der fünfzahlige Typus der fünf gegebenen Punkten, P_0, (10000) ist; während der den zehn abgeleiteten Punkte P_1 der ersten Construction entsprechende Typus gleich (00011) gesetzt werden kann; in der That, wenn man sie als Symbole auffasst, stellen sie die Punkte, A und D_1, dar. Die neun anderen Punkte P_1 sind, $A'B'C'A_1B_1C_1A_2B_2C_2$; und wir haben jetzt (vergl. 83, 87, 86) die Symbole:

$$A' = BC \cdot ADE = (01100), \quad A_1 = EA \cdot BCD = (10001),$$
$$A_2 = DA \cdot BCE = (10010);$$

auch ist es gestattet, in irgend einem Symbol oder einer Gleichung der vorliegenden Form, A, B, C, in B, C, A, zu verwandeln, vorausgesetzt, dass wir zu gleicher Zeit den dritten, ersten und zweiten Coefficienten an Stelle des ersten, zweiten, und dritten setzen; so wird:

$$B' = CA \cdot BDE = (10100), \text{ u. s. w.}$$

Das Symbol $(xy000)$ stellt irgend einen Punkt auf der Linie AB dar; und das Symbol $[00nrs]$, wenn, $n + r + s = 0$, ist,

stellt irgend eine Ebne dar, die durch die Linie geht; sie können daher (vergl. 82) auch als Symbol der Linie AB selbst betrachtet werden und zu gleicher Zeit als Typus der zehn Linien A_1; während das Symbol [00011] der Ebne ABC (75) als Typus der zehn Ebnen Π_1 (78) angesehn werden kann. Endlich können die fünf Pyramiden:

$$BCDE,\quad CADE,\quad ABDE,\quad ABCE,\quad ABCD,$$

und die zehn Dreiecke ABC, u. s. w., von denen jedes eine gemeinsame Fläche zweier solcher Pyramiden ist, die Pyramiden R_1 und die Dreiecke T_1 der ersten Construction genannt werden.

90. Gehen wir zur zweiten Construction (88) über, so finden wir bald, dass die Linien A_2 in zwei verschiedene Gruppen zusammengefasst werden können; eine Gruppe besteht aus fünfzehn Linien $A_{2,1}$, von denen die Linie $AA'D_1$ eine ist, (AB_1C_2, AB_2C_1, $DA'A_1$, $EA'A_2$ sind andere Linien dieser Gruppe), jede verbindet zwei Punkte P_1 und geht auch durch einen Punkt P_0, der in der Durchschnittslinie zweier Ebnen Π_1 durch diesen Punkt liegt, zum Beispiel von ABC, ADE; während die andere Gruppe aus dreissig Linien $A_{2,2}$ besteht, wie $B'C'$, von denen jede zwei Punkte P_1 verbindet, aber nicht durch einen Punkt P_0 geht, und eine der dreissig Kanten der fünf neuen Pyramiden R_2 ist, nämlich:

$$C'B'A_2A_1,\ A'C'B_2B_1,\ B'A'C_2C_1,\ A_2B_2C_2D_1,\ A_1B_1C_1D_1;$$

von diesen Pyramiden R_2 (vergl. 87) kann man sagen, sie seien homolog den fünf vorigen Pyramiden R_1 eingeschrieben; die Mittelpunkte der Homologie dieser fünf Paare von Pyramiden sind die fünf gegebenen Punkte $A \ldots . E$; und die Ebnen der Homologie sind fünf Ebnen $[A] \ldots [E]$, von denen die letzte bereits erwähnt worden ist (87), obwohl sie eigentlich zu einer dritten Construction gehört (88). Die Ebnen Π_2 der zweiten Construction bilden gleichfalls zwei Gruppen; die eine besteht aus fünfzehn Ebnen $\Pi_{2,1}$, wie zum Beispiel die Ebne der fünf Punkte, $AB_1B_2C_1C_2$, von denen jede durch einen Punkt P_0 und durch vier Punkte P_1 geht, und zwei Linien $A_{2,1}$ enthält, so hier die Linien, AB_1C_2, AC_1B_2, und ausserdem vier Linien

Digitized by Google

$A_{2,2}$, so hier $B_1 B_2$, u. s. w. Die andere Gruppe besteht aus zwanzig Ebnen $\Pi_{2,2}$, so wie $A_1 B_1 C_1$, nämlich die zwanzig Seitenflächen der fünf neuen Pyramiden R_2, von denen jede drei Punkte P_1 und drei Linien $A_{2,3}$ enthält, aber nicht durch einen der Punkte P_0 geht. Wir wollen jetzt die geometrischen Gebilde* der fünfundvierzig Linien A_2, der fünfunddreissig Ebnen Π_2 und der fünf Ebnen der Homologie der Pyramiden, $[A] \ldots [E]$, durch fünfzahlige Symbole und Typen ausdrücken, bevor wir dazu übergehn, die Punkte P_2 der zweiten Construction zu bestimmen.

91. Irgend ein Punkt auf der geraden Linie $AA'D_1$ (90) kann durch das Symbol $(tuu00)$ dargestellt werden; und irgend eine Ebne durch diese Linie durch das andere Symbol, $[0m\bar{m}r\bar{r}]$, in dem $\bar{m}$ und $\bar{r}$, um die Kommata zu ersparen, für $-m$ und $-r$ gesetzt sind. Daher können diese beiden Symbole (vergl. 82) auch die Linie $AA'D_1$ selbst bezeichnen und können als Typen (78) gebraucht werden, um die Gruppe von Linien $A_{2,1}$ zu bezeichnen. Das besondere Symbol [01111] der letzten Form stellt die besondere Ebne durch die zuletzt erwähnte Linie dar; sie enthält auch die Linie AB_1C_2 derselben Gruppe. Es kann als Typus für die Gruppe von Ebnen $\Pi_{2,1}$ angesehn werden. Die Linie $B'C'$ und die Gruppe $A_{2,2}$ können dargestellt werden durch $(stu00)$ und $[\bar{t}\bar{t}tu\bar{s}]$, wenn wir übereinkommen** $s = t + u$, und $\bar{s} = -s$ zu setzen. Die Ebne $B'C'A_2$ und die Gruppe $\Pi_{2,2}$ können durch $[\bar{1}1112]$ bezeichnet werden. Endlich hat die Ebne $[E]$ zu ihrem Symbol [11114]; und die vier anderen Ebnen, $[A]$, u. s. w., der Homologie der Pyramiden (90), haben dieses letzte Symbol zu ihren gemeinsamen Typus.

---

* Möbius hat in seinem barycentrischen Calcül, p. 284 u. s. w., die Existenz und die Haupteigenschaften dieser Linien und Ebnen klar bewiesen; aber einmal ist seine Analyse ganz verschieden von der meinigen und dann scheint er nicht beabsichtigt zu haben, alle die Punkte aufzuzählen und zu classificiren, die nach der vorigen Bezeichnung (88) zur zweiten Construction gehören, wir wir es in Kürze gethan haben.

** Mit dieser Uebereinkunft kann die Linie AB und die Gruppe A_1 durch das Ebnen-Symbol $[00tu\bar{s}]$ bezeichnet werden; ihr Punkt-Symbol ist $(tu000)$.

92. Die Punkte P_2 der zweiten Construction (88) sind zahlreicher als die Linien A_2 und Ebnen Π_2 dieser Construction; indess ist es nicht schwer sie mit Hülfe der Typen, wie oben, zu classificiren und aufzuzählen. Es ist hier genügend diese Typen hinzuschreiben, von denen acht gefunden werden können und einige Bemerkungen über sie hinzuzufügen. Wir wollen uns hierzu der folgenden acht typischen Punkte bedienen, von denen uns die beiden ersten schon begegnet sind, und die alle in der Ebne ABC liegen:

$$A'' = (01\bar{1}00);\ A''' = (21100);\ A^{\text{IV}} = (\bar{2}1100);\ A^{\text{V}} = (02100);$$
$$A^{\text{VI}} = (02\bar{1}00);\ A^{\text{VII}} = (12\bar{1}00);\ A^{\text{VIII}} = (32100);\ A^{\text{IX}} = (23\bar{1}00);$$

der zweite und dritte von diesen Punkten haben (10011) und (30011) zu congruenten Symbolen (71). Es ist leicht zu sehn, dass diese acht Typen respective zehn, dreissig, dreissig, zwanzig, zwanzig, sechszig, sechszig und sechszig verschiedene Punkte darstellen, die zu acht Gruppen gehören, die wir mit $P_{2,1} \dots P_{2,8}$ bezeichnen wollen; so dass die Gesammtzahl der Punkte P_2 gleich 290 ist. Wenn wir ferner übereinkommen (88) die gegenwärtige Untersuchung mit der Beendigung dessen abzuschliessen, was wir vorher als die zweite Construction bezeichnet haben, so findet man die ganze Anzahl Netzpunkte, P_1, P_2, die so durch Linien und Ebnen von den fünf gegebenen Punkten P_0 abgeleitet werden können, genau gleich dreihundert; während, wie wir gesehen haben, die gemeinschaftliche Anzahl der Netz-Linien, A_1, A_2, und der Netz-Ebnen, Π_1, Π_2, bis jetzt einhundert ist.

(1.) Zum Typus $P_{2,1}$ gehören die zehn Punkte:

$$A''B''C'', \quad A'_2B'_2C'_2, \quad A'_1B'_1C'_1D'_1,$$

mit den fünfzahligen Symbolen:

$$A'' = (01\bar{1}00), \dots \quad A'_2 = (100\bar{1}0), \dots \quad A'_1 = (1000\bar{1}), \dots$$
$$D'_1 = (0001\bar{1});$$

sie sind harmonisch conjugirt zu den zehn Punkten P_1, nämlich, zu

$$A'B'B', \quad A_2B_2C_2, \quad A_1B_1C_1D_1,$$

in Bezug auf die zehn Linien A_1, auf denen diese Punkte liegen, so dass wir zehn harmonische Gleichungen haben,

Digitized by Google

$(BA'CA'') = -1$, u. s. w., wie wir schon (31, 86, 87) gesehen haben. Jeder Punkt $P_{2,1}$ ist der gemeinsame Durchschnittspunkt einer Linie Λ_1 mit drei Linien $\Lambda_{2,2}$; so können wir die folgenden vier Formeln für das Zusammentreffen aufstellen, die, nach 89, zehn solchen Formeln äquivalent sind:

$$A'' = BC \cdot B'C' \cdot B_1C_1 \cdot B_2C_2; \quad A'_2 = DA \cdot D_1A_1 \cdot B'C_2 \cdot C'B_2;$$
$$A'_1 = EA \cdot D_1A_2 \cdot B'C_1 \cdot C'B_1; \quad D'_1 = DE \cdot A_1A_2 \cdot B_1B_2 \cdot C_1C_2;$$

Jeder Punkt $P_{2,1}$ liegt also in drei Ebnen Π_1, in drei anderen Ebnen der Gruppe $\Pi_{2,1}$ und in sechs Ebnen $\Pi_{2,2}$; zum Beispiel, A'' ist ein gemeinsamer Punkt der zwölf Ebnen:

$$ABC,\ BCD,\ BCE;\ AB_1C_2C_1B_2,\ DB'B_1C'C_1,\ EB'B_2C'C_2.$$
$$B'C'A_1,\ B_1C_1A_1,\ B_2C_2A_2,\ B'C'A_2,\ B_1C_1D_1,\ B_2C_2D_1.$$

Jede Linie Λ_1 oder $\Lambda_{2,2}$ enthält einen Punkt $P_{2,1}$; aber keine Linie $\Lambda_{2,1}$ enthält einen solchen. Jede Ebne Π_1 oder $\Pi_{2,2}$ enthält drei solche Punkte und jede Ebne $\Pi_{2,1}$ enthält zwei, welche die Durchschnittspunkte der gegenüberliegenden Seiten eines Vierseits Q_2 sind, das in dieser Ebne liegt; seine Diagonalen schneiden sich in einem Punkte P_0: zum Beispiel, die Diagonalen, B_1C_2, B_2C_1, des Vierseits, $B_1B_2C_2C_1$, das (nach 90) in einer der Ebnen $\Pi_{2,1}$ liegt, schneiden sich* im Punkte A; während sich die gegenüberliegenden Seiten C_1B_1, B_2C_2, in A'' schneiden; und die beiden anderen gegenüberliegenden Seiten, B_1B_2, C_2C_1, haben den Punkt D'_1 zu ihrem Durchschnittspunkt. Die zehn Punkte $P_{2,1}$ sind gleichfalls zu je dreien auf zehn Linien der dritten Construction Λ_3 angeordnet, nämlich auf den Achsen der Homologie:

$$A''B'_1C'_1, \ldots A''B'_2C'_2, \ldots A'_1A'_2D'_1, \ldots A''B''C'',$$

der zehn Paare von Dreiecken, T_1, T_2, die in den zehn Ebnen Π_1 liegen und für die die Mittelpunkte der Homologie die zehn Punkte P_1 sind; zum Beispiel, die punktirte Linie, $A''B''C''$, in Fig. 21, ist die Achse der Homologie der zwei Dreiecke, ABC, $A'B'C'$, von denen das letztere dem ersteren eingeschrieben ist, und der Punkt O dieser Figur, der in Fig. 29 durch D_1 ersetzt ist, ist ihr Mittelpunkt der Homologie. Dieselben zehn Punkte $P_{2,1}$ sind auch zu je sechs und die zehn letzten

* Vergleiche die Anmerkung zu Art. 90.

Linien A_3 zu je vier in fünf Ebnen Π_3 angeordnet, nämlich in den Ebnen der Homologie der fünf Paare von Pyramiden, R_1, R_2, die schon erwähnt (90) wurden; so enthält die Ebne $[E]$ die sechs Punkte (87), $A''B''C''$ $A'_2B'_2C'_2$, und die vier graden Linien:

$$A''B'_2C'_2,\ B''C'_2A'_2,\ C''A'_2B'_2,\ A''B''C'';$$

diese letzteren sind die Durchschnitte der vier Seitenflächen:

$$DCB,\ DAC,\ DBA,\ ABC,$$

der Pyramide $ABCD$, mit den entsprechenden Seitenflächen:

$$D_1C_1B_1,\ D_1A_1C_1,\ D_1B_1A_1,\ A_1B_1C_1,$$

der ihr eingeschriebenen homologen Pyramide, $A_1B_1C_1D_1$; und sie sind ausserdem in den vier anderen Ebnen:

$$A_2B'C',\ B_2C'A',\ C_2A'B',\ A_2B_2C_2,$$

enthalten; die drei Dreiecke, ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, sind zum Beispiel alle homolog, obwohl sie in verschiedenen Ebnen liegen und haben die Linie $A''B''C''$ zu ihrer gemeinsamen Achse der Homologie. Wir können auch sagen, dass die Linie, $A''B''C''$, die gemeinsame Spur (81) zweier Ebnen $\Pi_{2,2}$ ist, nämlich der Ebnen, $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, auf der Ebne ABC; und ferner, dass der Punkt A'' die gemeinsame Spur zweier Linien $A_{2,2}$ auf der Ebne Π_1 ist, nämlich der Linien, B_1C_1 und B_2C_2; er ist auch die gemeinsame Spur der beiden Linien, $B'_1C'_1$ und $B'_2C'_2$, die zur dritten Construction gehören.

(2.) Ueberhaupt sind die zehn Punkte der zweiten Construction, $A''\ldots$., den Geometern schon wohlbekannt in Verbindung mit der Theorie von transversalen* Linien und Ebnen im Raume; doch es ist von Werth hier zu beachten, mit welcher Einfachheit und Deutlichkeit ihre geometrischen Beziehungen sich durch die hier benutzten fünfzahligen Symbole und Typen ausdrücken lassen (88). Zum Beispiel, die Collinearität (82) der vier Ebnen,

* Die collinearen, complanaren und harmonischen Beziehungen zwischen den zehn Punkten, die wir vorher mit $P_{2,1}$ bezeichnet haben, und die auch von Möbius in seiner Theorie der Netze im Raume in Betracht gezogen worden sind, scheinen zuerst von Carnot in einer Abhandlung über Transversalen bemerkt worden zu sein.

Digitized by Google

ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, und $[E]$ ersieht man sofort aus dem blossen Anblick ihrer vier Symbole:

$$[00011], \quad [11121], \quad [11112], \quad [11114],$$

die die vier fünfzahligen Gleichungen darstellen (75):

$$w - v = 0, \quad x + y + z - 2w - v = 0, \quad x + y + z - w - 2v = 0,$$
$$x + y + z + w - 4v = 0;$$

ausserdem folgt, dass das dreizahlige Symbol (81) der gemeinsamen Spur der drei letzteren auf der ersten [111] ist, so dass diese Spur (nach 38) die Linie, $A''B''C''$, der vorigen Figur 21 ist. Und wenn wir kurz das fünfzahlige Symbol der vier Ebnen, in derselben Reihenfolge und Form wie vorher, mit $[R_0]$ $[R_1]$ $[R_2]$ $[R_3]$ bezeichnen, so sehen wir, dass sie durch die zwei Relationen:

$$[R_1] = -[R_0] + [R_2], \quad [R_3] = 2[R_0] + [R_2],$$

verbunden sind; wenn wir daher die Ebnen selbst mit Π_1, Π_2, Π'_2, Π_3 bezeichnen, so haben wir (vergl. 84) den folgenden Werth für die Anharmonische ihrer Büschel:

$$(\Pi_1\ \Pi_2\ \Pi'_2\ \Pi_3) = -2.$$

Dieses Resultat kann sehr leicht verificirt werden für den Fall, dass $ABCD$ eine reguläre Pyramide und E (vergl. 29) ihr mittlerer Punkt ist; die Ebne Π_3, oder $[E]$, wird in diesem Falle (vergl. 38) die Ebne in der Unendlichkeit, während die drei anderen Ebnen, ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, parallel sind; die zweite liegt zwischen den beiden anderen, aber doppelt so nahe zur dritten als zur ersten.

(3.) Wir können in unseren Bemerkungen über die sieben anderen Typen der Punkte P_2 etwas kürzer sein, denn sie sind, nicht so gut bekannt,* wohl auch überhaupt nicht ganz

* Es scheint nicht, dass irgend einer dieser weiteren Typen oder Gruppen von Punkten P_2 in Verbindung mit dem Netz im Raume bisher schon beachtet worden ist, mit Ausnahme der einen, die wir als die fünfte Gruppe $P_{2,5}$ zusammengefasst haben und die zwei Punkte auf jeder Linie A_1 darstellt, wie der Typus $P_{2,1}$ der, wie wir sahen, einen Punkt auf jeder von den zehn Linien erster Construction darstellt; die fünfte Gruppe, für die wir als Beispiel die Durchschnittspunkte der Linie DE mit den beiden Ebnen, $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$, anführen können, ist bereits von Möbius auf Seite 290 seines schon citirten Werkes hervorgehoben worden, obwohl mit verschiedener Bezeichnung und als Ergebniss einer anderen Rechnung.

so interessant, obwohl mir scheint, dass einige Umstände über ihre Anordnung im Raume hier bemerkt werden können, besonders mit Rücksicht darauf, dass sie uns eine weitere Uebung (88) in dem vorliegenden System von Symbolen und Typen darbieten. Der Typus, $P_{2,2}$, stellt also eine Gruppe von dreissig Punkten dar, für die A''' in Fig. 21 ein Beispiel ist; jeder ist der Durchschnittspunkt einer Linie $\Delta_{2,1}$ mit einer Linie $\Delta_{2,2}$; so ist A''' der Punkt, in dem sich AA' und $B'C'$ schneiden und keiner liegt in irgend einer anderen Linie von denen, die wir bis jetzt betrachtet haben. Ohne zu beabsichtigen hier alle die Linien, Ebnen und Punkte zu beschreiben, die wir als zur dritten Construction gehörig angeführt haben, können wir doch übersehen, dass sie sehr zahlreich sind und dass wir die Ebnen Π_3, und die Linien Δ_3, dieser Construction, ebenso wie die Pyramiden R_2 und die Dreiecke T_2 der zweiten Construction, die wir vorher angeführt haben, nur als allgemeine Bezeichnungen werden ansehen können, die in einem eingehenderen Studium des Gegenstandes nothwendigerweise ausführlicher bezeichnet werden müssen; im Sinne der vorigen Betrachtungen mit $\Pi_{3,1}, \ldots T_{2,1}$. So findet man, dass nicht nur jeder Punkt $P_{2,2}$ eine von den Ecken eines Dreiecks $T_{3,1}$ der dritten Construction ist, — wie A''' vom Dreieck $A'''B'''C'''$ in Fig. 21, — dessen Seiten Linien $\Delta_{3,2}$ sind, von denen jede durch einen Punkt $P_{2,1}$ und durch zwei Punkte $P_{2,2}$ (wie die punktirte Linie, $A'''B'''C'''$, in Fig. 21) geht, sondern dass auch jeder der Punkte $P_{2,2}$ der Durchschnittspunkt zweier neuen Linien der dritten Construction, $\Delta_{3,3}$, ist, von denen jede einen Punkt P_0 mit einem Punkte $P_{2,1}$ verbindet. Zum Beispiel, der Punkt A''' ist die gemeinsame Spur der beiden neuen Linien, DA'_1, EA'_2, auf der Ebne ABC, denn wenn wir für diesen Punkt A''' das zweite seiner beiden congruenten Symbole nehmen, so haben wir (vergl. 73, 82) die Ausdrücke:

$$A''' = (\bar{1}0011) = (D) - (A'_1) = (E) - (A'_2).$$

Wir können daher die Formel für das Zusammentreffen aufstellen (vergl. den kurz vorhergehenden Abschnitt (1).):

$$A''' = AA' \cdot B'C' \cdot DA'_1 \cdot EA'_2;$$

sie stellt ein System von dreissig solchen Formeln dar.

Digitized by Google

(4.) Ich habe bemerkt, dass der Punkt A''' nicht nur durch das fünfzahlige Symbol (21100), sondern auch durch das congruente Symbol, $(\bar{1}0011)$ bezeichnet werden kann; wenn wir daher schreiben:

$$A_0 = (\bar{1}1100), \quad B_0 = (1\bar{1}100), \quad C_0 = (11\bar{1}00),$$

so muss man die drei neuen Punkte $A_0 B_0 C_0$ in der Ebne ABC als syntypisch ansehn, in fünfzahligem Sinne (78), mit den drei Punkten $A'''B'''C'''$ oder als zur selben Gruppe $P_{2,2}$ zugehörig, obwohl sie (vergl. 88) einen verschiedenen dreizahligen Typus haben. Es ist leicht zu sehn, dass, während das Dreieck $A'''B'''C'''$ ein eingeschriebenes homologes Dreieck $T_{3,1}$ (vergl. wieder Fig. 21) des Dreiecks $A'B'C'$, ist, das selbst (vergl. oben (1.)) ein eingeschriebenes homologes Dreieck $T_{2,1}$ eines Dreiecks T_1, nämlich von ABC ist, mit $A''B''C''$ als gemeinsamer Achse der Homologie, das neue Dreieck $A_0 B_0 C_0$ im Gegentheil ein umschriebenes homologes Dreieck $T_{3,2}$ desselben gegebenen Dreiecks T_1 ist, mit derselben Achse $A_{3,1}$. Aber in Folge der syntypischen Relation, die wie vorher für den Raum zwischen den Punkten A''' und A_0 existirt, können wir erwarten, dass sich diese beiden Punkte $P_{2,2}$ in ähnlicher Weise construiren lassen werden, wenn die fünf Punkte P_0 als geometrische Elemente behandelt werden, die symmetrisch oder in ähnlicher Weise als geometrische Elemente in den Constructionen auftreten. Der Punkt A_0 muss daher nicht nur auf einer Linie $A_{2,1}$, nämlich auf AA', liegen, sondern auch auf einer Linie $A_{2,2}$, als die man leicht die Linie $A_1 A_2$ findet, und auf zwei Linien $A_{3,3}$, von denen jede einen Punkt P_0 mit einem Punkt $P_{2,1}$ verbindet; wir werden bald sehen, dass diese beiden letzteren Linien die Linien, BB'' und CC'', sind. Wir können daher die Formel für das Zusammentreffen (vergl. den letzten Absatz (3.)) aufstelllen:

$$A_0 = AA' \cdot A_1 A_2 \cdot BB'' \cdot CC'';$$

und können die drei Punkte, A_0, B_0, C_0, als die Spuren der drei Linien, $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, ansehen; während die drei neuen Linien, AA', BB', CC'', die der Lage nach mit den Seiten des umschriebenen Dreiecks, $A_0 B_0 C_0$, zusammenfallen, die Spuren $A_{3,3}$ dreier Ebnen $\Pi_{2,1}$ sind, wie $AB_1C_2B_2C_1$, die durch die drei gegebenen Punkte, A, B, C, gehen, aber nicht

die Linien $\Delta_{2,1}$ enthalten, in denen die sechs Punkte $P_{2,2}$ in ihrer Ebne Π_1 liegen. Jede andere Ebne Π_1 enthält ebenso sechs Punkte P_2 der gegenwärtigen Gruppe, jede Ebne $\Pi_{2,1}$ enthält acht von ihnen und jede Ebne $\Pi_{2,2}$ enthält drei. Jede Linie $\Delta_{2,1}$ geht durch zwei von diesen Punkten, aber jede Linie $\Delta_{2,2}$ nur durch einen. Ferner ist jeder Punkt dieser Gruppe $P_{2,2}$ einmal, wie vorher bemerkt wurde, der Durchschnittspunkt zweier Linien Δ_2, und dann zwei Ebnen Π_1, vier Ebnen $\Pi_{2,1}$ und zwei Ebnen $\Pi_{2,2}$ gemeinsam; jeder dieser dreissig Punkte ist auch die gemeinsame Ecke zweier verschiedenen Dreiecke der dritten Construction der zuletzt erwähnten Arten $T_{3,1}$ und $T_{3,2}$, die respective in den beiden Ebnen der ersten Construction liegen, welche den Punkt selbst enthalten. Es mag hinzugefügt werden, dass jeder der beiden Punkte $P_{2,2}$, auf einer Linie $\Delta_{2,1}$, der harmonisch conjugirte eines der beiden Punkte P_1 ist, in Beziehung auf den Punkt P_0 und den zweiten Punkt P_1 auf dieser Linie; so haben wir hier die beiden harmonischen Gleichungen:

$$(A A' D_1 A''') = (A D_1 A' A_0) = -1,$$

durch die die Lagen der beiden Punkte A''' und A_0 bestimmt werden können.

(5.) Eine dritte Gruppe, $P_{2,3}$, der zweiten Construction besteht wie die vorige Gruppe aus dreissig Punkten, die zu je zweien auf den fünfzehn Linien $\Delta_{2,1}$ angeordnet sind und zu je sechs auf den zehn Ebnen Π_1, doch so, dass jeder zwei solchen Ebnen gemeinsam ist; jeder liegt auch in zwei Ebnen $\Pi_{2,1}$, in zwei Ebnen $\Pi_{2,2}$ und auf einer Linie $\Delta_{3,1}$, in der sich (nach dem Abschnitt (1.)) die beiden letzten Ebnen schneiden, und in zweien von den fünf Ebnen $\Pi_{3,1}$; jede Ebne $\Pi_{2,1}$ enthält vier solche Punkte und jede Ebne $\Pi_{2,2}$ enthält drei von ihnen, aber kein Punkt dieser Gruppe liegt auf einer Linie, Δ_1, oder $\Delta_{2,2}$. Die sechs Punkte $P_{2,3}$, die in der Ebne ABC liegen, werden wie die entsprechenden Punkte der letzten Gruppe durch zwei dreizahlige Typen dargestellt, nämlich durch $(\bar{2}\,1\,1)$ und $(3\,1\,1)$; und als Beispiel können die beiden folgenden Punkte angeführt werden, deren dreizahlige Symbole die beiden letzten Ausdrücke sind:

$$A^{IV} = AA' \cdot A''B''C'' = AA' \cdot A_1B_1C_1 \cdot A_2B_2C_2;$$
$$A_1{}^{IV} = AA' \cdot D'_1A'_2A_1 = AA' \cdot B'C_1C_2 \cdot C'B_1B_2.$$

Die drei Punkte der ersten Nebengruppe A^{IV}.. sind collinear, aber die drei Punkte $A_1{}^{IV}$.. der zweiten Nebengruppe sind die Ecken eines neuen Dreiecks, $T_{3,3}$, dass dem Dreieck ABC homolog ist und ebenso all den anderen Dreiecken in seiner Ebne, die wir bisher betrachtet haben, und auch den beiden Dreiecken $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$; die Linie der drei anderen Punkte ist ihre gemeinsame Achse der Homologie und die Seiten des neuen Dreiecks, $A_1{}^{IV}B_1{}^{IV}C_1{}^{IV}$, sind die Spuren der drei Ebnen (vergl. 90) der Homologie der Pyramiden, $[A]$, $[B]$, $[C]$; ebenso ist (vergl. den vorigen Abschnitt (2.) die Linie $A^{IV}B^{IV}C^{IV}$ oder $A''B''C'$, die gemeinsame Spur der beiden anderen Ebnen derselben Gruppe $\Pi_{3,1}$, nämlich der Ebnen $[D]$ und $[E]$. Wir können auch sagen, dass der Punkt $A_1{}^{IV}$ die Spur der Linie $A'_1A'_2$ ist, und da die Linien, $B'C_0$, $C'B_0$, die Spuren der beiden Ebnen $\Pi_{2,2}$ sind, in denen dieser Punkt enthalten ist, so können wir als Formel für das Zusammentreffen hinschreiben:

$$A_1{}^{IV} = AA' \cdot A'_1A'_2 \cdot B'C_0 \cdot C'B_0.$$

(6.) Es mag auch bemerkt werden, dass jeder von zwei Punkten $P_{2,3}$, auf einer Linie $A_{2,1}$, zu einem Punkte $P_{2,2}$, harmonisch conjugirt ist, in Beziehung auf den Punkt P_0 und einen der beiden Punkte P_1 auf dieser Linie; er ist auch harmonisch zu diesem letzteren Punkte conjugirt in Beziehung auf denselben Punkt P_0 und den anderen Punkt $P_{2,2}$; so haben wir auf der Linie $AA'D_1$ die vier harmonischen Gleichungen, die indessen nicht alle von einander unabhängig sind, da zwei von ihnen aus den beiden anderen mit Hülfe der zwei entsprechenden Gleichungen des vierten vorigen Unterabschnittes abgeleitet werden können:

$$(AA'''A'A^{IV}) = (AA'A_0A^{IV}) = (AA_0D_1A_1{}^{IV})$$
$$= (AD_1A'''A_1{}^{IV}) = -1.$$

Die drei Paare von abgeleiteten Punkten, P_1, $P_{2,2}$, $P_{3,3}$, auf einer der Linien $A_{2,1}$ bilden (vergl. 26) mit dem gegebenen Punkte P_0 auf der Linie für einen seiner beiden Doppelpunkte oder Brennpunkte (*foci*) eine Involution; der andere Doppel-

punkt dieser Involution ist ein Punkt P_3 der dritten Construction, nämlich der Punkt, in dem die Linie $A_{2,1}$ diejenige der fünf Ebnen der Homologie $\Pi_{3,1}$ die dem besonderen Punkte P_0 als Mittelpunkt entspricht (vergl. 90), schneidet. Wenn wir daher im gegenwärtigen Beispiele mit A^{x} den Punkt bezeichnen, in dem die Linie AA' die Ebne $[A]$ schneidet, diejenige Ebne, deren Spur (nach 81, 91) auf ABC die Linie [411] ist und die daher — wie wir gezeigt haben — die Seite $B_1^{\mathrm{IV}}C_1^{\mathrm{IV}}$ des zuletzt erwähnten Dreiecks $T_{3,3}$ ist, so dass

$$A^{\mathrm{x}} = (122) = AA' \cdot BC''' \cdot CB''' \cdot B_1^{\mathrm{IV}}C_1^{\mathrm{IV}},$$

so haben wir die drei harmonischen Gleichungen:

$$(AA'A^{\mathrm{x}}D_1) = (AA'''A^{\mathrm{x}}A_0) = (AA^{\mathrm{IV}}A^{\mathrm{x}}A_1^{\mathrm{IV}}) = -1;$$

sie drücken aus, dass der neue Punkt A^{x} der gemeinsame harmonisch conjugirte Punkt zu dem gegebenen Punkte A ist, in Beziehung auf die drei Paare von Punkten, $A'D_1$, $A'''A_0$, $A^{\mathrm{IV}}A_1^{\mathrm{IV}}$, und dass daher diese drei Paare, wie ich schon hervorgehoben habe, eine Involution bilden, deren Doppelpunkte A und A^{x} sind.

(7.) Wir haben jetzt alle Typen von Punkten der zweiten Construction erschöpft, die auf Linien $A_{2,1}$ liegen; es giebt im Ganzen nur vier Punkte auf jeder solchen Linie. Aber wir haben noch zwei neue Gruppen von Punkten P_2 auf Linien A_1 und drei andere auf Linien $A_{2,2}$. Wenn wir unsere Aufmerksamkeit zuerst auf die erste Gruppe von Linien richten, so bemerken wir, dass jede von den zwei neuen Typen, $P_{2,4}$, $P_{2,5}$, zwanzig Punkte darstellt, die zu je zwei auf den zehn Linien der ersten Construction liegen, aber nicht auf irgend einer Linie A_2; ferner liegen sie zu je sechs in den zehn Ebnen Π_1, jeder Punkt ist indessen drei solchen Ebnen gemeinsam; auch jeder Punkt $P_{2,4}$ ist drei Ebnen $\Pi_{2,2}$ gemeinsam und jeder Punkt $P_{2,5}$ liegt in einer solchen Ebne; während jede dieser letzteren Ebnen drei Punkte $P_{2,4}$ enthält, aber nur einen Punkt $P_{2,5}$. Wenn wir nur Punkte in der Ebne ABC in Betracht ziehen, so können wir diese beiden neuen Gruppen durch die beiden dreizahligen Typen, (021) und (021) darstellen, die als Symbole die beiden typischen Punkte:

Digitized by Google

$$A^{V} = BC \cdot C'A_1A_2 \cdot D_1A_1B_1 \cdot D_1A_2B_2,$$
$$A^{VI} = BC \cdot C'B_1B_2 = BC \cdot C'B_0$$

bezeichnen; wir haben auch das Zusammentreffen:

$$A^{V} = BC \cdot C'A_0 \cdot D_1C'' \cdot AB''.$$

Man wird bemerken, dass A^{V} harmonisch conjugirt zu C' in Beziehung auf A_0 und $B^{IV}{}_1$ ist, einem Punkte, der auf derselben Spur $C'A_0$ der Ebne $C'A_1A_2$ liegt, und dass A^{VI} harmonisch conjugirt zu $B_1{}^{V}$ in Beziehung auf C' und B_0 ist, auf der Spur der Ebne $C'B_1B_2$; hier bezeichnet $B_1{}^{V}$ (nach einer Analogie, die bald verständlicher sein wird) den Durchschnittspunkt dieser Spur mit der Linie CA, so dass wir die beiden Gleichungen haben:

$$(A_0C'B_1{}^{IV}A^{V}) = (B_0B_1{}^{V}C'A^{IV}) = -1.$$

(8.) Jede Linie A_1 enthält also zwei Punkte P_2, von jeder der beiden letzten neuen Gruppen ausser dem Punkte $P_{2,1}$, dem Punkte P_1 und den zwei Punkten P_0, die wir vorher betrachtet haben; sie enthält daher im Ganzen acht Punkte, wenn wir vorläufig (88) bei der zweiten Construction stehen bleiben. Es ist leicht zu beweisen, dass diese acht Punkte auf zwei verschiedene Arten so zusammengefasst werden können, dass sie (vergl. Abschnitt (6.)) eine Involution bilden und zwei von ihnen Doppelpunkte derselben sind. So können wir, wenn wir nur Punkte auf der Linie BC in Betracht ziehen und sie durch dreizahlige Symbole darstellen, schreiben:

$$B = (010),\ C = (001),\ A' = (011),\ A'' = (01\bar{1});$$
$$A^{V} = (021),\ A^{VI} = (02\bar{1}),\ A^{V}{}_1 = (012),\ A^{VI}{}_1 = (0\bar{1}2);$$

und daraus ergeben sich die harmonischen Gleichungen:

$$\text{I.}\ldots(BA'CA'') = (BA^{V}CA^{VI}) = (BA_1{}^{V}CA_1{}^{VI}) = -1,$$
$$\text{II.}\ldots(A'BA''C) = (A'A^{V}A''A_1{}^{V}) = (A'A^{VI}A''A_1{}^{VI}) = -1;$$

aus ihnen ergiebt sich, I., dass die beiden Punkte P_0 auf einer Linie A_1 die Doppelpunkte einer Involution sind, in der die Punkte P_1, $P_{2,1}$ ein Paar conjugirter Punkte bilden und die beiden anderen Paare von der gemeinsamen Form $P_{2,4}$, $P_{2,5}$ sind; und II., dass die beiden Punkte P_1 und $P_{2,1}$, auf irgend einer solchen Linie A_1, die Doppelpunkte einer zweiten Involution sind, die man erhält, wenn man die beiden Punkte

von jeder der drei anderen Gruppen zusammenfasst. Auch ist jeder der zwei Punkte P_0, auf einer Linie A_1, harmonisch conjugirt zu einem der beiden Punkte $P_{2,5}$ auf dieser Linie in Beziehung auf den anderen Punkt derselben Gruppe und den Punkt P_1 auf derselben Linie; also

$$(BA'A_1{}^{\text{VI}}A^{\text{VI}}) = (CA'A^{\text{VI}}A_1{}^{\text{VI}}) = -1.$$

(9.) Es bleibt noch übrig kurz drei andere Gruppen von Punkten P_2 zu betrachten, jede Gruppe besteht aus sechzig Punkten; sie liegen zu je zweien auf den dreissig Linien $A_{2,2}$ und zu je sechsen in den zehn Ebnen Π_1. Beschränken wir unsere Aufmerksamkeit auf diejenigen, welche in der Ebne ABC liegen, und bezeichnen sie durch ihre dreizahligen Symbole, so haben wir, auf der Linie $B'C'$, die drei neuen typischen Punkte der drei übrigbleibenden Gruppen, $P_{2,6}$ $P_{2,7}$ $P_{2,8}$:

$$A^{\text{VII}} = (12\bar{1}); \quad A^{\text{VIII}} = (32\,1); \quad A^{\text{IX}} = (23\bar{1});$$

und neben sie können die drei anderen mit denselben drei Typen und auf derselben Linie $B'C'$ gestellt werden:

$$A_1{}^{\text{VII}} = (112); \quad A_1{}^{\text{VIII}} = (312); \quad A_1{}^{\text{IX}} = (2\bar{1}3).$$

Wenn man die drei Punkte A^{VII}, u. s. w., als Durchschnittspunkte einer Linie $A_{2,2}$ mit Linien A_3 in derselben Ebne Π_1 oder mit Ebnen Π_2 ansieht, — nur in dieser letzteren Auffassung gehören sie zur zweiten Construction — so können sie folgendermassen bezeichnet werden:

$$A^{\text{VII}} = B'C' \cdot BB'' \cdot CB''' \cdot AA^{\text{VI}} = B'C' \cdot BC_1A_2A_1C_2;$$
$$A^{\text{VIII}} = B'C' \cdot D_1B'' \cdot AB'''A^{\text{V}} = B'C' \cdot D_1C_1A_1 \cdot D_1C_2A_2;$$
$$A^{\text{IX}} = B'C' \cdot A'C_0B_1{}^{\text{IV}}C_1{}^{\text{V}}B^{\text{VI}} \cdot BA^{\text{IV}}B_1{}^{\text{VI}}B_1{}^{\text{VII}} = B'C' \cdot A'C_1C_2;$$

wir haben ferner die harmonische Gleichung:

$$(C_0A'C_1{}^{\text{V}}A^{\text{IX}}) = -1;$$

entsprechende Ausdrücke erhält man für die drei anderen Punkte, $A_1{}^{\text{VII}}$, u. s. w.. Die Linie $B'C'$ schneidet also eine Ebne $\Pi_{2,1}$ (oder ihre Spur BB'' auf der Ebne ABC) in dem Punkte A^{VII}; sie schneidet zwei Ebnen $\Pi_{2,2}$ (oder ihre gemeinsame Spur D_1B') in A^{VIII}; und eine andere Ebne $\Pi_{2,2}$ (oder ihre Spur $A'C_0$) in A^{IX}; und ebenso ist es mit den anderen Punkten, $A_1{}^{\text{VII}}$, u. s. w., derselben drei Gruppen. Jede Ebne $\Pi_{2,1}$ enthält zwölf Punkte $P_{2,6}$, acht Punkte $P_{2,7}$ und acht Punkte $P_{2,8}$; während jede Ebne $\Pi_{2,2}$ sechs Punkte $P_{2,6}$,

zwölf Punkte $P_{2,7}$ und neun Punkte $P_{2,8}$ enthält. Jeder Punkt $P_{2,6}$ ist in einer Ebne Π_1, in drei Ebnen $\Pi_{2,1}$ und in zwei Ebnen $\Pi_{2,2}$ enthalten. Jeder Punkt $P_{2,7}$ liegt in einer Ebne Π_1, in zwei Ebnen $\Pi_{2,1}$ und in vier Ebnen $\Pi_{2,2}$; ferner liegt jeder Punkt $P_{2,8}$ in einer Ebne Π_1, in zwei Ebnen $\Pi_{2,1}$ und in drei Ebnen $\Pi_{2,2}$.

(10.) Die Punkte der drei letzten Gruppen liegen nur auf Linien $A_{2,2}$; aber auf jeder solchen Linie liegen zwei Punkte von jeder dieser drei Gruppen; sie bilden mit einem Punkte von jeder der beiden vorhergehenden Gruppen $P_{2,1}$ und $P_{2,2}$ und mit den beiden Punkten P_1, durch die die Linie selbst bestimmt ist, ein System von zehn Punkten auf dieser Linie. Zum Beispiel, die Linie $B'C'$ enthält, ausser den sechs im vorhergehenden Abschnitt (9.) erwähnten Punkten, die vier anderen:

$$B' = (101); \quad C' = (110); \quad A'' = (01\bar{1}); \quad A''' = (211).$$

Von diesen zehn Punkten sind die beiden zuletzt erwähnten nämlich die Punkte $P_{2,1}$ und $P_{2,2}$ auf der Linie $A_{2,3}$ die Doppelpunkte (vergl. (8.)) einer neuen Involution, in der die beiden Punkte von jeder der vier anderen Gruppen ein conjugirtes Paar bilden, wie das durch die harmonischen Gleichungen:

$$(A''B'A'''C') = (A''A^{\text{VII}}A'''A_1{}^{\text{VII}}) = (A''A^{\text{VIII}}A'''A_1{}^{\text{VIII}}) = (A''A^{\text{IX}}A'''A_1{}^{\text{IX}}) = -1,$$

ausgedrückt wird. Und die entsprechenden Gleichungen:

$$(B'A''C'A''') = (B'A^{\text{VII}}C'A^{\text{VIII}}) = (B'A_1{}^{\text{VII}}C'A_1{}^{\text{VIII}}) = -1,$$

zeigen, dass die beiden Punkte P_1 auf einer Linie $A_{2,2}$ die Doppelpunkte einer anderen Involution (vergl. wieder (8.)) sind, in der die beiden Punkte $P_{2,1}$, $P_{2,2}$ auf dieser Linie ein Paar conjugirter Punkte bilden, während jeder der beiden Punkte $P_{2,6}$ mit einem der Punkte $P_{2,7}$ ein Paar conjugirter Punkte bilden. Wirklich fällt das achtstrahlige Büschel $(A.C'B'A'''A''A^{\text{VIII}}A^{\text{VII}}A_1{}^{\text{VIII}}A_1{}^{\text{VII}})$ der Lage nach mit dem Büschel $(A.BCA'A''A^{\text{V}}A^{\text{VI}}A_1{}^{\text{V}}A_1{}^{\text{VI}})$ zusammen und kann ein Büschel mit doppelter Involution genannt werden; der dritte und vierte, der fünfte und sechste, und der siebente und achte Strahl bilden eine Involution, deren Doppelstrahlen* der erste und zweite sind; während der erste und zweite, der

* Vergleiche Seite 172 der Höheren Geometrie von M. Chasles.

Digitized by Google

fünfte und siebente, und der sechste und achte Strahl eine andere Involution ausmachen, deren Doppelstrahlen der dritte und vierte Strahl des Büschels sind.

(11.) Wenn wir dazu übergingen, die Punkte P_2 unter einander und mit den Punkten P_1 und P_0 systematisch zu verbinden, so würden wir viele bemerkenswerthe Linien und Ebnen der dritten Construction (88) finden, ausser denjenigen, welche wir vorher mehr zufällig in Betracht gezogen haben; zum Beispiel, wir würden eine Gruppe $\Pi_{3,2}$ von zwanzig neuen Ebnen erhalten, von denen wir die beiden folgenden als Beispiel anführen können:

$$[E_D] = [11103], \qquad [D_E] = [11130];$$

sie haben dieselbe gemeinsame Spur $A_{3,1}$, nämlich die Linie $A''B''C''$, auf der Ebne ABC, wie die beiden Ebnen $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, und die beiden Ebnen $[D]$, $[E]$, der Gruppen $\Pi_{2,2}$ und $\Pi_{3,1}$ die wir in vorigen Abschnitten betrachtet haben; und es findet sich, dass jede dieser neuen Ebnen $\Pi_{3,2}$ einen Punkt P_0, drei Punkte $P_{2,1}$, sechs Punkte $P_{2,2}$ und drei Punkte $P_{2,3}$ enthält. Man kann auch beweisen, dass diese zwanzig neuen Ebnen die zwanzig Seitenflächen von fünf neuen Pyramiden R_3 sind, die den fünf alten Pyramiden R_1 (89) umschrieben und homolog sind; die fünf gegebenen Punkte P_0 sind die zugehörigen Mittelpunkte der Homologie. Doch es würde uns über die selbstgesteckten Grenzen hinausführen, diese Betrachtungen weiterzuführen, obwohl einige wenige zusätzliche Bemerkungen nützlich sein und uns dazu dienen können, die Vollständigkeit der vorher gegebenen Aufzählung von Linien, Ebnen und Punkten der zweiten Construction zu zeigen.

93. Allgemein, wenn irgend welche n Punkte gegeben sind, von denen nicht vier in ein und derselben Ebne liegen, so ist leicht zu sehen, dass die Anzahl N der abgeleiteten Punkte, die man unmittelbar aus ihnen enthält, als Durchschnittspunkte $A \cdot \Pi$ einer Linie mit einer Ebne (jede Linie ist durch zwei von den gegebenen Punkten gezogen und jede Ebne durch drei andere Punkte), oder die Anzahl von Punkten von der Form $AB \cdot CDE$,

$$N = f(n) = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{2\,.\,2\,.\,3},$$

Digitized by Google

ist; so dass $N = 10$, wie vorher, wenn $n = 5$. Aber wenn wir diese Formel auf den Fall $n = 15$ anwenden, so würden wir finden, dass in diesem Falle der Werth,

$$N = f(15) = 15.14.13.11 = 30030,$$

ist; und es würden also fünfzehn gegebene und unabhängige Punkte im Raume durch das, was wir in Bezug auf sie eine erste Construction nennen können (vergl. 88), zu einem Systeme von mehr als dreissigtausend Punkten führen. Doch wir haben kürzlich gezeigt (92), dass von den fünfzehn vorher P_0, P_1 genannten Punkten auf diesem Wege nur zweihundert und neunzig Punkte P_2, als Durchschnittspunkte von der Form* $A \cdot \Pi$, abgeleitet werden können; und also weniger als dreihundert. Dass diese Reduction der Anzahl der abgeleiteten Punkte, zu Ende der sogenannten (88) zweiten Construction für das Netz im Raume, die von der Abhängigkeit der zehn Punkte P_1 von den fünf Punkten P_0 herrührt, sich so beträchtlich erweisen würde, hätte man vielleicht nicht vermuthet; und obwohl die vorige Prüfung beweist, dass alle die acht Typen (92) wirklich Punkte P_2 darstellen, so wäre es doch nach dieser Prüfung möglich, dass irgend ein anderer Typus dieser Punkte ausgelassen worden ist. Eine Untersuchung der Art, in der die Typen von Punkten aus denen von Linien und Ebnen hervorgehen, deren Durchschnittspunkte sie sind, würde sicherlich diese Frage entscheiden; und, in der That, habe ich auf diesem Wege die acht Typen, oder Gruppen von Punkten, $P_{2,1}, \ldots . P_{2,8}$, der zweiten Construction für den Raum aufgesucht und sie ausreichend gefunden. Doch es ist vielleicht nützlich (vergleiche den letzten Abschnitt), die Vollständigkeit der vorigen Aufzählung im Folgenden zu verificiren.

(1.) Die fünfzehn Punkte, P_0, P_1, lassen 105 Combinationen zu je zweien und 455 zu je dreien zu; aber sie bestimmen bei weitem nicht so viele verschiedene Linien und Ebnen. In der

* Die Definition (88) der Punkte P_2 lässt auch Durchschnittspunkte $A \cdot A$ complanarer Linien zu, wenn sie nicht schon Punkte P_0 oder P_1 sind; aber alle solche Durchschnittspunkte sind auch Punkte von der Form $A \cdot \Pi$; so dass an Allgemeinheit nichts verloren wird, wenn wir uns auf die letzte Form beschränken, wie wir es in der gegenwärtigen Behandlung thun wollen.

That, sind diese fünfzehn Punkte durch 25 Collineationen verbunden, die durch die 25 Linien A_1, $A_{2,1}$ dargestellt werden; diese Linien machen daher 75 unter den 105 binären Combinationen der Punkte aus und es bleiben nur noch 30 Combinationen der Art, die durch die dreissig anderen Linien $A_{2,2}$ construirt werden. Ferner haben wir 25 ternäre Combinationen von Punkten, die wie vorher durch Linien dargestellt werden und daher keine Ebne bestimmen. Es sind auch in jeder der zehn Ebnen Π_1 29 $(= 35 - 6)$ Dreiecke T_1, T_2, da jede von diesen Ebnen sieben Punkte P_0, P_1 enthält, die durch sechs Relationen der Collinearität verbunden sind. Ebenso enthält jede der fünfzehn Ebnen $\Pi_{2,1}$ 8 $(= 10 - 2)$ andere Dreiecke T_2, da sie fünf Punkte P_0, P_1 enthält, die durch zwei Collineationen verbunden sind. Es bleiben daher nur 20 $(= 455 - 25 - 290 - 120)$ ternäre Combinationen von Punkten übrig, die anzurechnen sind; und diese sind durch die zwanzig Ebnen $\Pi_{2,2}$ dargestellt. Die Vollständigkeit der Aufzählung der Linien und Ebnen der zweiten Construction ist daher verificirt; und es bleibt nur noch übrig zu zeigen, dass die 305 Punkte, P_0, P_1, P_2, die wir vorher betrachtet haben, alle Durchschnittspunkte $A \cdot \Pi$ der 55 Linien A_1, A_2, mit den 45 Ebnen Π_1, Π_2 darstellen.

(2.) Jede Ebne Π_1 enthält drei Linien von jeder der drei Gruppen, A_1, $A_{2,1}$ $A_{2,2}$; jede Ebne $\Pi_{2,1}$ enthält zwei Linien $A_{2,1}$ und vier Linien $A_{2,2}$; und jede Ebne $\Pi_{2,2}$ enthält drei Linien $A_{2,2}$. Daher (oder da jede Linie A_1 in drei Ebnen Π_1 enthalten ist; jede Linie $A_{2,1}$ in zwei Ebnen Π_1, und in zwei Ebnen $\Pi_{2,1}$, und jede Linie $A_{2,2}$ in einer Ebne Π_1, in zwei Ebnen $\Pi_{2,1}$ und in zwei Ebnen $\Pi_{2,2}$) folgt, dass man, ohne weiter als zur zweiten Construction zu gehen, 240 $(= 30 + 30 + 30 + 30 + 60 + 60)$ Fälle der Coincidenz einer Linie und Ebne hat; so dass die Anzahl von Fällen für den Durchschnitt hierdurch reducirt wird von $55 \cdot 45 = 2475$ auf 2235 $(= 2475 - 240)$.

(3.) Jeder Punkt P_0 stellt zwölf Durchschnitte von der Form $A_1 \cdot \Pi_1$ dar; denn er ist vier Linien A_1 gemeinsam und sechs Ebnen Π_1, jede Ebne enthält zwei von diesen vier Linien und wird von den beiden anderen im Punkte P_0 geschnitten; so wird die Ebne ABC, zum Beispiel, in A durch die beiden

Digitized by Google

Linien AD und AE geschnitten. Ferner ist jeder Punkt P_0 drei Ebnen $\Pi_{2,1}$ gemeinsam, keine von ihnen enthält irgend eine der vier Linien A_1, die durch diesen Punkt gehen; er stellt daher ein System von zwölf anderen Durchschnitten von der Form $A_1 \cdot \Pi_{2,1}$ dar. Ferner ist jeder Punkt P_0 drei Linien $A_{2,1}$ gemeinsam, jede von ihnen ist in zweien von den sechs Ebnen Π_1 enthalten und schneidet die vier anderen im Punkte P_0; er zählt daher für zwölf Durchschnitte von der Form $A_{2,1} \cdot \Pi_1$. Endlich stellt jeder der Punkte P_0 drei Durchschnitte $A_{2,1} \cdot \Pi_{2,1}$ dar, doch keinen anderen Durchschnitt von der Form $A \cdot \Pi$, wenigstens nicht in den Grenzen der bisherigen Untersuchung. So kann also jeder der fünf gegebenen Punkte so angesehen werden, als ob er neununddreissig $(= 12 + 12 + 12 + 3)$ Durchschnitte einer Linie mit einer Ebne darstelle oder construire; und es bleiben daher nur 2040 $(= 2235 - 195)$ andere Fälle von Durchschnitten $A \cdot \Pi$, die bei den 300 abgeleiteten Punkten P_1, P_2 in der gegenwärtigen Verification angerechnet werden können.

(4.) Zu diesem Zweck enthalten die neun, mit I bis IX überschriebenen Columnen in der folgenden Tabelle die Anzahl der Durchschnitte, die respective zu den neun Formen,

$$A_1 \cdot \Pi_1,\ A_1 \cdot \Pi_{2,1},\ A_1, \Pi_{2,2};\quad A_{2,1} \cdot \Pi_1,\ A_{2,1} \cdot \Pi_{2,1},\ A_{2,1} \cdot \Pi_{2,2};$$
$$A_{2,2} \cdot \Pi_1,\ A_{2,2} \cdot \Pi_{2,1},\ A_{2,2} \cdot \Pi_{2,2},$$

gehören für jeden der neun typischen abgeleiteten Punkte, $A' \ldots A^{IX}$, der neun Gruppen P_1, $P_{2,1}, \ldots P_{2,8}$. Columne X enthält für jeden Punkt die Summe der neun Zahlen, die so in die vorhergehenden Columnen eingetragen worden sind; und sie drückt daher die ganze Anzahl der Durchschnitte aus, die ein solcher Punkt darstellt. Columme XI giebt die Anzahl der Punkte an, die zu jedem Typus gehören; und Columne XII enthält die Producte der beiden letzten Zahlen, oder die Anzahl der Durchschnitte $A \cdot \Pi$, die durch die Gruppe dargestellt oder construirt werden. Endlich ist die Summe der Zahlen unter jede der beiden letzten Columnen gesetzt; und da die 300 abgeleiteten Punkte der ersten und zweiten Construction, wie wir fanden, 2040 Durchschnitte darstellen, die aufgezählt worden sind, so sehen wir, dass die Verificirung vollständig ist, und

kein neuer Typus, der Punkte P_2, übrig bleibt, der bisher noch nicht entdeckt wäre.

(5.) Tabelle der Durchschnitte $A' \, \Pi$.

Typus.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
A'	1	6	6	6	12	18	18	24	24	115	10	1150
A''	0	3	6	0	0	0	6	3	12	30	10	300
A'''	0	0	0	0	2	2	1	2	0	7	30	210
A^{IV}	0	0	0	0	0	2	0	0	0	2	30	60
A^{V}	0	0	3	0	0	0	0	0	0	3	20	60
A^{VI}	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	20	20
A^{VII}	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	60	60
A^{VIII}	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	60	120
A^{IX}	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	60	60
											300	2040

(6.) Ich mache darauf aufmerksam, dass wir, nach unserer Definition (88), keine Punkte, die nur als Durchschnitt von drei Ebnen Π_1, Π_2, bestimmt werden können, als zur zweiten Construction gehörig zugelassen haben; auch haben wir keine Linien, als Linien A_2 dieser Construction, mitgezählt, die sich nur als Durchschnitte zweier solcher Ebnen ergeben. Wir haben, zum Beispiel, die Spuren AA'', u. s. w., gewisser Ebnen $A_{2,1}$, die wir in den vorigen Unterabschnitten betrachtet haben, nicht in Betracht gezogen, unter den Linien der zweiten Construction, wenn gleich sie sich sehr bald von selbst in einer Aufzählung der Linien A_3 der dritten Construction ergeben würden. Auch ist kein Punkt in der Ebne ABC, der bis jetzt nur als Durchschnitt zweier solcher Spuren bestimmt werden könnte, als einer der Punkte P_2 in Betracht gezogen worden. Für den Leser ist es vielleicht eine nützliche Uebung, die Ausdrücke für solche Durchschnitte aufzusuchen und zu diesem Zwecke mag hier bemerkt werden, dass die dreizahligen Typen (vergl. 81) der vierundvierzig Spuren von Ebnen Π_1, Π_2 auf der Ebne ABC, die — wie wir fanden — ein System von nur zweiundzwanzig verschiedenen Linien in dieser Ebne bilden, von denen neun Linien A_1, A_2 sind, die folgenden (vergl. 38) sieben sind:

$$[100], [01\bar{1}], [\bar{1}11], [111], [011], [211], [\bar{2}1\bar{1}];$$

Digitized by Google

sie stellen als dreizahlige Symbole die folgenden sieben Linien dar,

$$BC,\ AA',\ B'C',\ A''B''C'',\ AA'',\ D_1A'',\ A'C_0.$$

(7.) Ferner ist der neue Punkt, den wir F nennen wollen, der durch eines der beiden congruenten fünfzahligen Symbole (71),

$$F = (43210) \equiv (01234),$$

bezeichnet werden kann, und der, als fünfzahliger Typus (78), eine neue Gruppe von sechzig Punkten im Raume darstellt, (und nicht mehr in Folge der letzten Congruenz, während ein fünfzahliger Typus, dessen sämmtliche fünf Coefficienten ungleich sind, im Allgemeinen eine Gruppe von 120 verschiedenen Punkten darstellt), nach demselben Grundsatze und mit Rücksicht auf dieselbe Definition von uns nicht als ein Punkt P_2 in Betracht gezogen worden ist; wenngleich dieser neue Punkt F, wie man leicht sieht, der Durchschnitt dreier Ebnen der zweiten Construction ist, nämlich der drei folgenden, die alle zur Gruppe $\Pi_{2,1}$ gehören:

$$[01\bar{1}\bar{1}1],\quad [1\bar{1}0\bar{1}1],\quad [1\bar{1}\bar{1}10],$$

oder $AA'D_1C_1B_2$, $CC'D_1B_1A_2$, $EB'B_2C'C_2$. Es mag übrigens beiläufig bemerkt werden, dass jede Ebne $\Pi_{2,1}$ zwölf Punkte P_3 dieser neuen Gruppe enthält; jeder solcher Punkt ist drei solchen Ebnen gemeinsam, wie aus dem sofort erhellt, was wir gezeigt haben.

94. Aus der vorhergehenden Discussion ergiebt sich, dass die fünf gegebenen Punkte P_0, und die dreihundert abgeleiteten Punkte P_1, P_2 im Raume auf fünfundfünfzig Linien Λ_1, Λ_2, und in fünfundvierzig Ebnen Π_1, Π_2, in folgender Weise angeordnet sind. Jede Linie Λ_1 enthält acht von den 305 Punkten, die auf ihr das bilden, was man (siehe den Unterabschnitt (8) zu 92) eine doppelte Involution nennen kann. Jede Linie $\Lambda_{2,1}$ enthält sieben Punkte, von denen einer, nämlich der gegebene Punkt P_0, wie wir in dem früheren Abschnitt (6.) gesehen haben, ein Doppelpunkt einer anderen Involution ist, zu der die drei abgeleiteten Paare von Punkten P_1, P_2 auf derselben Linie gehören. Jede Linie $\Lambda_{2,2}$ enthält zehn Punkte, die auf ihr eine neue Involution bilden; während acht von diesen zehn Punkten, in einer verschiedenen Anordnung der

Aufeinanderfolge, noch eine andere Involution* bilden (92, (10.)). Ferner enthält jede Ebne Π_1, zweiundfünfzig Punkte, nämlich drei gegebene Punkte, vier Punkte der ersten und 45 Punkte der zweiten Construction. Jede Ebne $\Pi_{2,1}$ enthält siebenund-

* Die Sätze über Involutionen der gegebenen und abgeleiteten Punkte auf Linien der ersten und zweiten Construction für ein Netz im Raume sind wohl neu, wenn auch einige der harmonischen Verhältnisse, die ich vorher erwähnt habe, unter anderen Formen von Möbius bemerkt worden sind, dem wir ja auch, wie ich wiederholt hervorgehoben habe, den Begriff eines solchen Netzes verdanken. So findet man leicht, wenn man (vergleiche die Anmerkung zu Seite 83) die beiden Durchschnittspunkte:

$$E_1 = DE \cdot A_1B_1C_1, \qquad E_2 = DE \cdot A_2B_2C_2,$$

in Betracht zieht, dass sie durch die fünfzahligen Symbole:

$$E_1 = (00012), \qquad E_2 = (00021),$$

bezeichnet werden können; sie sind daher nach Art. 92 die beiden Punkte $P_{2,5}$ auf der Linie DE und folglich muss, nach dem am Ende des Unterabschnittes 8 ausgesprochenen Satze, jedem in Beziehung auf den anderen und den Punkt D_1 einer der beiden Punkte D, E auf dieser Linie conjugirt sein. Demnach können wir sofort durch Vergleichung der Symbole der fünf Punkte, $DED_1E_1E_2$, die beiden folgenden harmonischen Gleichungen aufstellen, die zu demselben Typus wie die beiden letzten des Unterabschnittes 8 gehören:

$$(D_1DE_2E_1) = -1; \qquad (D_1EE_1E_2) = -1;$$

und diese beiden Gleichungen finden sich mit ein wenig verschiedener Bezeichnung auf der schon früher angeführten Seite 290 des barycentrischen Calcüls. (Vergl. wieder die Anmerkung zu Seite 83). Die geometrische Bedeutung der letzten Gleichung kann dadurch erläutert werden, dass man sich vergegenwärtigt, dass $ABCD$ eine reguläre Pyramide und E ihr mittlerer Punkt ist; dann ist (vergl. 92, Unterabschnitt (2.)) D_1 der mittlere Punkt der Basis ABC; D_1D ist die Höhe der Pyramide; und die drei Abschnitte, D_1E, D_1E_1, D_1E_2, sind, respective der vierte, der dritte Theil und die Hälfte dieser Höhe; sie bilden daher, wie es die Formel ausdrückt, eine harmonische Progression; oder D_1 und E_1 sind conjugirte Punkte in Beziehung auf E und E_2. Um ferner ein Beispiel für die doppelte Involution desselben Unterabschnittes (8.) anzuführen, würde es nöthig sein, drei andere Punkte P_2 auf derselben Linie DE zu betrachten; der eine von ihnen, der vorher angeführte Punkt D'_1, gehört zu einer bekannten Gruppe $P_{2,1}$ (92, (2)), die beiden anderen sind von der Gruppe $P_{2,4}$ und scheinen vorher nicht besonders hervorgehoben zu sein. Als ein Beispiel einer Involntion auf einer Linie der dritten Construction mag bemerkt werden, dass auf jeder Linie der Gruppe $A_{3,3}$ oder auf jeder der Seiten irgend eines der zehn Dreiecke $T_{3,2}$ ausser

Digitized by Google

vierzig Punkte, von denen einer ein gegebener Punkt ist, vier sind Punkte P_1, und 42 sind Punkte P_2; von diesen letzteren liegen 38 auf den sechs Linien A_2 in der Ebne, vier sind dagegen Durchschnitte dieser Ebne $\Pi_{2,1}$ mit vier anderen Linien der zweiten Construction. Endlich geht keine Ebne $\Pi_{2,2}$ durch einen gegebenen Punkt, aber jede enthält dreiundvierzig abgeleitete Punkte, von denen vierzig Punkte der zweiten Construction sind. Da die Ebnen der ersten Construction allein Beispiele für alle zehn Gruppen P_0, P_1, $P_{2,1}$, ... $P_{2,8}$ von gegebenen und abgeleiteten Punkten enthalten, und ebenso für alle drei Gruppen von Linien, A_1, $A_{2,1}$, $A_{2,2}$, in den Grenzen der zweiten Construction (denn die Typen, $P_{2,1}$, $P_{2,5}$, A_1, werden nicht durch irgend welche Punkte oder Linien in einer Ebne $\Pi_{2,1}$ dargestellt, und die Typen P_0, A_1, $A_{2,1}$ nicht in einer Ebne $\Pi_{2,2}$) so schien es mir passend die nebenstehende Zeichnung (Fig. 30) zu entwerfen und beizufügen, die dazu dienen kann, durch einige ausgewählte Beispiele, sowohl die Anordnung der zweiundfünfzig Punkte, P_0, P_1, P_2, in einer Ebne Π_1, nämlich in der Ebne ABC, zu erläutern, als die Anordnung der neun Linien A_1, A_2 in dieser Ebne und die Spuren A_3 der anderen Ebnen in ihr.

In dieser Figur ist das angenommene Dreieck ABC, der Einfachheit wegen, als die gleichseitige Basis einer regulären Pyramide $ABCD$ (vergl. Unterabschnitt (2.) zu 92) genommen; und D_1, das wieder durch O ersetzt ist, ist als sein mittlerer Punkt (29) angenommen. Das erste eingeschriebene Dreieck, $A'B'C'$ halbirt daher die drei Seiten; und die Achse der Homologie $A''B''C''$ ist die Linie in der Unendlichkeit (38); die Zahl 1 auf

---

einem gegebenen Punkte P_0 und einem abgeleiteten Punkte $P_{2,1}$ zwei Punkte $P_{2,2}$ und zwei Punkte $P_{2,6}$ liegen und dass die beiden ersten Punkte die Doppelpunkte einer Involution sind, zu der die beiden letzten Paare gehören; so haben wir auf der Seite A_0BC_0 des umschriebenen Dreiecks, $A_0B_0C_0$, oder auf der Spur der Ebne, $BC_1A_2A_1C_2$, die beiden harmonischen Gleichungen:

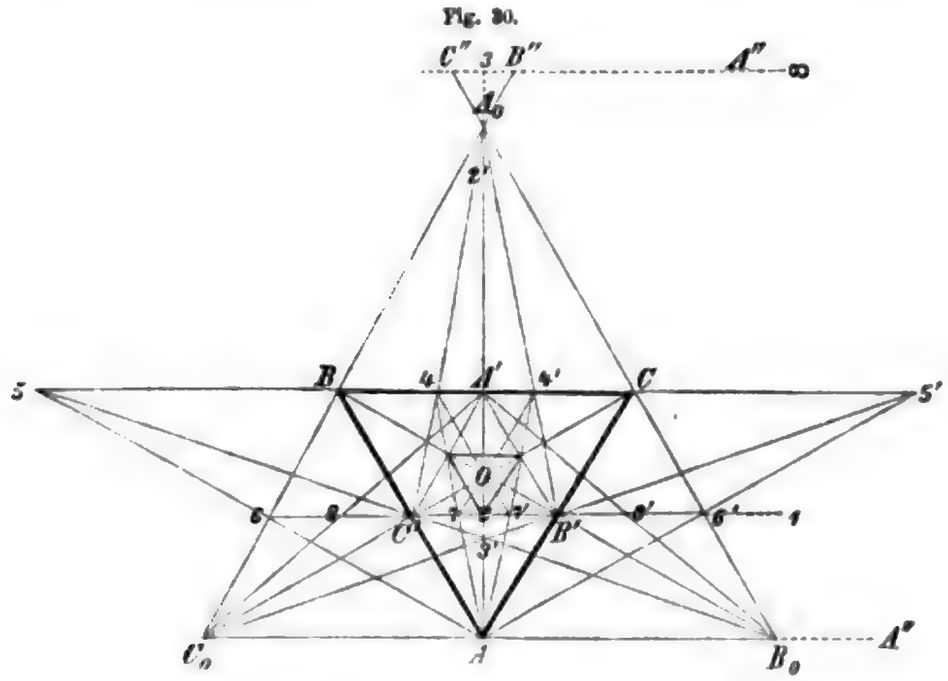
$$(BA_0B''C_0) = (BA^{\text{VII}}B''C_1^{\text{VII}}) = -1.$$

Ferner sind auf der Spur $A'C_0$ der Ebne $A'C_1C_2$, einer Spur, die als eine Linie durch keinen der gegebenen Punkte geht, C_0 und B_1^{VI} die Doppelpunkte einer Involution, in der A' conjugirt zu C_1^{V} und A^{IX} zu B^{VI} ist. Doch es würde langweilig werden solche Beispiele zu häufen.

der Verlängerung der Linie $C'B'$ ist hingesetzt, um daran zu erinnern, dass der Punkt A'', nach dem die Linie hingeht, vom Typus $P_{2,1}$ ist, oder zur ersten Gruppe der Punkte der zweiten Construction gehört. Ein zweites eingeschriebenes Dreieck, $A'''B'''C'''$, das man in Figur 21 nachsehen mag, ist nur durch die Zahl 2 bezeichnet, die in die Mitte der Seite $B'C'$ gesetzt ist, um anzudeuten, dass dieser die Seite halbirende Punkt A''' zu der zweiten Gruppe von Punkten P_2 gehört. Dieselbe Zahl 2, aber mit einem Strich versehen, 2′, ist

Ansicht der Anordnung der Hauptpunkte und Linien in einer Ebne der ersten Construction.

Fig. 20.



dicht unter die Ecke A_0 des umschriebenen Dreiecks $A_0B_0C_0$ gesetzt, um daran zu erinnern, dass diese Ecke durch eine syntypische Beziehung im Raume ebenfalls zu der Gruppe $P_{2,2}$ gehört. Der Punkt A^{IV}, der hier in unendlicher Entfernung liegt, ist durch die Zahl 3 auf der punktirten Linie über der Figur bezeichnet, während dieselbe Zahl, mit einem Strich versehen, weiter unten die Lage des Punktes $A_1{}^{IV}$ andeutet. Endlich geben die zehn anderen gestrichelten und ungestrichelten Zahlen, 4, 4′, 5, 5′, 6, 6′, 7, 7′, 8, 8′, die Oerter der zehn Punkte, A^V, $A_1{}^V$, A^{VI}, $A_1{}^{VI}$, A^{VII}, $A_1{}^{VII}$, A^{VIII}, $A_1{}^{VIII}$, A^{IX}, $A_1{}^{IX}$, an.

Digitized by Google

Ferner kann man sich von der Richtigkeit der hauptsächlichsten vorher erwähnten harmonischen Beziehungen und Beziehungen der Involution durch den Anblick der Zeichnung überzeugen.

95. Wie weit wir auch die Constructionsfolgen des Netzes im Raume fortsetzen mögen, wir können es jedenfalls als augenscheinlich ansehen, wenigstens aus dem Vergleich mit der entsprechenden Eigenschaft (42) des ebenen Netzes, dass jeder Punkt, jede Linie oder Ebne, zu der solche Constructionen führen können, nothwendig rational (77) sein muss, oder dass er in rationaler Beziehung zu dem Systeme der fünf gegebenen Punkte stehen muss; denn die anharmonischen Coordinaten (79, 80) jedes Netzpunktes und jeder Netzebene sind ganzen Zahlen gleich oder proportional. Umgekehrt (vergl. 43) ist jeder Punkt, jede Linie oder Ebne im Raume, die so in rationaler Beziehung zu dem System der Punkte $ABCDE$ steht, ein Punkt, eine Linie oder Ebne des Netzes, welche diese fünf Punkte bestimmen. Daher (vergl. wieder 43) ist es denn auch nicht möglich, irgend einen irrationalen Punkt oder irgend eine rationale Linie oder Ebne (77) in aller Strenge durch irgend eines der vorher beschriebenen Verfahren zu construiren, wenn es auch möglich ist, ihm durch Punkte, Linien oder Ebnen des Netzes unendlich nahe zu kommen. Jedes anharmonische Verhältniss einer Gruppe von Netzpunkten oder eines Büschels von Netzlinien oder von Netzebenen hat einen rationalen Werth (vergl. 44), der nur von dem bei der Erzeugung der Gruppe oder des Büschels angewandten Verfahren der linearen Construction abhängt und völlig unabhängig von der Anordnung oder der Configuration der fünf gegebenen Punkte im Raume ist. Es werden auch alle Beziehungen der Collineation und der Complanarität bei dem Uebergange von einem Netze zu einem anderen durch einen Wechsel des Systems der gegebenen Punkte bewahrt, so dass man kurz sagen kann, (vergleiche wieder 44), dass alle geometrischen Netze im Raume homographische Figuren sind. Endlich sind irgend fünf Punkte*

* Die allgemeinen Eigenschaften (95) des Raumnetzes sind der Sache nach von Möbius entnommen, obwohl, wie ich schon vorher bemerkt habe, die hier angewandte Rechenart neu zu sein scheint; ebenso sind es auch die meisten der vorher gegebenen Sätze in Betreff der Punkte

eines solchen Netzes, von denen nicht vier in einer Ebne liegen, genügend (vergl. 45) zur Bestimmung des ganzen Netzes oder zur linearen Construction aller seiner Punkte, mit Einschluss der fünf gegebenen.

(1.) Es seien zum Beispiel die fünf Punkte $A_1 B_1 C_1 D_1$ und E jetzt als gegeben angenommen und es werde verlangt, die vier Punkte $A B C D$ durch lineare Constructionen aus diesen neuen Daten abzuleiten. Mit anderen Worten, wir sollen jetzt eine Pyramide $A B C D$ einer gegebenen Pyramide $A_1 B_1 C_1 D_1$ so umschreiben, dass sie zu ihr homolog und E für sie der gegebene Mittelpunkt der Homologie ist. Ein leicht verständliches Verfahren ist es (vergl. 45), eine andere homologe Pyramide, $A_3 B_3 C_3 D_3$, so einzuschreiben, dass $A_3 = E A_1 \cdot B_1 C_1 D_1$, u. s. w.; und dann die Durchschnitte entsprechender Flächen, wie $A_1 B_1 C_1$ und $A_3 B_3 C_3$, zu bestimmen; denn diese vier Durchschnittslinien werden in der Ebne $[E]$, der gemeinsamen Ebne der Homologie der drei Pyramiden, liegen und sie sind die Spuren der vier gesuchten Ebnen, $A B C$, u. s. w., die durch die vier gegebenen Punkte D_1 u. s. w. gezogen sind, auf dieser Ebne. Wenn nur verlangt würde eine Ecke A der umschriebenen Pyramide zu construiren, so könnten wir den vorher A^{IV} genannten Punkt als den gemeinsamen Durchschnitt dreier Ebnen, wie folgt, finden:

$$A^{IV} = A_1 B_1 C_1 \cdot A_1 D_1 E \cdot A_3 B_3 C_3;$$

und dann würden wir die andere Formel für einen Durchschnitt haben,

$$A = E A_1 \cdot D_1 A^{IV}.$$

Oder der Punkt A könnte durch die anharmonische Gleichung:

$$(E A A_1 A_3) = 3,$$

bestimmt werden, eine Gleichung, die sich für eine reguläre Pyramide leicht verificiren lässt.

(2.) Was den allgemeinen Uebergang von einem Netze des Raumes zu einem anderen betrifft, so mögen die Symbole $P_1 = (x_1 \ldots v_1), \ldots P_5 = (x_5 \ldots v_5)$ irgend fünf gegebene Punkte be-

---

der zweiten Construction (92), wenigstens wenn wir von der ersten Gruppe $P_{2,1}$ von zehn solchen Punkten absehen, die, wie ich schon ausgesprochen habe, verhältnissmässig lange bekannt gewesen sind.

Digitized by Google

deuten, von denen nicht vier complanar sind; und es mögen $a'b'c'd'e'$ und u' sechs Coefficienten sein, deren fünf Verhältnisse derart sind, dass sie der symbolischen Gleichung (vergl. 71, 72),

$$a'(P_1)+b'(P_2)+c'(P_3)+d'(P_4)+e'(P_5)=-u'(U),$$

genügen; oder den fünf gewöhnlichen Gleichungen, die sie umfasst, nämlich:

$$a'x_1+..+e'x_5=..=a'v_1+\cdots+e'v_5=-u'.$$

Es sei P' irgend ein sechster Punkt des Raumes, dessen fünfzahliges Symbol der Gleichung genügt,

$$(P')=xa'(P_1)+yb'(P_2)+zc'(P_3)+wd'(P_4)+ve'(P_5)+u(U);$$

dann findet man, dass dieser letztere Punkt P' von den fünf Punkten $P_1\cdot\cdot P_5$ durch genau dieselben Constructionen abgeleitet werden kann, als die sind, durch welche der Punkt $P=(xyzwv)$ von den fünf Punkten $ABCDE$ abgeleitet wird. Zum Beispiel, wenn $v'=x+y+z+w-3v$, dann wird der Punkt $(xyzwv')$ aus $A_1B_1C_1D_1E$ durch dieselben Constructionen abgeleitet, wie $(xyzwv)$ von $ABCDE$; so kann A selbst von $A_1\cdot\cdot E$ aus ebenso construirt werden, wie der Punkt $P=(30001)$ von $A..E$ aus; das würde uns von Neuem zu der anharmonischen Gleichung des letzten Unterabschnittes führen.

(3.) Es mag hier in Kürze hinzugefügt werden, dass man statt der anharmonischen Verhältnisse, die mit einem Netze im Raume in Verbindung stehen und überhaupt im Allgemeinen eine Beziehung zu räumlichen Problemen haben, (vergl. 68), Producte (oder Quotienten) von Quotienten der Volumina von Pyramiden setzen kann; als ein besonderes Beispiel für diese Substitution mag angeführt werden, dass die kurz vorher angegebene anharmonische Beziehung durch die folgende Gleichung ersetzt werden kann, die einen solchen Quotienten von Pyramiden enthält, ohne einen Hülfspunkt einzuführen:

$$EA:A_1A=3EB_1C_1D_1:A_1B_1C_1D_1.$$

Im Allgemeinen können wir, wenn $xyzw$ (wie in 79, 83) die anharmonischen Coordinaten eines Punktes P im Raum sind, schreiben:

$$\frac{x}{y}=\frac{PBCD}{PCDA}:\frac{EBCD}{ECDA};$$

ebenso andere Gleichungen derselben Art, bei denen wir hier nicht verweilen können.

Fünfter Abschnitt.

Ueber Schwerpunkte von Punktsystemen und über einfache und zusammengesetzte Mittel von Vectoren.

96. Wenn die Summe $\Sigma\alpha$ irgend einer Anzahl coinitialer Vectoren,

$$\alpha_1 = OA_1, \cdots \qquad \alpha_m = OA_m,$$

durch ihre Anzahl, m, dividirt (16) wird, so heisst der resultirende Vector,

$$\mu = OM = \frac{1}{m}\Sigma\alpha = \frac{1}{m}\Sigma OA,$$

im Allgemeinen das einfache Mittel dieser m Vectoren; und der Punkt M, in dem dieser mittlere Vector endigt, und dessen Lage (vergl. 18), wie leicht zu sehen, unabhängig von der Lage des gemeinschaftlichen Anfangspunktes O ist, heisst der mittlere Punkt (vergl. 29) des Systems der m Punkte, $A_1, \cdots A_m$. Wir haben augenscheinlich die Gleichung:

$$0 = (\alpha_1 - \mu) + \cdots + (\alpha_m - \mu) = \Sigma(\alpha - \mu) = \Sigma MA;$$

oder die Summe der m Vectoren, die vom mittleren Punkte M aus zu den Punkten A des Systems gezogen werden, ist gleich Null. Und daraus (vergl. 10, 11, 30) folgt, 1) dass die m Vectoren gleich den m aufeinanderfolgenden Seiten eines geschlossenen Polygons sind; 2) dass, wenn das System und sein mittlerer Punkt durch irgend welche parallelen Coordinaten auf irgend eine angenommene Ebne (oder Linie) projicirt werden, die Projection M' des mittleren Punktes M der mittlere Punkt des durch Projection erhaltenen Systemes ist; und 3) dass die Ordinate MM' des mittleren Punktes das Mittel aller anderen Ordinaten, $A_1A'_1, \cdots A_mA'_m$ ist. Es folgt auch, dass, wenn N der mittlere Punkt eines anderen Systems, $B_1, \cdots B_n$ ist, und wenn s der mittlere Punkt des gesammten Systems, $A_1 \cdots B_n$, der $m + n = s$ Punkte ist, das man erhält, wenn man die beiden vorigen, die man als Partialsysteme betrachten kann, zusammenfasst, während ν und σ die Vectoren, ON und

Digitized by Google

OS, der mittleren Punkte dieser beiden letzteren bezeichnen, dass wir dann die Gleichungen haben:

$$m\mu = \Sigma\alpha, \quad n\nu = \Sigma\beta, \quad s\sigma = \Sigma\alpha + \Sigma\beta = m\mu + n\nu,$$

$$m(\sigma - \mu) = n(\nu - \sigma),$$

$$m \,.\, MS = n \,.\, SN;$$

so dass der allgemeine mittlere Punkt, s, auf der geraden Linie MN liegt, die die beiden partiellen mittleren Punkte, M und N, verbindet; und er theilt diese Linie im Innern in zwei Abschnitte MS und SN, die umgekehrt proportional den beiden ganzen Zahlen, m und n, sind.

(1.) Zum Beispiel, es sei $ABCD$ ein windschiefes Vierseit und E sein mittlerer Punkt; oder, ausführlicher, es sei

$$OE = \tfrac{1}{4}(OA + OB + OC + OD),$$

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta);$$

d. h. es sei $a = b = c = d$ in den Gleichungen des Art. 65. Dann haben wir, mit kürzlich benutzten Bezeichnungen für gewisse abgeleitete Punkte D_1, u. s. w., wenn wir die Vector-Formeln,

$$OA_1 = \alpha_1 = \tfrac{1}{3}(\beta + \gamma + \delta), \cdots \qquad \delta_1 = \tfrac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma),$$

$$OA_2 = \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \delta), \cdots \qquad \gamma_2 = \tfrac{1}{2}(\gamma + \delta),$$

$$OA' = \alpha' = \tfrac{1}{2}(\beta + \gamma), \cdots \qquad \gamma' = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta),$$

hinschreiben, sieben verschiedene Ausdrücke für den mittleren Vector, ε; nämlich die folgenden:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{4}(\alpha + 3\alpha_1) = \cdots = \tfrac{1}{4}(\delta + 3\delta_1)$$

$$= \tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha_2) \quad = \cdots = \tfrac{1}{2}(\gamma' + \gamma_2).$$

Und diese führen zu den sieben Gleichungen zwischen Segmenten:

$$AE = 3EA_1, \cdots \qquad DE = 3ED_1;$$

$$A'E = EA_2, \cdots \qquad C'E = EC_2;$$

sie beweisen, was auch anderweitig bekannt ist, dass die vier, hier mit, $AA_1, \cdots DD_1$, bezeichneten geraden Linien, von denen jede eine Ecke der Pyramide $ABCD$ mit dem mittleren Punkte der gegenüberliegenden Seite verbindet, einander schneiden und viertheilen in ein und demselben Punkte E; und dass sich die drei gemeinsamen Halbirungslinien, $A'A_2$, $B'B_2$, $C'C_2$, der

Paare von gegenüberliegenden Kanten, wie BC und DA, in demselben mittleren Punkte schneiden und halbiren, so dass die vier Mittelpunkte, C', A', C_2, A_2, der vier aufeinanderfolgenden Seiten AB, u. s. w., des windschiefen Vierseits $ABCD$ in ein und derselben Ebne liegen; sie halbirt auch die gemeinsame Halbirungslinie, $B'B_2$, der beiden Diagonalen, AC und BD.

(2.) In diesem Beispiele ist die Anzahl s der Punkte $A \cdot\cdot D$ vier, die Anzahl der abgeleiteten Linien, die also einander in ihrem gemeinsamen mittleren Punkte E schneiden, ist, wie wir sahen, sieben; und die Anzahl der abgeleiteten Ebnen durch diesen Punkt ist neun, nämlich, in der zuletzt gebrauchten Bezeichnung für das Netz im Raume, vier Linien A_1, drei Linien $A_{2,1}$ sechs Ebnen Π_1, und drei Ebnen $\Pi_{2,1}$. Von diesen neun Ebnen können die sechs ersten (im gegenwärtigen Zusammenhang) dreifache Ebnen genannt werden, denn jede enthält drei Linien (wie zum Beispiel die Ebne ABE die Linien, AA_1, BB_1, $C'C_2$, enthält), die alle durch den mittleren Punkt E gehen; und die drei letzteren können im Gegensatz dazu nicht-dreifache Ebnen genannt werden, denn jede enthält nur zwei durch diesen Punkt gehende Linien, die durch die vorhergehenden Sätze bestimmt sind.

(3.) Es bezeichne allgemein $\varphi\,(s)$ die Anzahl der durch den allgemeinen mittleren Punkt S gehenden Linien eines Gesammtsystems von s gegebenen Punkten, das auf alle mögliche Weise in Partialsysteme zerlegt worden ist; es sei $f\,(s)$ die Anzahl der dreifachen Ebnen, die man erhält, wenn man die gegebenen Punkte in drei solche Partialsysteme zusammenfasst; es bezeichne $\psi\,(s)$ die Anzahl der nicht dreifachen Ebnen, von denen jede in der Weise bestimmt wird, dass man die s Punkte auf zwei verschiedenen Wegen in zwei Partialsysteme zerlegt; und es stelle $F(s) = f(s) + \psi\,(s)$ die Gesammtzahl der verschiedenen Ebnen durch den Punkt S dar; so dass

$$\varphi\,(4) = 7,\quad f(4) = 6,\quad \psi\,(4) = 3,\quad F(4) = 9.$$

Dann ist leicht zu verstehen, dass, wenn wir einen neuen Punkt C einführen, jede alte Linie MN zwei neue Linien liefert, je nachdem wir den neuen Punkt mit dem einen oder anderen der beiden vorigen Partialsysteme, (M) und (N), in

Digitized by Google

eine Gruppe zusammenfassen; und dass ausserdem eine andere neue Linie, nämlich CS, entsteht. Wir haben daher die Gleichung in endlichen Differenzen,

$$\varphi(s+1) = 2\varphi(s) + 1;$$

sie führt, von dem besonderen oben angegebenen Werthe für φ (4), oder schon mit dem einfacheren und leichter zu behandelnden Werthe, $\varphi(2) = 1$, zu dem allgemeinen Ausdruck:

$$\varphi(s) = 2^{s-1} - 1.$$

(4.) Wenn ferner (M) (N) (P) irgend drei Partialsysteme sind, die zusammen das alte oder gegebene Gesammtsystem (S) ausmachen; und wenn wir, indem wir einen neuen Punkt C mit jedem von ihnen der Reihe nach in eine Gruppe zusammenfassen, drei neue Partialsysteme, (M') (N') (P'), bilden, dann liefert uns jede frühere dreifache Ebne, wie MNP, drei neue dreifache Ebnen,

$$M'NP, \qquad MN'P, \qquad MNP';$$

jede frühere Linie, KL, giebt eine neue dreifache Ebne, CKL, und man kann keine neue dreifache Ebne auf irgend eine andere Weise erhalten. Wir haben daher die neue Gleichung in Differenzen:

$$f(s+1) = 3f(s) + \varphi(s).$$

Aber wir haben gesehen, dass

$$\varphi(s+1) = 2\varphi(s) + 1;$$

wenn wir daher jetzt schreiben:

$$f(s) + \varphi(s) = \chi(s),$$

so erhalten wir die fernere Gleichung in endlichen Differenzen:

$$\chi(s+1) = 3\chi(s) + 1.$$

Auch:

$$f(3) = 1, \qquad \varphi(3) = 3, \qquad \chi(3) = 4;$$

daher ist:

$$2\chi(s) = 3^{s-1} - 1,$$

und

$$2f(s) = 3^{s-1} - 2^s + 1.$$

(5.) Endlich ist klar, dass wir die Relation haben:

$$3f(s) + \psi(s) = \tfrac{1}{2}\varphi(s) \cdot (\varphi(s) - 1) = (2^{s-1} - 1)(2^{s-2} - 1);$$

denn die dreifachen Ebnen, jede als drei angesehen, und die

nicht-dreifachen Ebnen, jede als eine angesehen, müssen zusammen alle binären Combinationen der Linien darstellen, die durch den mittleren Punkt S des ganzen Systems gezogen worden sind. Daher ist:

$$2\psi(s) = 2^{2s-2} + 3.2^{s-1} - 3^s - 1;$$

und

$$F(s) = 2^{2s-3} + 2^{s-2} - 3^{s-1};$$

so dass

$$F(s+1) - 4F(s) = 3^{s-1} - 2^{s-1},$$

und

$$\psi(s+1) - 4\psi(s) = 3f(s);$$

diese letzte Gleichung in endlichen Differenzen erlaubt uns eine unabhängige geometrische Deutung.

(6.) Zum Beispiel, die allgemeinen Ausdrücke ergeben:

$$\varphi(5) = 15; \quad f(5) = 25; \quad \psi(5) = 30; \quad F(5) = 55;$$

wenn wir daher ein windschiefes Fünfeck, oder ein System von fünf Punkten im Raume, $A \cdot\cdot E$, annehmen und den mittleren Punkt F dieses Systems bestimmen, so erhalten wir im Allgemeinen eine Gruppe von fünfzehn Linien, von der vorher betrachteten Art, die alle durch den sechsten Punkt F gehen; sie sind im Allgemeinen in fünfundfünfzig verschiedenen Ebnen angeordnet, von denen fünfundzwanzig zu denen zu rechnen sein werden, die wir dreifache genannt haben, die dreissig anderen sind nicht-dreifache Ebnen.

97. Allgemeiner, wenn $\alpha_1 \cdot\cdot \alpha_m$, wie vorher, ein System von m gegebenen und coinitialen Vectoren ist, und wenn $a_1 \cdot\cdot a_m$ irgend ein System von m gegebenen Skalaren (17) ist, dann soll der neue coinitiale Vector β, oder OB, der aus ihnen durch die Formeln:

$$\beta = \frac{a_1 \alpha + \cdot\cdot a_m \alpha_m}{a_1 + \cdot\cdot a_m} = \frac{\Sigma a \alpha}{\Sigma a}, \text{ oder } OB = \frac{\Sigma a\, OA}{\Sigma a},$$

oder durch die Gleichung:

$$\Sigma a(\alpha - \beta) = 0, \text{ oder } \Sigma a\, BA = 0,$$

abgeleitet wird, der complexe mittlere Vector der m gegebenen Vectoren α, oder OA heissen, wenn man die letzteren mit dem

Digitized by Google

System der gegebenen Skalaren, a, als Coefficienten oder als Multiplicatoren (12, 14) behaftet oder in Verbindung gebracht denkt. Man kann auch sagen, dass der abgeleitete Punkt B, dessen (vergl. 96) Lage unabhängig von der des Anfangspunktes O ist, der Schwerpunkt oder Mittelpunkt der Schwere des gegebenen Systems der Punkte $A_1 \cdots$ ist, wenn man sich die Punkte mit den gegebenen Gewichten $a_1 \cdots$ behaftet vorstellt; und es entstehen Sätze über Durchschnitte von Linien und Ebnen, aus der Vergleichung der complexen Mittel, oder Schwerpunkte, der Partial- und Gesammtsysteme, die ganz analog den kürzlich betrachteten (96) sind, für einfache Mittel von Vectoren und von Punkten.

(1.) Zum Beispiel, in dem im Artikel 24 angegebenen Falle, ist der Punkt C der Schwerpunkt des Systems der beiden Punkte A und B, mit den Gewichten a und b; während unter den Bedingungen des Art. 27 der Anfangspunkt O der Schwerpunkt der drei Punkte, A, B, C, mit den drei Gewichten a, b, c ist; und wenn wir die in 34 oder 36 angegebene Formel für ϱ gebrauchen, so haben dieselben drei gegebenen Punkte, A, B, C, den Punkt P in ihrer Ebne zu ihrem Schwerpunkt, wenn sie mit den Gewichten, xa, yb, zc, belastet sind. Ferner ist, bei den Gleichungen 65, E der Schwerpunkt des Systems der vier gegebenen Punkte, A, B, C, D, mit den Gewichten, a, b, c, d; und wenn wir den Ausdruck in 79 für den Vector OP annehmen, dann sind, xa, yb, zc, wd, gleich oder proportional den Gewichten, mit denen dieselben vier Punkte $A \ldots D$ belastet werden müssen, damit der Punkt P im Raume ihr Schwerpunkt ist. In allen diesen Fällen sind die Gewichte gewissen Abschnitten, oder Flächen, oder Volumina proportional (nach 69), von den Arten, die schon betrachtet worden sind; und das, was wir die anharmonischen Coordinaten eines variablen Punktes P in einer Ebne (36) oder im Raume (79) genannt haben, kann dann Quotienten von Gewichtsquotienten genannt werden.

(2.) Der Umstand, dass die Lage eines Schwerpunktes (97) gleich derjenigen eines einfachen mittleren Punktes (96) unabhängig von der Lage des angenommenen Anfangspunktes der Vectoren ist, kann von uns dazu benutzt werden (vergl. 69), das Symbol O dieses willkürlichen und nicht eigentlich zum

Systeme gehörigen Punktes fortzulassen; und daher, unter den zuletzt angenommenen Bedingungen, einfach zu schreiben:*

$$B = \frac{\Sigma a A}{\Sigma a} \text{ oder } bB = \Sigma a \mathrm{A}, \text{ wenn } b = a.$$

Es ist nach den schon aufgestellten Sätzen leicht zu beweisen (vergl. 96), dass die Ordinate des Schwerpunktes eines gegebenen Systems von Punkten das complexe Mittel (in dem vorher angegebenen Sinne und mit demselben System von Gewichten) der Ordinaten der Punkte dieses Systems ist, in Beziehung auf irgend eine gegebene Ebne; und dass die Projection des Schwerpunktes auf irgend eine solche Ebne der Schwerpunkt des projicirten Systems ist.

(3.) Ohne Beziehung auf Coordinaten, oder irgend einen nicht zum System gehörigen fremden Anfangspunkt, kann die barycentrische Bezeichnung $B = \frac{\Sigma a A}{\Sigma a}$ durch unsere fundamentale Definition (Art. 1) in Betreff der geometrischen Bedeutung des Symbols $B - A$, nach der man es auffasst als eine Bezeichnung des Vectors von A nach B, gedeutet werden, in Verbindung mit den Regeln über die Multiplication solcher Vectoren durch Skalare (14, 17) und denen über die Summation, (6, 7, 8, 9), dieser, im Allgemeinen neuen, Vectoren, welche die Ergebnisse (15) solcher Multiplicationen sind. Denn wir brauchen nur die Formel in folgender Weise zu schreiben:

$$\Sigma a (A - B) = 0;$$

um zu sehen, dass sie ausdrückt, dass das System der Vectoren vom Schwerpunkt B zum System der gegebenen Punkte A_1, $A_2 \cdots$, wenn sie respective mit den Skalaren oder Coefficienten des gegebenen Systems $a_1, a_2, \cdots$ multiplicirt werden, im Allgemeinen ein neues System von Vectoren ergiebt, dessen Summe Null ist; und zwar in der Art, dass die letzteren Vectoren $a_1 \cdot BA_1$, $a_2 \cdot BA_2, \cdots$ zu den aufeinanderfolgenden Seiten eines geschlossenen Polygons gemacht werden können (10), durch Fortbewegungen ohne Drehung.

---

* Wir würden so einige der hauptsächlichsten Bezeichnungen des barycentrischen Calcüls haben, doch hier hauptsächlich mit Rücksicht auf Vectoren gebraucht. Vergleiche die Anmerkung zu Seite 56.

Digitized by Google

(4.) Wenn wir also die Formel antreffen:

$$B = \tfrac{1}{2}(A_1 + A_2),$$

können wir sie demnach als eine abgekürzte Form der Gleichung:

$$OB = \tfrac{1}{2}(OA_1 + OA_2),$$

ansehen; sie sagt aus, dass, wenn O irgend ein willkürlicher Punkt ist und O' der Punkt, welcher das Parallelogramm $A_1 O A_2 O'$ vervollständigt (vergl. 6), dass dann B der Punkt ist, welcher die Diagonale OO' halbirt, und daher auch die gegebene Linie $A_1 A_2$, die hier die andere Diagonale ist. Aber wir können die Formel auch als eine rein symbolische Transformation der Gleichung:

$$(A_2 - B) + (A_1 - B) = 0,$$

ansehen; sie drückt nach den ersten Sätzen dieses Theiles aus, dass die beiden Vectoren von B nach den gegebenen beiden Punkten A_1 und A_2 die Summe Null haben; oder dass sie der Länge nach gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt sind, und das kann nur der Fall sein, wenn B die Linie $A_1 A_2$ halbirt, wie vorher.

(5.) Ferner kann die Formel:

$$B_1 = \tfrac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3),$$

als eine Abkürzung der Gleichung:

$$OB_1 = \tfrac{1}{3}(OA_1 + OA_2 + OA_3),$$

angesehen werden; sie drückt aus, dass der Punkt B_1 auf einem Drittel der Diagonale OO' des Parallelepipeds (vergl. 62) liegt, dessen drei coinitiale Seiten, OA_1, OA_2, OA_3, sind. Aber dieselbe Formel kann auch, in voller Uebereinstimmung mit der vorigen Deutung, als der Ausdruck dafür angesehen werden, dass die Summe der drei Vectoren von B_1 zu den drei Punkten, A_1, A_2, A_3, verschwindet; das ist aber die charakteristische Eigenschaft (30) des mittleren Punktes des Dreiecks $A_1 A_2 A_3$. Aehnliches gilt in verwickelteren Fällen; die Berechtigung solcher Transformationen wird hier als eine Folge der ursprünglichen Deutung (1) des Symbols $B - A$ und der Regeln über Operationen an Vectoren, so weit sie bisher aufgestellt worden sind, angesehen.

Sechster Abschnitt.

Ueber anharmonische Gleichungen und Vector-Ausdrücke für Oberflächen und Curven im Raume.

98. Wenn die vier variablen Skalare oder anharmonischen Coordinaten, $xyzw$, in dem Ausdruck 79 für den Vector ϱ eines variablen Punktes P im Raume durch eine gegebene algebraische Gleichung:

$$f_p(x, y, z, w) = 0, \text{ oder kurz } f = 0,$$

verbunden (vergl. 46) sind, die wir uns als ganz, rational und homogen von der p^{ten} Dimension denken wollen, dann ist der Ort des Punktes P eine Oberfläche p^{ter} Ordnung, deren Punkt-Gleichung $f = 0$ genannt werden kann (vergl. 56). Denn wenn wir statt der Coordinaten $x \cdots w$, Ausdrücke von der Form:

$$x = tx_0 + ux_1, \cdots \quad w = tw_0 + uw_1,$$

einsetzen, um anzuzeigen (82), dass P mit zwei gegebenen Punkten, P_0, P_1, collinear ist, so ist die resultirende algebraischen Gleichung in $t:u$ vom p^{ten} Grade; so dass man, nach einer jetzt angenommenen Ausdrucksweise, sagen kann, die Oberfläche werde in p Punkten (die verschieden oder zusammenfallend, reell oder imaginär* sein können), von einer beliebigen geraden Linien, P_0P_1, geschnitten. Und ebenso hat, wenn die vier anharmonischen Coordinaten $lmnr$ einer variablen Ebne Π (80) durch eine algebraische Gleichung, von der Form:

$$F_q(l, m, n, r) = 0, \text{ oder kürzer } F = 0,$$

verbunden sind, in der F eine ganze rationale Function bedeutet, die wir als homogen von der q^{ten} Dimension voraussetzen

* Es muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass hier keine Deutung für derartige imaginäre Durchschnitte vorgeschlagen wird, wie es die Durchschnitte einer Kugel mit einer ganz ausser ihr gelegenen geraden Linie sind. Der Sprachgebrauch der neueren Geometrie erfordert, dass man sie mit nennt und sie auch mitzählt; gerade wie es der Sprachgebrauch der Algebra verlangt, dass man die imaginären Wurzeln einer Gleichung mitzählt. Doch es würde ein Irrthum sein, geometrische Imaginäre von dieser Art mit derjenigen Quadratwurzel aus negativen Grössen zu verwechseln, für die, wie wir bald sehen werden, der Quaternionencalcül gleich von Anfang an eine bestimmte und reelle Bedeutung an die Hand giebt.

wollen, die Ebne Π zu ihrer Einhüllenden (vergl. 56) eine Oberfläche der q^{ten} Klasse, deren Tangentialgleichung $F = 0$ ist; denn wenn wir:

$$l = tl_0 + ul_1, \cdots \quad r = tr_0 + ur_1,$$

setzen, um auszudrücken (vergl. 82), dass die variable Ebne Π durch eine gegebene gerade Linie $\Pi_0 \Pi_1$ geht, so kommen wir zu einer algebraischen Gleichung q^{ten} Grades, die q (reele oder imaginäre) Werte des Verhältnisses $t:u$ liefert, und daher q (reele oder imaginäre*) Tangentialebenen der Oberfläche bestimmt, die durch irgend eine solche willkürlich gegebene gerade Linie gehen. Wir können hinzufügen (vergl. 51, 56), dass wenn die Functionen f und F nur homogene sind (ohne nothwendigerweise ganz und rational zu sein), dass dann

$$[D_x f,\ D_y f,\ D_z f,\ D_w f],$$

das anharmonische Symbol (80) der Tangentialebene zur Oberfläche $f = 0$, im Punkte $(xyzw)$ ist; und dass

$$(D_l F,\ D_m F,\ D_n F,\ D_r F),$$

ebenso ein Symbol für den Berührungspunkt der Ebne $[lmnr]$ mit ihrer eingehüllten Fläche, $F = 0$, ist; $D_x, \cdots D_l, \cdots$ sind die charakteristischen Bezeichnungen für partielle Ableitungen.

(1.) Zum Beispiel, die Oberfläche zweiter Ordnung, die durch die zuletzt genannten neun Punkte,

$$A,\ C',\ B,\ A'\ C,\ C_2,\ D,\ A_2,\ E,$$

geht, hat die Punktgleichung,

$$0 = f = xz - yw;$$

sie giebt durch Differentiation,

$$l = D_x f = z; \qquad m = D_y f = -w;$$
$$n = D_z f = x; \qquad r = D_w f = -y;$$

so dass:

$$[z, -w,\ \ x, -y,],$$

ein Symbol für die Tangentialebene im Punkte (x, y, z, w) ist.

(2.) In der That ist die hier betrachtete Oberfläche das durch Bewegung einer Geraden entstandene (oder hyperbo-

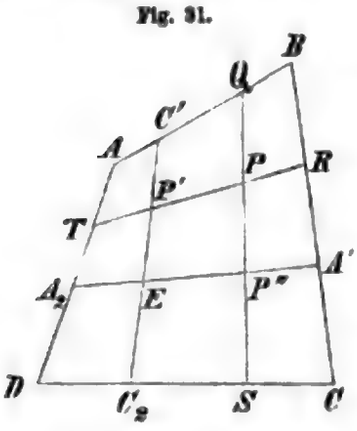
* Was den nicht zu deutenden Charakter solcher imaginärer Berührungen in der Geometrie betrifft, so mag man die vorhergehende Anmerkung zu dem gegenwärtigen Artikel über imaginäre Durchschnittspunkte nachsehen.

lische) Hyperboloid, dem das windschiefe Vierseit $ABCD$ umschrieben ist und das auch durch den Punkt E geht; und wenn wir schreiben:

$$P = (xyzw), \quad Q = (xy00), \quad R = (0yz0),$$
$$S = (00zw), \quad T = (x00w);$$

dann sind QS und RT (siehe die nebenstehende Figur 31), nämlich die Linien, die durch P so gezogen sind, dass sie die beiden Paare, AB, CD, und BC, DA, der gegenüberliegenden Seiten des Vierseits $ABCD$ schneiden, die beiden erzeugenden Linien, oder die Erzeugenden, durch diesen Punkt; so dass ihre Ebne, $QRST$, die Tangentialebene zur Oberfläche im Punkte P ist. Wenn wir dann diese Tangentialebene durch das Symbol $[lmnr]$ bezeichnen, so haben wir die Bedingungsgleichungen:

Fig. 31.



$$0 = lx + my = my + nz = nz + rw = rw + lx;$$

daraus folgt die Proportion:

$$l : m : n : r = x^{-1} : -y^{-1} : z^{-1} : -w^{-1};$$

oder, da $xz = yw$,

$$l : m : n : r = z : -w : x : -y,$$

wie vorher.

(3.) Zu gleicher Zeit sehen wir, dass

$$(AC'BQ) = \frac{x}{y} = \frac{w}{z} = (DC_2CS);$$

so dass die variable Erzeugende QS die beiden festen Erzeugenden AB und DC homographisch* theilt, wie bekannt ist; AD, BC und $C'C_2$, sind drei ihrer Lagen. Umgekehrt, wenn verlangt würde, den Ort der geraden Linien QS zu finden, die so zwei gegebene gerade Linie im Raume homographisch (vergl. 26) theilt, so könnten wir AB und DC zu diesen beiden gegebenen Linien nehmen, und AD, BC, $C'C_2$, mit der zuletzt erwähnten Bedeutung der Buchstaben zu drei gegebenen Lagen

* Vergleiche p. 298 der *Géometrie Supérieure*.

Digitized by Google

der veränderlichen Linie und dann würden wir als die beiden variablen, aber entsprechenden (oder homologen) Punkte Q, S selbst haben und für irgend einen willkürlichen, mit ihnen collinearen Punkt P anharmonische Symbole von den Formen:

$$Q = (s, u, 0, 0), \quad S = (0, 0, u, s), \quad P = (st, tu, uv, vs);$$

denn, nach 82, würden wir zwischen diesen drei Symbolen eine Relation von der Form:

$$(P) = t(Q) + v(S),$$

haben; wenn wir dann schreiben: $P = (x, y, z, w)$, so erhalten wir die anharmonische Gleichung $xz = yw$, wie vorher; so dass der Ort der Linie QS oder des Punktes P, wie bekannt, eine Regelfläche der zweiten Ordnung ist.

(4.) Was die bekannte doppelte Erzeugungsart dieser Fläche betrifft, so mag es genügen, hier zu bemerken, dass, wenn wir in derselben Weise schreiben:

$$R = (0tv0), \quad T = (t00v), \quad (P) = u(R) + s(T),$$

wir weiter den Ausdruck:

$$P = (st, tu, uv, vs)$$

erhalten, der ergiebt:

$$xz = yw,$$

wie vorher; so dass dasselbe Hyperboloid auch der Ort dieser zweiten Linie RT ist, die das andere Paar gegenüberliegender Seiten, BC, AD, desselben windschiefen Vierseits $ABCD$ homographisch theilt; BA, CD und $A'A_2$, sind drei ihrer Lagen und von den Linien, $A'A_2$, $C'C_2$, nehmen wir auch jetzt noch an, dass sie sich im gegebenen Punkte E schneiden.

(5.) Das Symbol eines willkürlichen Punktes auf der veränderlichen Linie RT ist (nach Subartikel 2) von der Form, $t(0, y, z, 0) + u(x, 0, 0, w)$, oder (ux, ty, tz, uw); während das Symbol eines beliebigen Punktes auf der gegebenen Linie $C'C_2$ gleich (t', t', u', u'), ist. Und diese beiden Symbole stellen ein und denselben Punkt dar (vergl. Fig. 31):

$$P' = RT \cdot C'C_2 = (y, y, z, z),$$

wenn wir annehmen, dass

$$t' = y, \; u' = z, \; t = 1, \; u = \frac{y}{x} = \frac{z}{w}.$$

Daraus ergiebt sich der bekannte Satz, dass eine veränderliche

erzeugende Linie (Generatrix), RT, eines Systems, drei feste Geraden, BC, AD, $C'C_2$, schneidet, die die Erzeugenden des anderen Systems sind. Umgekehrt werden wir durch dieselbe Vergleichung von Symbolen für Punkte auf den beiden Linien RT und $C'C_2$ zu der Gleichung $xz = yw$ geführt, als der Bedingung für ihren Durchschnitt; und so würden wir auch den bekannten Satz erhalten, dass der Ort einer geraden Linie, die drei gegebene gerade Linien im Raume schneidet, im Allgemeinen ein Hyperboloid ist, dessen drei Erzeugende die drei Geraden sind. Eine ähnliche Rechnung zeigt, dass QS die Linie $A'A_2$ in einem Punkte (vergl. wieder Fig. 31) schneidet, der in folgender Weise bezeichnet werden kann:

$$P'' = QS \cdot A'A_2 = (xyyx).$$

(6.) Als ein anderes Beispiel der Behandlung von Oberflächen durch ihre anharmonischen und Punkt-Gleichungen können wir anführen, dass die zuletzt erwähnten Symbole für P' und P'', in Verbindung mit denen des Subartikels 2 für P, Q, R, S, T, ferner mit den Symbolen der Artikel 83, 86 für C', A', C_2, A_2, E, und mit der Gleichung $xz = yw$, die Ausdrücke ergeben:

$$(P) = (Q) + (S) = (R) + (T);$$

$$(P') = y(C') + z(C_2) = (R) + \frac{y}{x}(T);$$

$$(E) = (C') + (C_2) = (A') + (A_2);$$

$$(P'') = y(A') + x(A_2) = (Q) + \frac{y}{z}(S);$$

daraus folgt (84), dass die beiden Punkte P', P'', und die Seiten des Vierseits $ABCD$, die vier erzeugenden Linien durch P und E in folgenden anharmonischen Verhältnissen theilen:

$$(C'EC_2P') = (QP''SP) = \frac{y}{z} = (BA'CR) = (AA_2DT);$$

$$(A'EA_2P'') = (RP'TP) = \frac{y}{x} = (BC'AQ) = (CC_2DS);$$

so dass sowohl die variablen Erzeugenden als auch die festen Linien des Hyperboloids sämmtlich homographisch getheilt werden, wie auch schon bekannt ist.

(7.) Die Tangentialgleichung der oben erwähnten Ober-

Digitized by Google

fläche findet man leicht durch die Ausdrücke in Nebenart. 1 für die Coordinaten $lmnr$ der Tangentialebene; sie lautet:

$$0 = F = ln - mr;$$

sie kann gedeutet werden als der Ausdruck dafür, dass dies Hyperboloid diejenige Oberfläche der zweiten Klasse ist, welche die neun Ebnen berühren,

[1000], [0100], [0010], [0001], [1100], [0110], [0011], [1001], [1111];

oder wenn wir die zuletzt gebrauchten Buchstaben-Symbole anwenden, (vergl. 86, 87), die Ebnen:

BCD, CDA, DAB, ABC, CDC'', DAA'', ABC'_2, BCA'_2, und $[E]$.

Oder wir können dieselbe Tangentialgleichung $F = 0$ auch deuten als Ausdruck dafür (vergl. wieder 86, 87, wo Q, L, N jetzt durch T, R, Q ersetzt sind), dass die Oberfläche die Enveloppe einer Ebne $QRST$ ist, die einer der beiden mit einander verbundenen Bedingungsgleichungen der Homographie genügt:

$$(BC'AQ) = -\frac{l}{m} = -\frac{r}{n} = (CC_2DS);$$

$$(CA'BR) = -\frac{m}{n} = -\frac{l}{r} = (DA_2AT);$$

und so zeigt sich die zweifache Erzeugungsart des Hyperboloids auf einem neuen Wege. Und was den Uebergang oder die Rückkehr von der Tangential- zur Punkt-Gleichung (vergl. 56) betrifft, so haben wir in dem gegenwärtigen Beispiele die Formeln:

$$x = D_l F = n; \quad y = D_m F = -r; \quad z = D_n F = l;$$
$$w = D_r F = -m;$$

daraus folgt:

$$xz - yw = 0,$$

wie vorher.

(8.) Allgemeiner, wenn die Oberfläche von der zweiten Ordnung, und daher auch von der zweiten Klasse ist, so dass die beiden Functionen f und F, wenn sie in rationalen und ganzen Formen dargestellt sind, beide homogen von der zweiten

Dimension sind, dann ist der Punkt $P = (xyzw)$, mag man $l \cdot\cdot r$ von $x \cdot\cdot\cdot w$ durch die Formeln:

$$l = D_x f, \quad m = D_y f, \quad n = D_z f, \quad r = D_w f,$$

ableiten, oder $x \cdot\cdot\cdot w$ von $l \cdot\cdot r$ durch die umgekehrten Formeln:

$$x = D_l F, \quad y = D_m F, \quad z = D_n F, \quad w = D_r F,$$

in Beziehung zur Oberfläche, was gewöhnlich (vergl. 52) der Pol der Ebne $\Pi = [lmnr]$ genannt wird; und umgekehrt, die Ebne Π ist die Polare des Punktes P; wo auch immer der Punkt P und die Ebne Π, die in dieser Beziehung zu einander stehen, im Raume liegen mögen. Und da der Mittelpunkt einer Oberfläche zweiter Ordnung, wie bekannt (vergl. wieder 52), der Pol der sogenannten Ebne in der Unendlichkeit ist, während (vergl. 38) die Gleichung und das Symbol dieser letzteren Ebne, respective,

$$ax + by + cz + dw = 0, \text{ und } [a, b, c, d]$$

sind, wobei die vier Constanten $abcd$ noch dieselbe Bedeutung in Beziehung auf das System der fünf gegebenen Punkte $ABCDE$ haben, wie in 65, 70, 79, u. s. w.; so folgt, dass wir diesen Mittelpunkt durch das Symbol:

$$K = (D_a F_0, \ D_b F_0, \ D_c F_0, \ D_d F_0),$$

bezeichnen können; wo F_0 zur Abkürzung die Function $F(abcd)$ bezeichnet und d wieder ein konstanter Skalar ist.

(9.) In dem letzten Beispiel haben wir,

$$F_0 = ac - bd;$$

und das anharmonische Symbol für den Mittelpunkt des Hyperboloids wird also:

$$K = (c, -d, \ a, -b).$$

Wenn wir demnach setzen (vergl. die Unterart. 3, 4),

$$P = (st, \ tu, \ uv, \ vs), \quad P' = (s't', -t'u', \ u'v', -v's'),$$

wo, s, t, u, v, irgend vier Skalare sind und P' ein neuer Punkt, während:

$$s' = bt + cv, \quad t' = cu + ds, \quad u' = dv + at, \quad v' = as + bu;$$

wenn wir ferner zur Abkürzung schreiben:

$$e' = ac - bd, \quad w' = ast + btu + cuv + dvs,$$

Digitized by Google

so haben wir die symbolischen Beziehungen:

$$e'(P) + (P') = w'(K), \quad e'(P) - (P') = (P''),$$

wenn:

$$P'' = (x''y''z''w'')$$

der neue Punkt ist, dessen Coordinaten,

$$x'' = 2e'st - cw', \quad y'' = 2e'tu + dw', \quad z'' = 2e'uv - aw',$$
$$w'' = 2e'vs + bw'$$

sind, und daher ist:

$$ax'' + by'' + cz'' + dw'' = 0.$$

Dass heisst, wenn PP' irgend eine Sehne des Hyperboloides ist, die durch den festen Punkt K geht, und wenn P'' der harmonisch conjugirte dieses festen Punktes in Beziehung auf die veränderliche Sehne ist, so dass $(PKP'P'') = -1$, dann liegt der conjugirte Punkt P'' auf der unendlich entfernten Ebne $[abcd]$: oder, mit anderen Worten, der feste Punkt K halbirt alle Sehnen PP', die durch ihn hindurchgehen, und ist daher, wie vorher behauptet wurde, der Mittelpunkt der Fläche.

(10.) Bei derselben Bedeutung (65, 79) der Constanten, a, b, c, d, kann der mittlere Punkt (96) des Vierseits $ABCD$, oder des Systems seiner Eckpunkte, durch das Symbol:

$$M = (a^{-1}, b^{-1}, c^{-1}, d^{-1}),$$

bezeichnet werden; wenn dann dieser mittlere Punkt auf der Oberfläche liegt, so dass

$$ac - bd = 0,$$

so liegt der Mittelpunkt K auf der Ebne $[a, b, c, d,]$; oder, mit anderen Worten, er liegt in unendlicher Entfernung: so dass die Oberfläche in diesem Falle ein durch Bewegung einer Geraden entstandenes (oder hyperbolisches) Paraboloid ist. Im Allgemeinen (vergl. Nebenart. 8), ist die Oberfläche zweiter Ordnung ein Paraboloid irgend einer Art, wenn $F_0 = 0$, denn dann liegt ihr Mittelpunkt, in Folge der Gleichung:

$$(aD_a + bD_b + cD_c + dD_d)F_0 = 0,$$

im Unendlichen; oder weil dann (vergl. 50, 58) die Ebne $[abcd]$ in der Unendlichkeit eine ihrer Tangential-Ebnen ist, denn sie genügt der Tangential-Gleichung, $F = 0$.

(11.) Es ist augenscheinlich, dass eine Curve im Raume durch ein System von zwei anharmonischen und Punkt-Gleichungen dargestellt werden kann, da sie als der Durchschnitt zweier Flächen angesehen werden kann. Und dann ist ihre Ordnung, oder die Anzahl der Punkte (reeller oder imaginärer*), in der sie durch irgend eine Ebne geschnitten wird, augenscheinlich das Product der Ordnungszahlen dieser beiden Oberflächen; oder das Product der Grade ihrer beiden Punkt-Gleichungen, wobei wir uns die letzteren als rational und ganz denken.

(12.) Eine Curve doppelter Krümmung kann auch als die Rückkehrkante (*arête de rebroussement* nach Monge) einer abwickelbaren Fläche angesehen werden, nämlich als Ort der Tangenten zur Curve; und von dieser Oberfläche kann man annehmen, dass sie zugleich zwei gegebenen Oberflächen umschrieben ist, die Enveloppen variabler Ebnen (98) sind, und als solche durch ihre Tangentialgleichungen dargestellt werden. Von diesem Gesichtspunkte aus, kann eine Curve doppelter Krümmung selbst durch ein System zweier anharmonischen und Tangential-Gleichungen dargestellt werden; und wenn die Klasse einer solchen Curve als die Anzahl ihrer osculirenden Ebnen definirt wird, die durch irgend einen willkürlichen Punkt des Raumes gehen, dann ist diese Klasse das Product der Klassen der beiden eben erwähnten krummen Oberflächen: oder, was auf dasselbe hinaus kommt, sie ist das Product der Dimensionen der beiden Tangential-Gleichungen, durch welche die Curve, nach der erwähnten Auffassungsweise, symbolisch dargestellt wird. Doch wir können nicht weiter in Einzelheiten eingehen; den Mechanismus der bezüglichen Rechnungen würde man ebenso finden, wie den, welcher in der bekannten Methode (vergl. 41) der Vierebenen-Coordinaten angewendet wird.

99. Anstatt anharmonischer Coordinaten können wir irgend ein anderes System von n variablen Skalaren, $x_1, \cdots x_n$ in Betracht ziehen, die in den Ausdruck eines variablen Vectors, ϱ, eingehen; zum Beispiel, in einen Ausdruck von der Form (vergl. 96, 97):

$$\varrho = x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \cdots = \Sigma x \alpha.$$

* Vergleiche die Anmerkung zu Seite 112.

Digitized by Google

Und ferner können wir, wenn diese n Skalare x alle Functionen eines unabhängigen und veränderlichen Skalars, t, sind, diesen Vector ϱ selbst als eine Function dieses einzigen Skalares ansehn, und können schreiben:

$$\text{I.}\ldots\varrho = \varphi(t).$$

Wenn dagegen die n Skalare $x\cdots$ alle Functionen von zwei unabhängigen und veränderlichen Skalaren, t und u, sind, dann wird ϱ eine Function dieser beiden Skalare, und wir können demnach schreiben:

$$\text{II.}\ldots\varrho = \varphi(t, u).$$

Im I. Falle, ist der Ort des Endpunktes P (vergl. 1) des variablen Vectors ϱ im Allgemeinen eine Curve im Raume, die eben oder von doppelter Krümmung sein, oder auch eine gerade Linie werden kann, je nach der Form der Vector-Function φ; und ϱ kann man den Vector dieser Linie, oder Curve nennen. Im II. Falle, ist ϱ der Vector einer Oberfläche, einer ebenen oder krummen, je nach der Form von $\varphi(t, u)$; oder je nach der Art, in der dieser Vector ϱ von den beiden unabhängigen Skalaren abhängt, die in seinen Ausdruck eingehen.

(1.) Hier mögen einige Beispiele folgen; (vergl. 25, 63), die Ausdrücke:

$$\text{I.}\cdots\varrho = \frac{\alpha + t\beta}{1 + t}; \qquad \text{II.}\cdots\varrho = \frac{\alpha + t\beta + u\gamma}{1 + t + u},$$

bedeuten, der I., dass ϱ der Vector eines variablen Punktes P auf der geraden Linie AB ist; oder dass er der Vector dieser Linie selbst ist, wenn man sie als den Ort eines Punktes ansieht; und der II., dass ϱ der Vector der Ebne ABC ist; wenn man sie ebenfalls als den Ort eines willkürlichen Punktes P in ihr ansieht.

(2.) Die Gleichungen:

$$\text{I.}\ldots\varrho = x\alpha + y\beta, \qquad \text{II.}\ldots\varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

in Verbindung mit den Gleichungen:

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ für die erste,}$$

und

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \text{ für die zweite}$$

bezeichnen, die I., dass ϱ der Vector einer Ellipse ist, und die II.,

dass es der Vector eines Ellipsoids ist, deren gemeinsamer Mittelpunkt der Anfangspunkt O ist, und in denen, OA, OB, oder OA, OB, OC, conjugirte Halbmesser sind.

(3.) Die Gleichung (vergl. 46):

$$\varrho = t^2\alpha + u^2\beta + (t+u)^2\gamma,$$

drückt aus, dass ϱ der Vector einer Kegelfläche zweiter Ordnung ist, deren Scheitelpunkt (oder Mittelpunkt) O ist und der durch die drei Ebnen, OBC, OCA, OAB, berührt wird; der Schnitt dieses Kegels, der durch die Ebne ABC gemacht wird, ist eine Ellipse (vergl. Fig. 25), die in das Dreieck ABC eingeschrieben ist; und die Mittelpunkte, A', B', C', der Seiten dieses Dreiecks sind die Berührungspunkte dieser Seiten mit dem Kegelschnitt.

(4.) Die Gleichung (vergl. 53),

$$\varrho = t^{-1}\alpha + u^{-1}\beta + v^{-1}\gamma,$$

in Verbindung mit:

$$t + u + v = 0,$$

drückt aus, dass ϱ der Vector eines anderen Kegels zweiter Ordnung ist, dessen Spitze wieder O ist, aber dessen drei Seiten (oder Strahlen) OA, OB, OC, sind. Der Durchschnitt der Ebne ABC ist eine neue Ellipse, die dem Dreieck ABC umschrieben ist und deren Tangenten in den Eckpunkten des Dreiecks den gegenüberliegenden Seiten desselben bezüglich parallel sind.

(5.) Die Gleichung (vergl. 54):

$$\varrho = t^3\alpha + u^3\beta + v^3\gamma,$$

in Verbindung mit:

$$t + u + v = 0,$$

bezeichnet, dass ϱ der Vector eines Kegels dritter Ordnung ist, dessen Scheitel ebenfalls O ist; sein Schnitt (vergl. Fig. 27) durch die Ebne ABC ist eine kubische Curve, zu der die Seiten des Dreiecks ABC zugleich Asymptoten und die drei reellen Wendepunktstangenten sind; während der mittlere Punkt (nennen wir ihn O') dieses Dreiecks ein conjugirter Punkt der Curve ist; und daher kann die grade Linie OO', vom Scheitel O zu diesem mittleren Punkte, ein conjugirter Strahl des Kegels heissen.

Digitized by Google

(6.) Die Gleichung (vergl. 98, Nebenart. (3.)):

$$\varrho = \frac{staa + tub\beta + uvc\gamma + vsd\delta}{sta + tub + uvc + vsd},$$

in der $\frac{s}{u}$ und $\frac{t}{v}$ zwei variable Skalare sind; während a, b, c, d vier wie früher constante Skalare und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ vier constante Vectoren sind, in der ferner ϱ ebenfalls wie früher ein variabler Vector ist, drückt aus, dass ϱ der Vector eines durch Bewegung einer Graden entstandenen (oder einmanteligen) Hyperboloids ist, dem das windschiefe Vierseit $ABCD$ umschrieben ist, und das durch den gegebenen Punkt E geht, dessen Vector ε in 65 angegeben ist.

(7.) Wenn wir setzen (vergl. 98, Nebenart. (9.)):

$$\varrho' = \frac{s't'aa - t'u'b\beta + u'v'c\gamma - v's'd\delta}{s't'a - t'u'b + u'v'c - v's'd},$$

wo

$$s' = bt + cv, \quad t' = cu + ds, \quad u' = dv + at, \quad v' = as + bu,$$

ist, dann ist $\varrho' = OP'$ der Vector eines anderen Punktes P' auf demselben Hyperboloid; und da wir gefunden haben, dass die Summe der beiden letzten Vectoren constant ist,

$$\varrho + \varrho' = 2\varkappa,$$

wenn

$$\varkappa = \frac{ac(\alpha + \gamma) - bd(\beta + \delta)}{2(ac - bd)},$$

so folgt, dass $\varkappa$ der Vector eines festen Punktes K ist, der jede Sehne PP' halbirt, die durch ihn geht: oder in anderen Worten (vergl. 52), dass dieser Punkt K der Mittelpunkt der Fläche ist.

(8.) Die drei Vectoren:

$$\varkappa, \qquad \frac{\alpha + \gamma}{2}, \qquad \frac{\beta + \delta}{2},$$

sind termino-collinear (24); wenn nun ein windschiefes Vierseit $ABCD$ dem durch Bewegung einer Geraden entstandenen Hyperboloid umschrieben wird, so geht die gemeinsame Halbirungslinie der beiden Diagonalen, AC, BD, durch den Mittelpunkt K.

(9.) Wenn $ac = bd$ ist, oder wenn wir die Gleichung haben:

$$\varrho = \frac{st\alpha + tu\beta + uv\gamma + vs\delta}{st + tu + uv + vs},$$

oder einfach:

$$\varrho = st\alpha + tu\beta + uv\gamma + vs\delta,$$

in Verbindung mit

$$s + u = t + v = 1,$$

so ist ϱ der Vector eines durch Bewegung einer Geraden entstandenen Paraboloids, dessen Mittelpunkt (vergl. 52, und 98, Nebenart. (10.)), in unendlicher Entfernung liegt, aber dem auch das Vierseit $ABCD$ umschrieben ist. Und diese Oberfläche geht durch den mittleren Punkt M des Vierseits, oder des Systems der vier gegebenen Punkte $A \cdot\cdot D$; denn, wenn $s = t = u = v = \frac{1}{2}$, ist, so nimmt der variable Vector ϱ den Werth (vergl. 96, Nebenart. (1.)):

$$\mu = \tfrac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma + \delta),$$

an.

(10.) Im Allgemeinen ist von dem letzten Vector-Ausdruck für ϱ aus leicht zu beweisen, dass dieses Paraboloid der Ort einer graden Linie ist, welche die beiden gegenüberliegenden Seiten AB und DC desselben windschiefen Vierseits $ABCD$, oder das andere Paar gegenüberliegender Seiten, BC und AD, in ähnlicher Weise theilt.

Siebenter Abschnitt.

Ueber Differenziale von Vectoren.

100. Die Gleichung (99, I.),

$$\varrho = \varphi(t),$$

in der $\varrho = OP$ im Allgemeinen der Vector eines Punktes P einer Curve im Raume, $PQ\cdots$, ist, ergiebt augenscheinlich, für den Vector OQ eines anderen Punktes Q derselben Curve, einen Ausdruck von der Form:

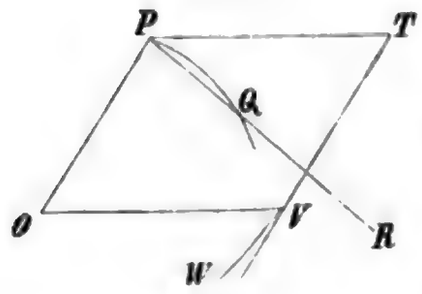
$$\varrho + \Delta\varrho = \varphi(t + \Delta t);$$

Digitized by Google

so dass also die Sehne PQ, die man ja selbst wieder als einen Vector ansehen kann, durch die endliche Differenz:

$$PQ = \Delta\varrho = \Delta\varphi(t) = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t),$$

Fig. 32.



dargestellt wird (4). Nehmen wir jetzt an, dass die zweite endliche Differenz, Δt, der n-te Theil eines neuen Skalars, u, ist; und dass die Sehne $\Delta\varrho$, oder PQ, ebenfalls (vergl. Fig. 32) der n-te Theil eines neuen Vectors, σ_n, oder PR, ist; so dass wir schreiben können:

$$n\Delta t = u, \text{ und } n\Delta\varrho = n \cdot PQ = \sigma_n = PR.$$

Wenn wir nun die beiden Skalare, t und u, als Constanten behandeln, aber die Zahl n als Veränderliche, (während die Form der Vector-Function φ, und der Anfangspunkt O gegeben sind), so ist der Vector ϱ und der Punkt P fest bestimmt und unveränderlich, aber die beiden Punkte Q und R, die beiden Differenzen Δt und $\Delta\varrho$, und der Vielfache eines Vectors $n\Delta\varrho$ oder σ_n, werden sich im Allgemeinen zusammen ändern. Und wenn die Zahl n bis ins Unendliche wächst, oder wenn man sie gegen die Unendlichkeit convergiren lässt, dann convergirt jede der beiden Differenzen Δt, $\Delta\varrho$ im Allgemeinen gegen die Null; sie ist mithin die gemeinschaftliche Grenze, von $n^{-1}u$, und von $\varphi(t + n^{-1}u) - \varphi(t)$; so dass der veränderliche Punkt Q der Curve mit dem festen Punkte P zusammenzufallen strebt. Aber obwohl die Sehne PQ auf diese Weise unendlich verkürzt wird, so convergirt doch ihr n-faches, PR oder σ_n, (im Allgemeinen) gegen eine endliche Grenze,* die von der angenommenen Art der Stetigkeit der Function $\varphi(t)$ abhängt; es convergirt nämlich gegen einen gewissen und bestimmten Vector, PT, oder σ_∞, oder — wie wir ihn nennen wollen — τ, und dieser Vector PT ist augenscheinlich (im Allgemeinen) zur Curve tangential: oder, mit anderen Worten, der variable Punkt R convergirt gegen eine feste Lage T, auf

* Vergleiche Newton's *Principia*.

Digitized by Google

der Tangente der Curve im Punkte P. Wir erhalten also eine Grenzgleichung, von der Form:

$$\tau = PT = \lim.\ PR = \sigma_\infty = \lim_{n=\infty}. n \Delta \varphi(t),$$

wenn

$$n \Delta t = u$$

ist; t und u sind, wie vorher, zwei gegebene und (im Allgemeinen) endliche Skalare. Und wenn wir nun übereinkommen, den zweiten der beiden gegebenen Skalare das Differential des ersten zu nennen, und sie durch das Symbol dt zu bezeichnen, so haben wir als Definition, dass die Vector-Grenze, τ oder σ_∞, das (entsprechende) Differential des Vectors ϱ ist, und wollen sie durch das entsprechende Symbol, $d\varrho$, bezeichnen; so dass wir, unter den angenommenen Bedingungen haben:

$$u = dt, \text{ und } \tau = d\varrho.$$

Oder, wenn wir die beiden Zeichen u und τ eliminiren, und nicht nothwendig annehmen, dass P ein Punkt einer Curve ist, so können wir unsere Definition* des Differentials eines Vectors ϱ, wenn man ihn als eine Function φ eines Skalars t ansieht, durch die folgende allgemeine Formel ausdrücken:

$$d\varrho = d\varphi(t) = \lim_{n=\infty}. n \left\{ \varphi\left(t + \frac{dt}{n}\right) - \varphi(t) \right\},$$

in der t und dt zwei willkürliche und unabhängige, beide im Allgemeinen endliche Skalare sind; und $d\varrho$ im Allgemeinen, ein neuer und endlicher Vector, der von diesen beiden Skalaren nach einem Gesetze abhängt, das durch die Formel ausgedrückt wird, und der durch dieses gegebene Gesetz abgeleitet wird, während der alte oder frühere Vector, ϱ oder $\varphi(t)$, von dem einzigen Skalar t abhängt.

(1.) Zum Beispiel, es möge die gegebene Vector-Function die Form:

$$\varrho = \varphi(t) = \tfrac{1}{2} t^2 \alpha,$$

haben, in der α ein gegebener Vector ist. Machen wir nun $\Delta t = \frac{u}{n}$, wo u irgend ein gegebener Skalar und n eine variable ganze Zahl ist, so haben wir:

* Vergleiche die Anmerkung zu Seite 42.

Digitized by Google

$$\Delta\varrho = \Delta\varphi(t) = \frac{\alpha}{2}\left\{\left(t+\frac{u}{n}\right)^2 - t^2\right\} = \frac{\alpha u}{n}\left(t+\frac{u}{2n}\right);$$

$$\sigma_n = n\Delta\varrho = \alpha u\left(t+\frac{u}{2n}\right);$$

$$\sigma_\infty = \alpha t u;$$

und endlich, wenn wir dt und $d\varrho$ für u und σ_∞ schreiben:

$$d\varrho = d\varphi(t) = d\left(\frac{t^2\alpha}{2}\right) = \alpha t dt.$$

(2.) Es sei allgemein $\varphi(t) = \alpha f(t)$, wo α wieder ein gegebener oder constanter Vector ist, und $f(t)$ eine Skalarfunction der Skalar-Variablen t bezeichnet. Dann können wir, da α ein gemeinsamer Factor in den Klammern $\{\ \}$ der vorigen allgemeinen Formel (100) für $d\varrho$ ist, schreiben:

$$d\varrho = d\varphi(t) = d\cdot\alpha f(t) = \alpha df(t);$$

vorausgesetzt, dass wir jetzt die Definition aufstellen, dass das Differential einer Skalar-Function, $f(t)$, eine neue Skalarfunction zweier unabhängigen Skalare, t und dt, ist, die durch die völlig ähnliche Formel:

$$df(t) = \lim_{n=\infty} n\left\{f\left(t+\frac{dt}{n}\right) - f(t)\right\},$$

bestimmt wird; von ihr kann man leicht beweisen, dass sie, in allen ihren Folgerungen, mit den gewöhnlichen Regeln für die Differentiation von Functionen einer Variablen übereinstimmt.

(3.) Zum Beispiel, wenn wir, $dt = nh$, schreiben, wo h ein neuer variabler Skalar ist, nämlich, der n-te Theil des gegebenen und (im Allgemeinen) endlichen Differentials, dt, so erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{h=0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h};$$

in ihr ist hier das erste Glied als der wirkliche Quotient zweier endlichen Skalare, $df(t):dt$ aufgefasst und nicht nur als ein Differentialquotient. Wir können diesen Quotienten indessen, wie üblich, nach derjenigen Bezeichnung für ihn, die er hat, wenn das Differential dt verschwindet, als eine abgeleitete Function der vorigen Variablen, t, ansehen; und können ihn, als solchen, durch eines der beiden gebräuchlichen Symbole:

$$f'(t) \text{ und } D_t f(t),$$

bezeichnen.

(4.) Ebenso können wir für die Abgeleitete einer Vector-Function,* $\varphi(t)$, die Formel:

$$\varrho' = \varphi'(t) = D_t\varrho = D_t\varphi(t) = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varphi(t)}{dt},$$

schreiben; die beiden letzten Formen bezeichnen den wirklichen und endlichen Vector, ϱ' oder $\varphi'(t)$, der erhalten, oder abgeleitet wird, durch Division (vergl. 16) des nicht weniger wirklichen (oder endlichen) Vectors, $d\varrho$ oder $d\varphi(t)$, durch den endlichen Skalar, dt. Und wenn wir wieder den n-ten Theil des letzteren Skalars mit h bezeichnen, so erhalten wir die gleich allgemeine Formel:

$$D_t\varrho = D_t\varphi(t) = \lim_{h=0} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h};$$

und die Gleichungen:

$$d\varrho = D_t\varrho \cdot dt = \varrho' dt; \qquad d\varphi(t) = D_t\varphi(t) \cdot dt = \varphi'(t) \cdot dt,$$

gerade ebenso, als wenn die Vector Function, ϱ oder φ, eine Skalarfunction, f, wäre.

(5.) Der besondere Werth, $dt = 1$, giebt $d\varrho = \varrho'$; der abgeleitete Vector ϱ' ist daher, (nach unseren Definitionen) ein besonderer aber wichtiger Fall des Differentials eines Vectors. In Anwendungen auf die Mechanik kann, wenn t die Zeit bezeichnet, und wenn der Endpunkt P des variablen Vectors ϱ als ein beweglicher Punkt angesehen wird, der abgeleitete Vector ϱ' der Geschwindigkeits-Vector genannt werden; denn seine Länge stellt die Grösse, und seine Richtung die Richtung der Geschwindigkeit dar. Und wenn wir nun von einem Anfangspunkte aus Vectoren $OV = \varrho'$ (vergl. wieder Fig. 32) ziehen, um so die Geschwindigkeiten eines Punktes darzustellen, der sich im Raume nach irgend einem angenommenen Gesetze bewegt, das durch die Gleichung $\varrho = \varphi(t)$ ausgedrückt wird,

* In der Theorie der Differentiale von Functionen von Quaternionen werden wir eine Definition des Differentials $d\varphi(q)$ vorschlagen, die durch eine Gleichung von genau derselben Form ausgedrückt wird, wie die vorher angegebene, für $df(t)$, und für $d\varphi(t)$; aber wir werden finden, dass der Quotient $d\varphi(q) : dq$ bei Quaternionen im Allgemeinen nicht unabhängig von dq ist; und folglich kann man nicht so recht eigentlich von einer abgeleiteten Function, wie $\varphi'(q)$, des Quaternionen q allein reden. (Vergleiche wieder die Anmerkung zu Seite 42).

Digitized by Google

so construiren wir eine neue Curve $VW\cdots$, als deren entsprechende Gleichung, $\varrho' = \varphi'(t)$, geschrieben werden kann; dann wollen wir diese neue Curve den Hodographen* nennen, während die frühere Curve $PQ\cdots$ die Bahn der Bewegung, oder des beweglichen Punktes, heisst.

(6.) Wir können eine Vector-Function zweimal (oder öfter) differenziren und erhalten so ihre successiven Differentiale. Zum Beispiel, wenn wir den abgeleiteten Vector ϱ' differenziren, erhalten wir ein Resultat von der Form:

$$d\varrho' = \varrho'' dt, \text{ wo } \varrho'' = D_t\varrho' = D_t^2\varrho,$$

nach einer leicht verständlichen Ausdehnung der Bezeichnungsweise ist; und wenn wir annehmen, dass das zweite Differential, ddt oder d^2t, des Skalars t gleich Null ist, dann ist das zweite Differential des Vectors ϱ:

$$d^2\varrho = dd\varrho = d\cdot\varrho' dt = d\varrho'\cdot dt = \varrho''\cdot dt^2;$$

wo dt^2, wie gewöhnlich, $(dt)^2$ bezeichnet; es ist wichtig zu bemerken, dass $d^2\varrho$, nach den angenommenen Definitionen, ein endlicher, bestimmter Vector ist, wie $d\varrho$, oder ϱ, selbst. In Anwendungen auf Bewegung kann man ϱ'', wenn t die Zeit bezeichnet, den Vector der Beschleunigung nennen.

(7.) Wir können auch sagen, dass in der Mechanik das endliche Differential $d\varrho$ des Vectors der Lage ϱ, nach Grösse und Richtung, die gerade Linie darstellt, (nehmen wir an PT in Fig. 32), die durch einen frei beweglichen Punkt, in dem endlichen Zeitintervall dt, welches unmittelbar auf die Zeit t folgt, beschrieben worden wäre, wenn nach Verlauf der Zeit t alle äusseren Kräfte aufgehört hätten zu wirken.**

(8.) Und in der Geometrie, wenn $\varrho = \varphi(t)$ die Gleichung einer Curve doppelter Krümmung ist, die man als Rückkehrkante (vergl. 98, (12.)) einer abwickelbaren Fläche ansehen kann, dann kann die Gleichung der Oberfläche selbst, als des Ortes der Tangenten der Curve, so geschrieben werden (vergl. 99, II.)

$$\varrho = \varphi(t) + u\varphi'(t);$$

---

* Die Besprechung des Hodographen werden wir auf einer späteren Stufe dieses Werkes wieder aufnehmen. In der That erfordert er fast die Anwendung von Quaternionen, um ihn auf die beste Art mit Newton's Gravitationsgesetz in Verbindung zu setzen.

** Ein gutes Beispiel haben wir an der Atwood'schen Fallmaschine.

oder einfach:

$$\varrho = \varphi(t) + d\varphi(t);$$

es mag daran erinnert werden, dass u, oder dt, irgend ein beliebiger Skalar ist.

(9.) Wenn irgend eine andere krumme Oberfläche (vergl. wieder 99, II.) durch eine Gleichung von der Form, $\varrho = \varphi(x, y)$, dargestellt wird, wo φ jetzt eine Vector-Function der beiden unabhängigen und skalaren Variablen, x und y, bedeutet, so können wir diese Gleichung, oder diesen Ausdruck für ϱ, in Bezug auf eine Variable allein differenziren, und erhalten dann zwei, wie wir sagen können, partielle (aber endliche) Differentiale, $d_x\varrho$, $d_y\varrho$, und zwei partielle Ableitungen, $D_x\varrho$, $D_y\varrho$, von denen die ersten mit den letzteren, und mit den beiden willkürlichen (aber endlichen) Skalaren, dx, dy, durch die Relationen:

$$d_x\varrho = D_x\varrho \cdot dx; \qquad d_y\varrho = D_y\varrho \cdot dy,$$

verbunden sind. Und diese beiden Differentiale (oder Ableitungen) des Vectors ϱ der Oberfläche bezeichnen zwei tangentiale Vectoren, oder wenigstens zwei Vectoren, die parallel zu zwei Tangenten der Oberfläche im Punkte P sind: so dass ihre Ebne die Tangentialebne in diesem Punkte ist, oder ihr parallel ist.

(10.) Der Mechanismus aller solcher Differentiationen von Vector-Functionen ist, auf der gegenwärtigen Stufe, genau derselbe, wie der in dem üblichen Verfahren der Differentialrechnung; denn die allgemeinste Form einer solchen Vector-Function, wie wir sie bis jetzt betrachtet haben, ist die einer Summe von Producten (vergl. 99) von der Form $x\alpha$, in der α ein constanter Vector und x ein variabler Skalar ist: so dass wir nur an diesen Skalar-Coefficienten $x\cdot\cdot$, nach den üblichen Rechnungsregeln, zu operiren haben, während die Vectoren $\alpha\cdot\cdot$ als constante Factoren (vergl. Nebenart. 2) behandelt werden. Aber wenn wir dazu kommen werden Quotienten oder Producte von Vectoren zu behandeln, oder allgemein diejenigen neuen Functionen von Vectoren, die (in unserem Systeme) nur durch Quaternionen ausgedrückt werden können, dann werden einige wenige neue Regeln für die Differentiation nothwendig werden, obwohl sie aus denselben (oder fast denselben) Defini-

Digitized by Google

tionen abgeleitet werden, wie diejenigen, die wir in diesem Abschnitte aufgestellt haben.

(11.) Als Beispiel für die partielle Differentiation (vergl. Nebenart. 9) einer vector Function (das Wort „Vector" wird hier als ein Adjectiv gebraucht) von zwei skalar Variablen wollen wir die Gleichung:

$$\varrho = \varphi(x, y) = \tfrac{1}{2}\{x^2\alpha + y^2\beta + (x+y)^2\gamma\},$$

nehmen; in ihr ist ϱ (vergl. 99, (3.)) der Vector eines gewissen Kegels zweiter Ordnung; oder genauer gesprochen, der Vector einer Hälfte eines solchen Kegels, wenn x und y als reelle Skalare angenommen werden. Hier sind die beiden partiellen Ableitungen von ϱ die folgenden:

$$D_x\varrho = x\alpha + (x+y)\gamma; \quad D_y\varrho = y\beta + (x+y)\gamma;$$

und daher ist:

$$2\varrho = xD_x\varrho + yD_y\varrho;$$

so dass die drei Vectoren, ϱ, $D_x\varrho$, $D_y\varrho$, wenn sie von ein und demselben Anfangspunkte aus gezogen werden (18), in ein und derselben Ebne enthalten sind (22); darin ist aber zugleich enthalten, dass die Tangentialebne zur Oberfläche, in irgend einem Punkte P, durch den Anfangspunkt O geht: und damit bewahrheitet sich der conische Charakter des Ortes des Punktes P, in dem der veränderliche Vector ϱ, oder OP, endigt.

(12.) Wenn wir, in demselben Beispiel, $x = 1$, $y = -1$, machen, so erhalten wir die Werthe:

$$\varrho = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta), \quad D_x\varrho = \alpha, \quad D_y\varrho = -\beta;$$

daraus folgt, dass der Mittelpunkt, nennen wir ihn C', der graden Linie AB, einer der Punkte des Kegels ist; und dass (vergl. wieder den Nebenart. 3 zu Art. 99, und den letzten Nebenart. 9) die geraden Linien OA und OB parallel zu zweien der Tangenten der Fläche in diesem Punkte sind; der fragliche Kegel wird daher durch die Ebne AOB in der Seite (oder dem Strahle) OC' berührt. Und ebenso kann bewiesen werden, dass derselbe Kegel durch zwei andere Ebnen, BOC und COA, in den Mittelpunkten A' und B' der beiden anderen Linien, BC und CA, berührt wird; und daher auch in der ganzen Länge der beiden anderen Seiten (oder Strahlen), OA' und OB', was wieder mit früheren Resultaten übereinstimmt.

(13.) Wir werden finden, dass eine vector Function der Summe zweier skalar Variablen, t und dt, im Allgemeinen durch eine Ausdehnung der Taylor'schen Reihe, unter der Form:

$$\begin{aligned}\varphi(t+dt) &= \varphi(t) + d\varphi(t) + \tfrac{1}{2}d^2\varphi(t) + \frac{1}{2.3}d^3\varphi(t) + \cdots \\ &= (1 + \frac{d^2}{2} + \frac{d^3}{2.3} + \cdots)\varphi(t) \\ &= \varepsilon^d\varphi(t),\end{aligned}$$

entwickelt werden kann; es ist hierbei vorausgesetzt, dass $d^2t = 0$, $d^3t = 0$, u. s. w. (vergl. Nebenart. 6) ist. Wenn wir zum Beispiel $\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2$, (wie im Nebenart. 1), setzen, wo α ein constanter Vector ist, so erhalten wir:

$$d\varphi(t) = \alpha t dt, \quad d^2\varphi(t) = \alpha dt^2, \quad d^3\varphi(t) = 0, \text{ u. s. w.;}$$

und in aller Strenge:

$$\varphi(t+dt) = \tfrac{1}{2}\alpha(t+dt)^2 = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \alpha t dt + \tfrac{1}{2}\alpha dt^2,$$

ohne irgend wie anzunehmen, dass dt klein ist.

(14.) Wenn wir ferner $\Delta t = dt$ annehmen, und die endliche Differenz, $\Delta\varphi(t) = \varphi(t+dt) - \varphi(t)$ entwickeln, so ist das erste Glied der so erhaltenen Entwicklung, oder das Glied von der ersten Dimension in Bezug auf dt, (nach einem Satze, der für vector Functionen ebenso wie für skalar Functionen gilt) das erste Differential $d\varphi(t)$ der Function; aber wir ziehen es vor, nicht als Definition des Differentials aufzustellen, dass es das erste Glied ist (oder bedeutet); denn die Formel (100), der wir den Vorzug geben, erfordert nicht die Möglichkeit, noch auch nur die Voraussetzug des Begriffs irgend welcher derartigen Entwicklung. Manche der letzten Bemerkungen werden vielleicht klarer erscheinen, wenn wir auf einer späteren Stufe dazu gelangen werden, sie mit der Theorie der Quaternionen in Verbindung zu bringen, zu der wir jetzt übergehen wollen.

Digitized by Google

Elemente der Quaternionen.

Theil II.

Ueber Quaternionen, als Quotienten von Vectoren, und ihre Beziehungen zu Winkeln.

Kapitel I.

Grundlegende Sätze über Quotienten von Vectoren.

Erster Abschnitt.

Einleitende Bemerkungen; erste aus der Algebra herübergenommenen Grundsätze.

Art. 101. Die einzigen Beziehungen von Winkeln, die wir im vorhergehenden Theile in Betracht gezogen haben, waren die des Parallelismus von Vectoren; (Art. 2, u. s. w.); und die einzigen Quotienten, die wir bisher angewendet haben, waren von einer der drei folgenden Arten:

I. Skalarquotienten von Skalaren, wie z. B. die arithmetischen Brüche $\frac{n}{m}$ in Art. 14;

II. Vectorenquotienten, und zwar Vectoren dividirt durch Skalare, wie $\frac{\beta}{x} = \alpha$ in Art. 16;

III. Skalarquotienten von Vectoren, die entweder gleiche oder entgegengesetzte Richtung haben, wie $\frac{\beta}{\alpha} = x$ in dem zuletzt angeführten Artikel. Jetzt beabsichtigen wir aber von anderen geometrischen Quotienten (oder geometrischen Brüchen, wie wir sie auch nennen können) zu handeln, wie

$$\frac{OB}{OA} = \frac{\beta}{\alpha} = q;$$

wo

$$\beta \text{ nicht } \| \alpha \text{ (vergl. 15)};$$

in jedem von ihnen sollen nicht nur der Divisor (oder Nenner), α oder OA, und der Dividend (oder Zähler), β oder OB, beide

Digitized by Google

Vectoren, sondern auch gegen einander unter einem Winkel geneigt sein, der (im Allgemeinen) von Null, und von zwei* rechten Winkeln verschieden ist.

102. Bei Einführung dieses neuen Begriffs, eines allgemeinen Quotienten von Vectoren, mit Winkelbeziehungen in einer gegebenen Ebne, oder im Raume, wird es offenbar nothwendig einige Eigenschaften von Kreisen und Kugeln zu benutzen, die für die Zwecke des vorigen Theiles nicht nöthig waren. Andererseits wird es aber auch möglich und nützlich einen viel geringeren Grad von Bekanntschaft mit vielen wichtigen Theorien** der neueren Geometrie vorauszusetzen, als der war, dessen Besitz wir in verschiedenen der vorhergehenden Abschnitte annahmen. Man darf gewiss hoffen, dass ein sehr mässiger Grad geometrischer, algebraischer und trigonometrischer Vorarbeit ausreichend ist, sowohl diesen Theil als die früheren Abschnitte des vorhergehenden, einem aufmerksamen Leser vollständig und leicht verständlich zu machen.

103. Es scheint mir angemessen, einige allgemeine Grundsätze über Quotienten von Vectoren voraufzuschicken, die in Wirklichkeit von der Algebra hergenommen sind, die wir aber hier als Definitionen aufstellen. Erstens ist augenscheinlich, dass die angenommene Operation der Division, (wie auch immer ihre vollständige geometrische Bedeutung nachher gefunden werden mag), durch die wir uns hier den Uebergang von einer gegebenen Divisorlinie α, und von einer gegebenen Dividend-

---

* Allgemeiner könnte man sagen, von jedem graden Vielfachen eines rechten Winkels.

** Solche angewandten neueren Theorien sind die der Homologie, Homographie, Involution und allgemein Alles, was mit anharmonischen Verhältnissen zusammenhängt. Aber alles, was über solche Verhältnisse zu wissen nöthig ist für die in der Folge gemachten Anwendungen, kann man, ohne Zuhülfenahme eines anderen Buches, aus den nebenbei gegebenen Definitionen in Art. 25, u. s. w. lernen. Es war vielleicht gar nicht durchaus nothwendig, irgend eine von diesen neueren geometrischen Theorien, in irgend einem Theile dieses Werkes einzuführen; aber ich dachte, dass es wenigstens für einen Theil der Leser von Interesse sein könnte, zu sehen, wie sie mit dem Grundbegriff des Vectors in Verbindung gebracht werden könnten, den der erste Theil zu entwickeln bestimmt war.

linie β, zu ihrem, wie wir ihn (vorläufig) genannt haben, geometrischen Quotienten, q, ausgeführt denken, als entsprechend einem umgekehrten Akt (den wir bis jetzt noch nicht vollständig kennen) geometrischer Multiplikation aufgefasst werden kann oder besser aufgefasst werden muss; in diesem neuen Prozess wird der frühere Quotient, q, ein Factor, und operirt an der Linie α so, dass er die Linie β hervorbringt oder erzeugt. Wir wollen daher, wie in der Algebra, schreiben,

$$\beta = q \,.\, \alpha,$$

oder einfach,

$$\beta = q\,\alpha,$$

wenn

$$\beta : \alpha = q;$$

auch wenn die beiden Linien α und β, oder OA und OB, gegen einander geneigt angenommen werden, wie in Fig. 33. Und diese sehr einfache und natürliche Bezeichnung (vergl. 16) erlaubt uns die beiden folgenden Formeln als Identitäten zu behandeln:

$$\left(\frac{\beta}{\alpha} \,.\, \alpha\right) = \frac{\beta}{\alpha}\,\alpha = \beta;$$

$$\frac{q\,\alpha}{q} = q;$$

wir wollen uns, für jetzt, enthalten auch solche Formeln* hinzuschreiben, wie die folgenden:

$$\frac{\beta\,\alpha}{\alpha} = \beta, \qquad \frac{q}{\alpha}\,\alpha = q,$$

in denen α und β ebenfalls zwei Vectoren bezeichnen und q ihr geometrischer Quotient ist, denn wir haben bis jetzt noch nicht angefangen die Multiplication eines Vectors durch einen anderen, oder die Division eines Quotienten durch eine Linie zu betrachten.

104. Als zweiten allgemeinen Grundsatz, den wir ebenfalls von der Algebra herübernehmen, wollen wir aufstellen, dass wenn

$$\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha}, \text{ und } \alpha' = \alpha,$$

dann

$$\beta' = \beta,$$

* Wir werden indessen später sehn, dass die beiden Formeln erlaubt und sogar gefordert werden in der Entwickelung des Systems der Quaternionen.

ist; oder mit Worten, und in ein wenig veränderter Form, dass ungleiche Vectoren, durch gleiche Vectoren dividirt, ungleiche Quotienten ergeben. Die Wichtigkeit dieser so natürlichen und einleuchtenden Annahme werden wir bald in ihren Anwendungen sehn.

105. Als dritten Grundsatz, der für Alles, wo mathematische Ausdrucksweise Anwendung findet, gilt, und ohne den wir in keinem Falle von Gleichheit, die zwischen irgend zwei geometrischen Quotienten besteht, mit Nutzen sprechen könnten, wollen wir annehmen, dass zwei solche Quotienten niemals demselben dritten* Quotienten gleich sein können, ohne zugleich einander gleich zu sein; oder in Zeichen, dass wenn

$$q' = q, \quad \text{und} \quad q'' = q,$$

dann

$$q'' = q',$$

ist.

106. Viertens wollen wir, als Vorbereitung für Operationen mit geometrischen Quotienten, sagen, dass irgend zwei solche Quotienten, oder Brüche (101), die ein und dieselbe Divisor-Linie, oder in gebräuchlicherer Ausdrucksweise ein und denselben Nenner, haben, miteinander addirt, subtrahirt oder dividirt werden, indem man ihre Zähler addirt, subtrahirt oder dividirt; der gemeinsame Nenner wird hierbei in den beiden ersten von diesen drei Fällen beibehalten. In Zeichen schreiben wir also als Definition (vergl. 14), dass für irgend drei (wirkliche) Vectoren, α, β, γ,

$$\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma + \beta}{\alpha}; \qquad \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma - \beta}{\alpha};$$

und

$$\frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta};$$

wieder mit der Absicht, in Uebereinstimmung mit der Algebra zu bleiben.

---

* Es ist kaum nöthig zu bemerken, was unter diesem dritten Grundsatz mit gesagt ist, nämlich dass in Folge der Identität $q = q$, wenn $q' = q$, dann auch $q = q'$ ist; oder, in Worten, dass wir niemals annehmen werden, dass irgend zwei geometrische Quotienten, q und q', einander in einer Aufeinanderfolge gleich sind, ohne zugleich anzunehmen, dass sie auch in entgegengesetzter Reihenfolge gleich sind.

Digitized by Google

107. Endlich wollen wir, als fünften Grundsatz, der wie die vorhergehenden dazu bestimmt ist, diese neue Rechenart mit der Algebra in Uebereinstimmurg zu erhalten, in ihren Operationen an geometrischen Quotienten, als Definition aufstellen, dass die folgende Formel stattfindet:

$$\left(\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha}\right) = \frac{\gamma}{\beta}\,\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha};$$

oder dass das Produkt, $q' \,.\, q$ oder $q'\,q$, zweier geometrischen Brüche q und q', die in solcher Beziehung zu einander stehen, dass der Nenner, β, des Multiplikators q', (der hier linker Hand geschrieben ist) gleich dem Zähler des Multiplikandus q ist, der dritte Bruch ist, dessen Zähler der Zähler γ des Multiplikators und dessen Nenner der Nenner α des Multiplikandus ist; alle solche Nenner, oder Divisor-Linien, denken wir uns bis jetzt (16) als wirkliche (und nicht null) Vectoren.

Zweiter Abschnitt.

Erster Grund, den Quotienten zweier Vectoren einen Quaternion zu nennen.

108. Wir können jetzt schon die Gründe übersehn, warum wir den Namen, Quaternion, auf einen solchen Quotienten zweier Vectoren anwenden, wie wir sie in den vorigen Artikeln besprochen haben. Erstens kann ein solcher Quotient im Allgemeinen nicht das sein, was wir einen Skalar genannt (17) haben; oder, mit anderen Worten, er kann im Allgemeinen nicht irgend einer von den (sogenannten) reellen Grössen der Algebra gleich sein, weder einer positiven noch einer negativen. Denn wenn x irgend einen (wirklichen*) Skalar und α irgend einen (wirklichen) Vector bezeichnet, so haben wir, gesehn (15), dass das Product $x\,\alpha$ einen anderen (wirklichen) Vector bezeichnet, nennen wir ihn β', der entweder die gleiche oder

* Unter einem wirklichen Skalar, wie unter einem wirklichen Vector (vergl. 1), verstehen wir hier einen der von Null verschieden ist. Ein wirklicher Vector, mit einem Null-Skalar multiplicirt, hat zum Produkt (15) einen null Vector; es ist daher unnöthig zu beweisen, dass der Quotient zweier wirklichen Vectoren kein null Skalar, oder Null, sein kann.

entgegengesetzte Richtung wie α hat, je nachdem der Skalar-Coefficient, oder Factor, x, positiv oder negativ ist; in keinem von beiden Fällen kann es aber irgend einen Vektor, wie β, vorstellen, der zu α unter irgend einem wirklichen Winkel geneigt ist, mag dieser Winkel nun ein spitzer, oder rechter, oder stumpfer sein; oder, mit anderen Worten (vergl. 2), die Gleichung $\beta' = \beta$, oder $x\alpha = \beta$, ist unter den hier angenommenen Bedingungen unmöglich. Aber wir sind übereingekommen (16, 103) wie in der Algebra zu schreiben $\frac{x\alpha}{\alpha} = x$; wir müssen uns daher (nach dem zweiten Grundsatz des vorhergehenden Abschnitts, den wir in Art. 104 aufgestellt haben) enthalten, auch, $\frac{\beta}{\alpha} = x$, unter denselben Bedingungen hinzuschreiben', wenn x noch einen Skalar bedeutet. Was wir sonst auch für einen Quotienten zweier geneigten Vectoren finden mögen, es ist sicher, wenigstens, ein Nicht-Skalar.

109. Wenn wir jetzt den Begriff des Skalars selbst bilden als den Quotienten zweier parallelen* Vectoren (17), so ziehn wir nicht nur ihre relative Grösse, oder ihr Verhältniss in gewöhnlichem Sinne, in Betracht, sondern auch ihre relative Richtung, unter der Form der Gleichheit oder der entgegengesetzten Richtung. Wenn wir von α zu $x\alpha$ übergehn, so ändern wir im Allgemeinen (15) die Länge der Linie α im Verhältniss von $\pm x$ zu 1; und wir behalten die Richtung dieser Linie bei oder kehren sie um, je nachdem der Skalar-Coefficient x positiv oder negativ ist. Und ebenso haben wir, wenn wir dazu übergehn, bestimmter als wir es bisher gethan haben, den Begriff des nicht-skalar Quotienten (108), $q = \beta : \alpha = OB : OA$, zweier geneigten Vectoren zu bilden, die wir der Einfachheit wegen als coinitial annehmen (18) wollen, ebenso haben wir auch dann beides in Rechnung zu ziehn, relative Länge und relative Richtung der beiden verglichenen Linien. Aber während das erste Element dieser verwickelteren Be-

* Es mag daran erinnnert werden, dass wir vorgeschlagen haben (15) den Gebrauch des Wortes parallel auf den Fall zweier Vectoren auszudehnen, die (im gebräuchlichen Sinne des Wortes) ein und derselben Linie parallel sind, auch wenn sie zufällig Theile ein und derselben geraden Linie sind.

Digitized by Google

ziehung zwischen zwei Linien oder Vectoren, die wir hier betrachten, noch durch ein einfaches Verhältniss (von der gewöhnlich in der Geometrie angewandten Art) oder durch eine Zahl* ausgedrückt wird, die dieses Verhältniss bezeichnet, wird das zweite Element derselben verwickelteren Beziehung jetzt durch einen Winkel, AOB, dargestellt; und nicht nur (wie es vorher der Fall war) durch ein algebraisches Vorzeichen, + oder −.

110. Bei der Schätzung dieses Winkels, um einen Vectoren-Quotienten von einem anderen zu unterscheiden, müssen wir nicht nur seine Grösse (oder Quantität), sondern auch seine Ebne in Betracht ziehn; denn sonst würden wir, im Widerspruch mit dem in Art. 104 aufgestellten Grundsatz, haben $OB' : OA = OB : OA$, wenn OB und OB' zwei verschiedene Strahlen oder Seiten eines Umdrehungskegels wären, dessen Achse OA ist; in diesem Falle würden sie (nach 2) nothwendig ungleiche Vectoren sein. Aus demselben Grunde müssen wir auch auf den Gegensatz zweier entgegengesetzter Winkel von gleicher Grösse achten, die in derselben Ebne liegen. Kurz, zur vollständigen Kenntniss der relativen Richtung zweier coinitialen Linien OA, OB im Raume, müssen wir nicht nur wissen, wie viel Grade, oder andere Theile irgend einer Winkeleinheit, der Winkel AOB enthält; sondern auch (vergl. Fig. 33) die Richtung der Drehung von OA nach OB; und das schliesst eine Kenntniss der Ebne, in der die Drehung stattfindet, ein; und der Drehungsrichtung (nach rechts oder links, von einer bestimmten Seite der Ebne aus gesehn), nach welcher hin die Drehung gerichtet ist.

Fig. 33.

111. Oder, wenn wir übereinkommen eine bestimmte

* Diese Zahl, die wir jetzt den Tensor des Quotienten nennen wollen, kann ganz oder gebrochen sein, oder auch incommensurabel in Bezug auf die Einheit; aber sie kann in der Rechnung stets einem positiven Skalar gleich gesetzt werden; sie könnte daher vielleicht besser eine absolute (zeichenlose) Zahl genannt werden, die nur aus einem Vergleich von Längen abgeleitet worden ist, ohne irgend welchen Bezug auf Richtungen.

Drehung auszuwählen (nehmen wir an die rechtsläufige*), und alle Drehungen positiv nennen, wenn sie mit dieser ausgewählten Drehungsrichtung übereinstimmen, und alle Rotationen negativ, die entgegengesetzt gerichtet sind, so können wir bei irgend einem gegebenen Winkel AOB, den wir der Einfachheit wegen kleiner als zwei Rechte annehmen wollen, und den wir so ansehn wollen, als ob er eine Drehung in einer gegebenen Ebne von OA nach OB darstellt, von einer Senkrechten OC zur Ebne AOB als von der positiven Achse dieser Drehung sprechen; und von der entgegengesetzten Senkrechten OC zur selben Ebne als von ihrer negativen Achse; die Drehung um die positive Achse ist selbst positiv, und umgekehrt. Wir können dann die Drehung AOB als völlig bekannt ansehn, wenn wir 1) ihre Grösse, oder ihr Verhältniss, zu einer Drehung um einen rechten Winkel kennen; und 2) die Richtung ihrer positiven Achse OC; aber eben nur mit der Kenntniss dieser beiden Dinge, oder irgend welcher Angaben, die ihnen gleichbedeutend sind. Aber ob wir nun die Richtung einer Achse oder die Lage einer Ebne in Betracht ziehen, wir finden (wie wohl bekannt ist), dass die Bestimmung einer solchen Richtung, oder einer solchen Lage, von zwei Polarcoordinaten** abhängt, oder von zwei anderen Winkelelementen.

112. Es scheint daher, nach der vorhergehenden Erörterung, dass zur vollständigen Bestimmung dessen, was wir den geometrischen Quotienten zweier coinitialen Vectoren genannt haben, ein System von vier Elementen, im Allgemeinen, erforderlich ist, von denen jedes sich besonders numerisch ausdrücken lässt Von diesen vier Elementen, dient eines (109) dazu, das Längenverhältniss der beiden verglichenen Linien zu bestimmen; und die drei anderen sind im Allgemeinen noth-

---

* Wenn wir die rechtsläufige Drehung als positiv ansehn, dann muss die positive Achse der Drehung AOB, in Fig. 33, nach abwärts gerichtet angenommen werden, oder unterhalb der Ebne des Papiers.

** Der wirkliche (oder wenigstens häufige) Gebrauch solcher Coordinaten, ist dem Geiste unseres gegenwärtigen Rechensystems fremd; aber ihre Erwähnung wird hier vermuthlich dem Leser nützen, indem sie ihm Resultate in's Gedächtniss zurückruft, mit denen ihn das Durchlesen des Früheren sicher vertraut gemacht haben wird.

Digitized by Google

wendig, ihre relative Richtung völlig zu bestimmen. Und zwar stellt eines, von diesen drei letzten Elementen, die Neigung der beiden Linien zu einander, oder die Elongation, dar; oder die Grösse (oder Quantität) des Winkels zwischen ihnen; während die beiden anderen dazu dienen, die Richtung der Achse zu bestimmen, die zu ihrer gemeinsamen Ebne senkrecht ist, und um welche eine Drehung um jenen Winkel stattfindet, in einem vorher als positiv bestimmten Sinne, (oder nach einem festen und vorher bestimmten Zeiger hin), um auf dem einfachsten Wege, und daher in der Ebne der beiden Linien, von der Richtung der Divisor-Linie zur Richtung der Dividend-Linie überzugehn. Aber es sind auch nicht mehr als vier numerische Elemente nöthig, zu unserem gegenwärtigen Zwecke; denn das Längenverhältniss zweier Linien wird nicht geändert, wenn die Länge beider in demselben Verhältniss verändert wird, und es ändert sich auch ihre relative Richtung nicht, wenn der Winkel, den sie bilden, in ihrer Ebne gedreht wird. Deswegen haben wir daher denn auch wegen dieser wesentlichen Verbindung dieser zusammengesetzten Beziehung (109) zwischen zwei Linien, die aus einer Beziehung zwischen Längen und einer Beziehung zwischen Richtungen zusammengesetzt ist und der wir durch eine Erweiterung der Theorie der Skalare den Namen eines geometrischen Quotienten gegeben haben, mit einem System von Vier numerischen Elementen einen Grund* zu sagen, dass „der Quotient zweier Vectoren im Allgemeinen ein Quaternion ist."

Dritter Abschnitt.

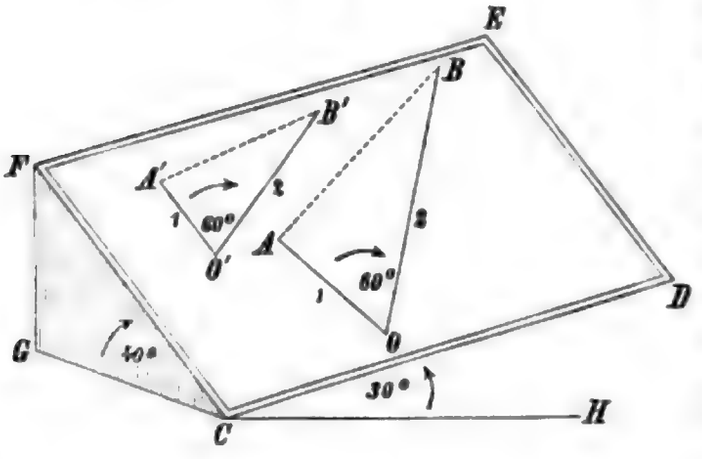
Zusätzliche Erläuterungen.

113. Man kann einige weitere Aufklärung, über den ersten Begriff eines Quaternions, aus dem Anblick der nebenstehenden Fig. 34 gewinnen. In dieser Figur mögen die Buchstaben *CDEFG* die Ecken eines prismatischen Pultes bezeichnen, das auf einem horizontalen Tische ruht. Der

* Verschiedene andere Gründe für die Wahl dieses Ausdrucks werden sich von selbst im weiteren Verlaufe des Buches darbieten.

Winkel HCD (den wir zu 30° annehmen wollen) stellt eine (linksläufige) Drehung dar, durch die wir uns die horizontale Leiste CD des Pultes von einer gegebenen horizontalen Linie CH aus, die wir uns als eine Kante des Tisches denken können, elongirt oder entfernt denken können, der Winkel GCF, den wir hier zu vierzig Grad annehmen, stellt die Schräge* des Pultes, oder den Betrag seiner Neigung gegen den Tisch dar. Auf der Fläche $CDEF$ des Pultes sind zwei ähnliche und ähnlich gelegene Dreiecke, AOB und $A'O'B'$, gezeichnet, die wir uns als die Hälften zweier gleichseitigen Dreiecke denken, in der Art, dass jede der Drehungen, AOB oder $A'O'B'$, eine von sechzig Graden ist und in demselben Sinne stattfindet, (nämlich rechtsläufig in der Figur); während sich die Seite OB zur Seite OA, wenn wir nur die Längen in Betracht ziehen, in dem einen Dreieck, wie die Seite $O'B'$ zur Seite $O'A'$ in dem anderen, oder wie die Zahl zwei zu eins verhält.

Fig. 34.



114. Unter diesen Bedingungen der Construktion betrachten wir die beiden Quotienten, oder die beiden geometrischen Brüche,

$$OB : OA \text{ und } O'B' : O'A', \text{ oder } \frac{OB}{OA} \text{ und } \frac{O'B'}{O'A'},$$

als einander gleich; denn wir nehmen an, dass die beiden Linien, OA und OB, dasselbe Längenverhältniss, und dieselbe relative Richtung zu einander haben, wie die beiden anderen Linien, $O'A'$ und $O'B'$. Und wir betrachten und benennen je-

* Die beiden Winkel, HCD und GCF, kann man so auffassen, dass sie der Länge der Knoten und der Neigung der Bahn eines Planeten oder Kometen in der Astronomie entsprechen.

Digitized by Google

den Quotienten, oder Bruch, als einen Quaternion, denn seine vollständige Construktion (oder Bestimmung) hängt in Allem, was zu seiner Auffassung wesentlich ist, und erforderlich, ihn von anderen zu unterscheiden, von einem System von vier numerischen Flementen ab, (vergl. 112); die in unserem Beispiele die vier Zahlen

2, 60, 30 und 40,

sind.

115. Von diesen vier Elementen, (um zu recapituliren, was wir vorher angenommen haben) drückt das erste, nämlich die Zahl 2, aus, dass die Länge der Dividend-Linie, OB oder $O'B'$, das Doppelte der Länge der Divisor-Linie, OA oder $O'A'$, ist. Das zweite numerische Element, nämlich 60, drückt hier aus, dass der Winkel AOB oder $A'O'B'$, einer von sechsig Graden ist; während die entsprechende Drehung, von OA nach OB, oder von $O'A'$ nach $O'B'$, in einer bekannten Richtung stattfindet, (in diesem Falle ist die Drehung rechtsläufig, wenn sie von einer Person betrachtet wird, die auf die Fläche $CDEF$ des Pultes sieht); der Sinn der Drehung ist für die beiden gleichen Winkel derselbe. Das dritte Element, nämlich 30, drückt aus, dass die horizontale Kante CD des Pultes einen Winkel von dreissig Graden mit einer bekannten horizontalen Linie CH macht, von der sie um diese Winkelgrösse entfernt ist, in einer bekannten Richtung; in diesem Falle ist sie zufällig nach links entfernt, wenn man von oben auf die Figur sieht. Endlich drückt das vierte Element, nämlich 40, aus, dass hier das Pult eine Elevation von vierzig Grad hat.

116. Eine Aenderung irgend eines dieser vier Elemente, z. B. eine Aenderung der Schräge oder Neigung des Pultes, würde eine wesentliche Aenderung des Quaternions, unter dem hier in Betracht gezogenen Gesichtspunkte, bewirken, der unter demselben Gesichtspunkt der Quotient zweier verglichenen Linien ist; während keine solche Veränderung stattfindet, wie die Figur zum Theil zu erläutern bestimmt ist, wenn das Dreieck AOB nur in seiner Ebne gedreht wird, ohne sich zu überschlagen (vergl. Fig. 36); oder wenn die Seiten des Dreiecks in demselben Verhältniss verlängert oder verkürzt werden, so dass das Verhältniss irgend einer Seite zu irgend einer

Digitized by Google

anderen (im alten Sinne des Wortes) bewahrt bleibt. Wir können dann, bei dieser Art den Begriff eines Quaternions* in der Geometrie zu erläutern, mit Beziehung auf einen Winkel eines Pultes, sagen, dass die vier Elemente, die er enthält die folgenden sind:

Ein Verhältniss, ein Winkel, seine Schnittlinie und seine Neigung.

Die beiden letzteren Elemente sind in Wirklichkeit gleichfalls Winkel, aber sie werden nicht unmittelbar als solche erhalten, aus der einfachen Vergleichung der beiden Linien, deren Quotient der Quaternion ist.

Vierter Abschnitt.

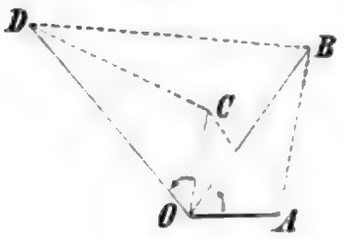
Über Gleichheit von Quaternionen; und über die Ebne eines Quaternions.

117. Es ist eine unmittelbare Folge der vorhergehenden Auffassung eines Quaternions, dass wir zwei Quaternionen, oder zwei Quotienten von Vectoren, die wir der Einfachheit wegen sämmtlich coinitial (18) annehmen wollen, als einander gleich ansehn wollen, oder dass die Gleichung,

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha}, \quad \text{oder} \quad \frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA},$$

von uns als gültig angesehn und definirt wird, wenn die beiden Dreiecke, AOB und COD, ähnlich und ähnlich gelegen sind, und zwar in ein und derselben Ebne, wie es in der nebenstehenden Fig. 35 dargestellt ist; die relative Länge (109), und die relative Richtung (110), der beiden Linien, OA, OB, ist in jeder Hinsicht dieselbe wie die relative Länge und die relative Richtung der beiden anderen Linien, OC, OD.

Fig. 35.



118. Unter diesen Bedingungen wollen wir die folgende Formel für directe Aehnlichkeit hinschreiben,

* Was allein das Wort Quaternion, betrifft, so bezeichnet es ursprünglich, wie wohlbekannt ist, wie sein lateinisches Original „Quaternio“, oder das griechische Wort τετραχτύς, einen Satz von Vieren; aber es wird hier, und überall sonst in diesem Buche, in einem technischen Sinne gebraucht.

$$\Delta AOB \propto COD;$$

und wir wollen die folgende Formel,

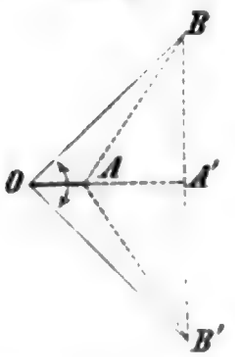
$$\Delta AOB \propto' AOB',$$

oder

$$\Delta A'OB \propto' A'OB',$$

die wir eine Formel für inverse Aehnlichkeit nennen wollen, aufbewahren, um zu bezeichnen, dass die beiden Dreiecke, AOB und AOB', oder $A'OB$ und $A'OB'$, obwohl in anderer Weise ähnlich (und zwar, in diesem Falle gleich*, da sie eine gemeinsame Seite OA oder OA' haben) einander entgegengesetzt zugewandt sind (vergl. Fig. 36), als ob das eine das Reflexbild des anderen in einem Spiegel wäre; oder als ob das eine Dreieck vom anderen durch eine Drehung seiner Ebne um zwei rechte Winkel abgeleitet (oder erzeugt) worden wäre. Wir können daher schreiben,

Fig. 36.



$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}, \text{ wenn } \Delta AOB \propto COD.$$

119. Wenn alle Vectoren von einem gemeinsamen Anfangspunkte O aus gezogen sind, so kann die Ebne AOB irgend zweier von ihnen die Ebne des Quaternions (oder des Quotienten), $OB : OA$, genannt werden; und folglich auch die Ebne des inversen (oder reciproken) Quaternions (oder des inversen Quotienten), $OA : OB$. Und irgend zwei Quaternionen, welche eine gemeinsame Ebne haben, die durch O geht, können complanare** Quaternionen, oder complanare Quotienten, oder Brüche, genannt werden; aber irgend zwei Quaternionen (oder Quotienten), die verschiedene Ebnen haben, die sich also in

* Das heisst dem absoluten Betrag der Fläche nach gleich, aber mit entgegengesetzten algebraischen Vorzeichen (28). Die beiden Quotienten $OB : OA$, und $OB' : OA$, obwohl nicht gleich (110), werden wir bald als conjugirte Quaternionen definiren. Unter denselben Bedingungen werden wir auch die Formel schreiben.

$$\Delta AOB' \propto' COD.$$

** Es ist indessen angemessen, den Gebrauch des Wortes, complanar, so auszudehnen, dass er auch den Fall von Quaternionen einschliesst, die durch Winkel in parallelen Ebnen dargestellt werden. Denn da alle

einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie schneiden, können, im Gegensatz dazu, diplanar heissen.

120. Irgend zwei Quaternionen, als geometrische Brüche (101) betrachtet, können in folgender Weise auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden, ohne dass sich der Werth* eines jeden von ihnen ändert. Es seien $\frac{OB}{OA}$ und $\frac{OD}{OC}$ zwei gegebene Brüche, oder Quaternionen; wenn sie complanar (119) sind, sei OE irgend eine Linie in ihrer gemeinsamen Ebne; wenn sie aber diplanar (siehe wieder 119) sind, so sei OE irgend ein angenommener Theil der Durchschnittslinie ihrer beiden Ebnen; so dass in jedem Fall, die Linie OE zugleich in der Ebne AOB und auch in der Ebne COD liegt. Dann können wir uns stets zwei andere Linien, OF, OG, denken, die so bestimmt werden, dass sie den beiden Bedingungen der directen Aehnlichkeit (118),

$$\Delta EOF \propto AOB, \qquad \Delta EOG \propto COD,$$

genügen; und daher auch den beiden Gleichungen zwischen Quotienten (117, 118),

$$\frac{OF}{OE} = \frac{OB}{OA}, \qquad \frac{OG}{OE} = \frac{OD}{OC};$$

und damit ist die gewünschte Reduction ausgeführt; OE ist der gemeinsame gesuchte Nenner und OF, OG sind die neuen oder reducirten Zähler. Man kann hinzufügen, dass, wenn H ein neuer Punkt in der Ebne AOB ist, so dass $\Delta HOE \propto AOB$, wir auch erhalten,

$$\frac{OE}{OH} = \frac{OB}{OA} = \frac{OF}{OE};$$

und wir haben daher, nach 106, 107,

$$\frac{OD}{OC} \pm \frac{OB}{OA} = \frac{OG \pm OF}{OE};$$

$$\frac{OD}{OC} : \frac{OB}{OA} = \frac{OG}{OF}; \qquad \frac{OD}{OC} \cdot \frac{OB}{OA} = \frac{OG}{OH};$$

welche beiden geometrischen Quotienten (complanar oder di-

Vectoren, die gleiche Längen und ähnliche Richtungen haben, gleich (2) sind, so sollte auch der Quaternion, der ein Quotient zweier solcher Vectoren ist, als unverändert angesehn werden, wenn jeder seiner Vectoren nur der Lage nach geändert wird, durch eine Fortbewegung ohne Drehung.

* Das heisst die neuen oder transformirten Quaternionen sind den alten oder gegebenen gleich.

Digitized by Google

planar) durch $OB : OA$ und $OD : OC$ dargestellt werden mögen.

121. Wenn nun die beiden Dreiecke AOB, COD nicht nur complanar sind sondern auch direct ähnlich (118), so dass $\Delta AOB \propto COD$, so haben wir offenbar $\Delta EOF \propto EOG$; so dass wir schreiben können $OF = OG$ (oder $F = G$, nach 20), die beiden neuen Linien OF, OG (oder die beiden neuen Punkte F, G) fallen in diesem Falle zusammen. Die allgemeine Construction (120), für die Reduction auf einen gemeinsamen Nenner, ergiebt daher hier nur ein neues Dreieck, EOF, und einen neuen Quotienten, $OF : OE$, dem in diesem Falle jeder (vergl. 105) der beiden gegebenen gleichen und complanaren Quotienten, $OB : OA$ und $OD : OC$, gleich ist.

122. Wenn dagegen die beiden letzten Symbole (oder die entsprechenden Bruchformen) zwei diplanare* Quotienten bezeichnen, dann haben die beiden neuen Zählerlinien, OF und OG, verschiedene Richtungen, da sie in zwei verschiedenen Ebnen liegen, die durch die neue Nennerlinie OE gehn, ohne dass sie entweder die Richtung der Linie selbst, oder die zu ihr entgegengesetzte Richtung hätten; sie sind daher (nach 2) ungleiche Vectoren, auch wenn sie zufällig gleich lang sein sollten; daraus folgt (nach 104), dass die beiden neuen Quotienten, und daher auch (nach 105) die beiden früheren oder gegebenen Quotienten, ungleich sind in Folge ihrer Diplanarität. Es folgt daher, aus dieser Erörterung, dass diplanare Quotienten von Vectoren, und daher, dass diplanare Quaternionen (119) stets ungleich sind. Das ist ein neues und im Vergleich zum Vorigen mehr kunstgerechtes Verfahren, das uns ebenfalls den Schluss bestätigt, zu dem wir vorher durch allgemeine Betrachtungen gekommen waren, und zwar auf einem, wie wir sagen können, populären Wege, einen Schluss, den wir zu erläutern (vergl. Fig. 34) suchten durch die Betrachtung der Winkel eines

* Und daher ein Nichtskalar (108); denn ein Skalar, als ein Quotient (17) aufgefasst, hat keine bestimmte Ebne, sondern muss mit jedem geometrischen Quotienten als complanar angesehn werden; daher kann er durch den Quotienten zweier gleich oder entgegengesetzt gerichteter Linien dargestellt (oder construirt) werden, die in einer beliebigen Ebne liegen.

Pultes, nämlich, dass ein Quaternion, als der Quotient zweier zu einander geneigten Linien im Raume aufgefasst, im Allgemeinen eine Ebne mitenthält, die ein wesentlicher Theil (vergl. 110) zu seiner Constituirung ist, und nothwendig zur vollständigen Erfassung seines Begriffes.

123. Wir schlagen vor, das Zeichen

$$|||$$

als Zeichen der Complanarität, entweder von Linien oder von Quotienten, zu gebrauchen; so wollen wir die Formel:

$$\gamma \,|||\, \alpha,\ \beta,$$

hinschreiben, um auszudrücken, dass die drei Vectoren α, β, γ, von denen wir annehmen, dass sie entweder coinitial (18) sind, oder coinitial gemacht worden sind, in einer Ebne liegen; und die entsprechende Formel,

$$q' \,|||\, q, \text{ oder } \frac{\delta}{\gamma} \,|||\, \frac{\beta}{\alpha},$$

drückt aus, dass die beiden Quaternionen, die hier mit q und q' bezeichnet sind, und also auch die vier Vectoren, α, β, γ, δ, complanar (119) sind. Und da wir eben gefunden haben (122), dass diplanare Quotienten ungleich sind, so sehn wir, dass eine Gleichung zwischen Quaternionen zwei Complanaritäten von Vectoren einschliesst; so dass wir schreiben können,

$$\gamma \,|||\, \alpha,\ \beta, \text{ und } \delta \,|||\, \alpha,\ \beta, \text{ wenn } \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha};$$

die Gleichnng zwischen Quotienten, $\frac{OD}{OC} = \frac{OB}{OA}$, ist unmöglich, wenn nicht alle die vier Linien von O aus in ein und derselben Ebne liegen. Wir werden auch die Bezeichnung,

$$\gamma \,|||\, q,$$

anwenden, um auszudrücken, dass der Vector γ in der Ebne des Quaternions q (oder in einer ihr parallelen) liegt.

124. Bei derselben Bezeichung für Complanarität können wir allgemein schreiben,

$$x\alpha \,|||\, \alpha,\ \beta;$$

wenn α und β irgend zwei Vectoren sind, und x irgend ein Skalar; denn, wenn $\alpha = OA$ und $\beta = OB$ wie vorher, dann ist (nach 15, 17) $x\alpha = OA'$, wo A' irgend ein Punkt auf der unendlichen geraden Linie durch die Punkte O und A ist, so dass die Ebne AOB die Linie OA' enthält. Aus demselben

Digitized by Google

Grunde haben wir allgemein die folgende Formel der Complanarität von Quotienten,

$$\frac{y\beta}{x\alpha} \parallel\parallel \frac{\beta}{\alpha},$$

was für zwei Skalare x und y auch sein mögen; α und β bezeichnen auch hier irgend zwei Vectoren.

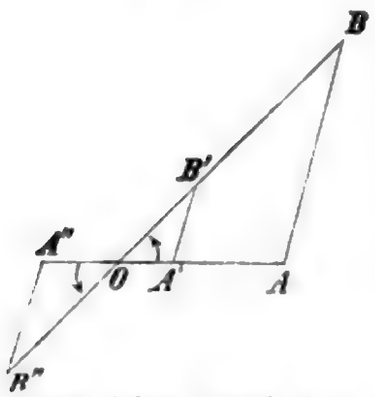
125. Es ist klar (vergl. Fig. 35), dass wenn $\Delta AOB \propto COD$, dann $\Delta BOA \propto DOC$, und $\Delta AOC \propto BOD$ ist; daraus ergiebt sich aber leicht, dass bei Quaternionen sowohl als bei gewöhnlichen oder algebraischen Quotienten, wenn $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$ ist, dann auch umgekehrt $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ ist, und, mit Vertauschung von α und δ, auch $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta}$; und es ist uns jetzt gestattet, die Umkehrung der letzten Formel in 118 aufzustellen, oder zu sagen, dass wenn

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}, \text{ dann } \Delta AOB \propto COD.$$

Unter derselben Bedingung haben wir auch, indem wir eine Umkehrung mit einer Vertauschung combiniren, die fernere Gleichung,

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}.$$

Fig. 37.



126. Wenn die Seiten, OA, OB, eines Dreiecks AOB, oder deren Verlängerung, nach beiden Seiten, durch irgend eine Parallele, $A'B'$ oder $A''B''$, zur Basis AB (wie in Fig. 37) geschnitten werden, so haben wir offenbar die Beziehungen der direkten Aehnlichkeit (118),

$$\Delta A'OB' \propto AOB,$$
$$\Delta A''OB'' \propto AOB;$$

daraus folgt (vergl. Art. 13 und Fig. 12), dass wir für Quaternionen, wie in der Algebra, die allgemeine Gleichung, oder Identität, hinschreiben können,

$$\frac{x\beta}{x\alpha} = \frac{\beta}{\alpha};$$

in der x wieder irgend ein Skalar, und α, β irgend zwei Vectoren sind. Es ist auch leicht zu sehn, dass wir für irgend einen

Digitized by Google

Quaternion q, und irgend einen Skalar x, das Produkt (vergl. 107) haben,

$$xq = \frac{x\beta}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{x\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{x^{-1}\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{x^{-1}\alpha} = qx;$$

so dass die Reihenfolge der Faktoren bei der Multiplication eines Quaternions mit einem Skalar (wie bei der Multiplication eines Vectors mit einem Skalar, 15) beliebig sein kann.

Fünfter Abschnitt.

Ueber die Achse und den Winkel eines Quaternions; und über den Index eines rechtwinkligen Quotienten, oder Quaternions.

127. Nach dem, was wir bereits gesagt haben (111, 112), werden wir naturgemäss dazu geführt, als Definition aufzustellen, dass die **Achse**, oder vollständiger die positive Achse, eines Quaternions (oder geometrischen Quotienten), $OB : OA$, eine gerade Linie senkrecht zur Ebne AOB des Quaternions ist; so dass die Drehung um diese Achse, von der Divisor-Linie OA, zur Dividend-Linie OB, positiv ist; oder, wie wir hinfort annehmen wollen, rechtsläufig* ist, wie die Bewegung der Zeiger einer Uhr.

128. Um den Begriff der Achse eines Quaternions noch bestimmter zu machen, können wir hinzufügen, I. dass die Drehung, von der wir hier sprechen, als die möglichst einfachste angenommen (112) wird, und daher in der Ebne der beiden Linien (oder des Quaternions) stattfindet, und dass sie auch im Allgemeinen weniger als eine halbe Umdrehung in dieser Ebne beträgt; II. dass die Achse gewöhnlich als eine Linie OX angenommen werden soll, die von dem angenommenen Anfangspunkte O aus gezogen ist; und III. dass die Länge dieser Linie als gegeben oder unveränderlich angesehn werden soll, und zwar gleich irgend einer angenommenen Längeneinheit, so dass der Endpunkt X, der Achse OX, seiner Construction nach auf einer gegebenen sphärischen Oberfläche liegt, die um den An-

* Das ist demnach rein conventionell und der Leser kann daher, wenn es ihm beliebt, durchgängig die linksläufige Drehung positiv setzen.

Digitized by Google

fangspunkt O als Mittelpunkt beschrieben ist; diese Oberfläche können wir die Oberfläche der Einheitskugel nennen.

129. So ist die Achse für jeden gegebenen nichtskalar Quotienten (108), oder für jeden gegebenen Quaternion q, der sich nicht von selbst auf eine einfache positive oder negative Zahl reducirt (oder in sie degenerirt), ein ganz bestimmter Vector, der seiner angenommenen Länge wegen ein Einheitsvector genannt werden kann, und den wir, für jetzt, durch das Zeichen Ax. q bezeichnen* wollen. Wenn wir ferner das übliche Zeichen für Rechtwinkligkeit, $\perp$, benutzen, so können wir für irgend zwei Vectoren α, β die Formeln hinschreiben:

$$\text{Ax.}\,\frac{\beta}{\alpha} \perp \alpha; \qquad \text{Ax.}\,\frac{\beta}{\alpha} \perp \beta; \qquad \text{oder kurz,}\quad \text{Ax.}\,\frac{\beta}{\alpha} \perp \begin{cases} \beta \\ \alpha \end{cases}.$$

130. Der Winkel eines Quaternions, wie $OB : OA$, soll für uns einfach der Winkel AOB zwischen den beiden Linien sein, deren Quotient der Quaternion ist; dieser Winkel wird hier als einer von der gewöhnlichen Art angenommen, so wie sie beim Euklid behandelt werden, und er ist daher ein spitzer, oder rechtwinkliger, oder stumpfer (aber nicht von irgend einer von diesen verschiedenen Arten), wenn der Quaternion ein Nichtskalar (108) ist. Wir wollen den Winkel eines Quaternions q durch das Zeichen, $\angle q$, bezeichnen; und wir haben dann im Allgemeinen die beiden folgenden Ungleichheiten**):

$$\angle q > 0; \qquad \angle q < \pi;$$

wo π als Bezeichnung für Winkel von zwei Rechten gebraucht ist.

131. Wenn der allgemeine Quaternion, q, in einen Skalar, x,

---

* Später werden wir Gründe angeben, die Achse, Ax. q, eines Quaternions q durch das weniger willkürliche (oder mehr systematische) Symbol UVq zu bezeichnen; aber für jetzt genügt die im Text angegebene Bezeichnung.

** In einigen Untersuchungen über complanare Quaternionen, und Potenzen oder Wurzeln von Quaternionen, ist es nützlich, negative Winkel, und Winkel grösser als zwei Rechte, zu betrachten; aber sie können dann Amplituden genannt werden; und das Wort „Winkel", wie das Wort „Verhältniss", kann also, wenigstens für jetzt, auf seinen gewöhnlichen geometrischen Sinn beschränkt bleiben.

degenerirt, dann wird die Achse (wie die Ebne*) ihrer Richtung nach völlig unbestimmt; und der Winkel nimmt zu gleicher Zeit entweder den Werth null oder den Werth zwei Rechte an, je nachdem der Skalar positiv oder negativ ist. Bezeichnen wir also, wie vorher, irgend einen solchen Skalar mit x, so haben wir:

Ax. $x =$ einem unbestimmten Einheitsvector;

$$\angle x = 0, \text{ wenn } x > 0; \quad \angle x = \pi, \text{ wenn } x < 0.$$

Fig. 38.

132. Von den nichtskalar Quaternionen sind die wichtigsten diejenigen, deren Winkel ein Rechter ist, wie in der nebenstehenden Figur 38; und wenn wir daher haben,

$$q = \frac{OB}{OA}, \text{ und } OB \perp OA, \text{ oder } \angle q = \frac{\pi}{2},$$

so können wir den Quaternion q einen rechtwinkligen Quotienten**) nennen; oder bisweilen einen rechtwinkligen Quaternion.

(1.) Wenn demnach $\alpha = OA$ und $\rho = OP$ ist, wo O und A zwei gegebene (oder feste) Punkte, und P ein variabeler Punkt ist, dann drückt die Gleichung

$$\angle \frac{\rho}{\alpha} = \frac{\pi}{2}$$

aus, dass der Ort des Punktes P die Ebne durch O, senkrecht zur Linie OA, ist; denn sie ist gleichbedeutend mit der Formel für Rechtwinkligkeit $\rho \perp \alpha$ (129).

(2.) Allgemeiner, wenn $\beta = OB$, und B irgend ein dritter gegebener Punkt ist, so drückt die Gleichung

$$\angle \frac{\rho}{\alpha} = \angle \frac{\beta}{\alpha}$$

aus, dass der Ort von P die eine Hälfte eines Umdrehungskegels ist, dessen Scheitel O und dessen Achse OA ist, und der durch den Punkt B geht; denn sie sagt aus, dass die

---

* Vergleiche die Anmerkung zu Seite 149. Der Winkel sowohl, wie die Achse, wird unbestimmt, wenn sich der Quaternion selbst auf Null reducirt; wenn wir nicht gerade ein Gesetz kennen, nach dem die Dividend-Linie beim Uebergange von $\frac{\beta}{\alpha}$ nach $\frac{0}{\alpha}$ gegen Null convergirt.

** Ich werde später Gründe angeben, solch einen Quotienten, oder Quaternion, einem Vector gleichzusetzen; nämlich der Linie, die ich weiter unten (133) den Index des rechtwinkligen Quotienten nennen werde.

Digitized by Google

Winkel AOB und AOP dem Betrage nach gleich sind, aber nicht nothwendig in ein und derselben Ebne liegen.

(3.) Die Gleichung (vergl. 128, 129),

$$\mathrm{Ax.}\frac{\varrho}{\alpha} = \mathrm{Ax.}\frac{\beta}{\alpha},$$

drückt aus, dass der Ort des variablen Punktes P die gegebene Ebne AOB ist; oder besser die unendlich grosse Hälfte dieser Ebne, die alle die Punkte P enthält, welche zugleich mit den drei gegebenen Punkten, O, A, B, complanar sind und auch auf derselben Seite der unendlichen geraden Linie OA liegen, wie der Punkt B.

(4.) Das System der beiden Gleichungen,

$$\angle\frac{\varrho}{\alpha} = \angle\frac{\beta}{\alpha}, \qquad \mathrm{Ax.}\frac{\varrho}{\alpha} = \mathrm{Ax.}\frac{\beta}{\alpha},$$

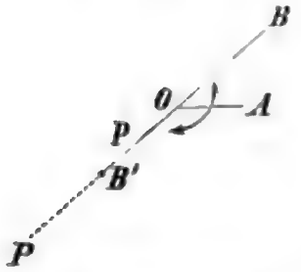
drückt aus, dass der Punkt P entweder auf der endlichen geraden Linie OB liegt, oder auf deren Verlängerung über B hinaus, aber nicht über O hinaus; so dass man sagen kann, der Ort von P ist in diesem Falle die unendlich lange Hälfte der Linie, oder des Strahls, der von O in der Richtung des Vectors OB oder β ausgeht; und wir können schreiben $\varrho = x\beta$, $x > 0$ (wo unter x ein Skalar zu verstehen ist), anstatt der vorher angegebenen Gleichungen.

(5.) Das folgende System der beiden Gleichungen,

$$\angle\frac{\varrho}{\alpha} = \pi - \angle\frac{\beta}{\alpha}, \quad \mathrm{Ax.}\frac{\varrho}{\alpha} = -\mathrm{Ax.}\frac{\beta}{\alpha},$$

drückt aus, dass der Ort von P der von O in der entgegengesetzten Richtung ausgehende Strahl ist; oder dass P auf der Verlängerung des Revectors $BO(1)$ liegt; oder dass $\varrho = x\beta$, $x < 0$; oder dass $\varrho = x\beta'$, $x > 0$, wenn $\beta' = OB' = -\beta$.

Fig. 33, bis.



(Vergl. Fig. 33, bis.)

(6.) Andere Bezeichnungen, zur Darstellung dieser und anderer geometrischen Orte, gewährt der Quaternionencalcül, wie wir finden werden, in grosser Fülle; aber es schien mir angemessen, die vorigen schon jetzt aufzustellen, damit sie dazu dienen können, zu zeigen, dass gerade die beiden Symbole dieses Abschnitts, Ax. und $\angle$, wenn sie als charakteristische Bezeichnungen für Operationen an Quotienten von Vectoren

Digitized by Google

aufgefasst werden, uns befähigen, in sehr einfacher und bestimmter Weise mehrere nützliche geometrische Begriffe auszudrücken.

133. Wenn man eine dritte Linie, OI, in der Richtung der Achse OX eines solchen rechtwinkligen Quotienten (und daher senkrecht, nach 127, 129, zu jeder der beiden gegebenen zu einander rechtwinkligen Linien, OA, OB) zieht; und wenn die Länge der neuen Linie OI zur Länge der Achse OX (und daher, nach 128, auch zur angenommenen Längeneinheit) dasselbe Verhältniss hat, wie die Länge der Dividend-Linie, OB, zur Länge der Divisor-Linie, OA; dann heisst die so bestimmte Linie OI der Index des rechtwinkligen Quotienten. Und es ist, nach dieser Definition eines solchen Index, in Verbindung mit unserer allgemeinen Definition (117, 118) der Gleichheit von Quaternionen, klar, dass zwei rechtwinklige Quotienten einander gleich oder ungleich sind, je nachdem ihre beiden Index-Linien (oder Indices) gleiche oder ungleiche Vectoren sind.

Sechster Abschnitt.

Ueber den Reciproken, Conjugirten, Entgegengesetzten, und über die Norm eines Quaternions; über Null-Quaternionen.

134. Der Reciproke (oder der Inverse, vergl. 119) eines Quaternions, wie $q = \frac{\beta}{\alpha}$, ist der andere Quaternion,

$$q' = \frac{\alpha}{\beta},$$

der durch Vertauschung der Divisor-Linie und der Dividend-Linie gebildet wird; und wenn wir so von einem nichtskalar Quaternion zu seinem Reciproken übergehn, so bleibt augenscheinlich der Winkel (wie ich ihn zuletzt in 130 definirte) ungeändert, aber die Richtung der Achse (127, 128) wird umgekehrt; wir können daher allgemein schreiben:

$$\angle \frac{\alpha}{\beta} = \angle \frac{\beta}{\alpha}; \qquad \text{Ax.}\, \frac{\alpha}{\beta} = -\,\text{Ax.}\, \frac{\beta}{\alpha}.$$

135. Das Produkt zweier reciproken Quaternionen ist stets der positiven Einheit gleich; und jeder ist gleich dem

Digitized by Google

Quotienten aus der Einheit dividirt durch den andern; denn wir haben, nach 106, 107,

$$1 : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}, \text{ und } \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} = 1.$$

Es ist daher unnöthig, eine neue oder besondere Bezeichnung einzuführen, um die gegenseitige Beziehung zwischen einem Quaternion und seinem Reciproken auszudrücken; denn, wenn der eine durch das Symbol q bezeichnet wird, kann der andere (im gegenwärtigen System, wie in der Algebra) durch das damit verbundene Symbol,* $1 : q$, oder $\frac{1}{q}$, bezeichnet werden. Wir haben also die beiden allgemeinen Formeln (vergl. 134):

$$\angle \frac{1}{q} = \angle q; \qquad \text{Ax.} \frac{1}{q} = -\text{Ax.}\, q.$$

136. Ohne jetzt auf die allgemeine Theorie der Multiplication und Division von Vectoren einzugehn, mag doch hier ausser dem, was ich in Art. 120 gegeben habe, bemerkt werden, dass wir, wenn irgend zwei Quaternionen q und q' (wie in 134) zu einander reciprok sind, so dass $q' \cdot q = 1$ (nach 135), und wenn q'' irgend ein dritter Quaternion ist, dann die allgemeine Formel,

$$q'' : q = q'' \cdot q' = q'' \cdot \frac{1}{q},$$

haben, wie in der Algebra; denn wenn wir (nach 120) q und q'' auf einen gemeinsamen Nenner α bringen, und die neuen Zähler mit β und γ bezeichnen, so haben wir (nach den Definitionen in 106, 107),

$$q'' : q = \frac{\gamma}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta} = q'' \cdot q'.$$

137. Wenn zwei complanare Dreiecke AOB, AOB', mit einer gemeinsamen Seite OA, umgekehrt ähnlich (118) sind, wie in Fig. 36, so dass die Formel $\Delta AOB' \propto' AOB$ statt hat, dann heissen die beiden ungleichen Quotienten*,

---

* Das Zeichen, q^{-1}, für den Reciproken eines Quaternions q, ist auch in unserer Rechenart erlaubt; aber ich enthalte mich, es zu gebrauchen, ehe ich nicht seine Berechtigung, im Zusammenhang mit einer allgemeinen Theorie der Potenzen von Quaternionen, nachgewiesen habe.

** Vergleiche die Anmerkung zu Art. 118.

$\frac{OB}{OA}$ und $\frac{OB'}{OA}$, conjugirte Quaternionen; und wenn der erste von ihnen wieder mit q bezeichnet wird, dann wird der zweite, der also der Conjugirte des ersten ist, oder irgend eines anderen Quaternions, der ihm gleich ist, durch das neue Symbol, Kq, bezeichnet; der Buchstabe K kann das charakteristische Zeichen der Conjugation genannt werden. So können wir, bei der vorher angenommenen Construction (vergl. wieder Fig. 36), schreiben,

$$\frac{OB}{OA} = q; \quad \frac{OB'}{OA} = Kq = K\frac{OB}{OA}.$$

138. Aus dieser Definition conjugirter Quaternionen folgt, 1) dass, wenn die Gleichung $\frac{OB'}{OA} = K\frac{OB}{OA}$ statt hat, die Linie OB' das Spiegelbild der Linie OB (und umgekehrt, die letztere Linie das Spiegelbild der ersteren) in Bezug auf die Linie OA genannt werden kann (118); 2) dass, unter derselben Bedingung, die Linie OA (wenn nöthig verlängert) die Linie BB' halbirt und zu ihr senkrecht ist, in einem Punkte A' (wie er in Fig. 36 dargestellt ist); und 3) dass irgend zwei conjugirte Quaternionen (ebenso wie zwei reciproke Quaternionen, vergl. 134, 135) gleiche Winkel, aber entgegengesetzte Achsen haben; so dass wir, im Allgemeinen, schreiben können,

$$\angle Kq = \angle q; \quad \text{Ax. } Kq = -\text{Ax. } q;$$

und daher* (nach 135),

$$\angle Kq = \angle\frac{1}{q}; \quad \text{Ax. } Kq = \text{Ax. } \frac{1}{q}.$$

139. Der Reciproke eines Skalars, x, ist einfach ein anderer Skalar, $\frac{1}{x}$, oder x^{-1}, der dasselbe algebraische Vorzeichen hat, und in allen anderen Beziehungen zu x in demselben Verhältniss steht, wie in der Algebra. Dagegen ist der Conjugirte Kx, eines Skalars x, als Grenzwerth eines Quaternions betrachtet, dem Skalar x selbst gleich; man sieht das sogleich ein, wenn man annimmt, dass die beiden gleichen, aber entgegen-

* Wir werden bald sehn, dass die beiden letzten Gleichungen (138) ausdrücken, dass der Conjugirte und der Reciproke, eines gegebenen Quaternions q, stets gleiche Versoren haben, wenn sie auch im Allgemeinen ungleiche Tensoren haben.

Digitized by Google

gesetzten Winkel, AOB und AOB', in Fig. 36, zugleich gegen Null, oder gegen zwei Rechte convergiren. Wir können daher allgemein schreiben,

$$Kx = x, \text{ wenn } x \text{ irgend ein Skalar ist;}$$

und umgekehrt*,

$$q = \text{einem Skalar, wenn } Kq = q;$$

denn dann müssen wir (nach 104) haben $OB = OB'$, $BB' = 0$; und daher muss jeder der beiden (jetzt zusammenfallenden) Punkte, B, B', irgendwo auf der unendlichen graden Linie OA liegen.

140. Im Allgemeinen ist, nach der in derselben Figur dargestellten Construction, die Summe (vergl. 6) der beiden Zähler (oder Dividend-Linien, OB und OB') der beiden conjugirten Brüche (oder Quotienten, oder Quaternionen), q und Kq (137), gleich dem Doppelten der Linie OA'; daher ist (nach 106), die Summe der beiden conjugirten Quaternionen selbst,

$$Kq + q = q + Kq = \frac{2\,OA'}{OA};$$

diese Summe ist daher stets ein Skalar, und zwar positiv, wenn der Winkel $\angle\, q$ spitz, und negativ, wenn der Winkel stumpf ist.

141. In dem Zwischenfalle, wenn der Winkel AOB ein rechter ist, verschwindet der Abstand OA' zwischen dem Anfangspunkte O und der Linie BB'; und die beiden zuletzt erwähnten Zähler, OB, OB', werden zwei entgegengesetzte Vectoren, deren Summe null (5) ist. Nun ist es, im Allgemeinen, natürlich, und wird sich als nützlich, oder besser nothwendig erweisen (zur Uebereinstimmung mit früheren Definitionen), anzunehmen, dass ein null Vector, durch einen wirklichen Vector dividirt, stets einen Null-Quaternionen als Quotienten ergiebt; und diesen null Quotienten durch das gebräuchliche Zeichen für Null zu bezeichnen. In der That, haben wir (nach 106) die Gleichung,

$$\frac{0}{\alpha} = \frac{\alpha - \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha} = 1 - 1 = 0;$$

die Null in dem Zähler des links stehenden Bruches stellt

* Weiterhin werden wir sehn, dass die Gleichung $Kq = q$ auch geschrieben werden kann $Vq = 0$; und dass die letztere Form in anderer Weise ausdrückt, dass der Quaternion, q, in einen Skalar degenerirt (131).

hier eine null Linie (oder einen null Vector, 1, 2) dar; aber die Null auf der rechten Seite der Gleichung bezeichnet einen null Quotienten (oder Quaternion). Und somit sind wir berechtigt zu schliessen, dass die Summe, $Kq + q$, oder $q + Kq$, eines rechtwinkligen Quaternions, oder rechtwinkligen Quotienten (132), und seines Conjugirten, stets gleich null ist.

142. Wir haben daher die drei folgenden Formeln, von denen die zweite eine gewisse Stetigkeit des Uebergangs von der ersten zur dritten herstellt:

$$\text{I} \ldots q + Kq > 0, \quad \text{wenn} \quad \angle q < \tfrac{\pi}{2};$$

$$\text{II} \ldots q + Kq = 0, \quad \text{wenn} \quad \angle q = \tfrac{\pi}{2};$$

$$\text{III} \ldots q + Kq < 0, \quad \text{wenn} \quad \angle q > \tfrac{\pi}{2}.$$

Und da ein Quaternion, oder geometrischer Quotient, mit einer wirklichen und endlichen Divisor-Linie (wie hier OA), nicht gleich null werden kann, wenn nicht seine Dividend-Linie verschwindet, denn (nach 104) erfordert die Gleichung

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0 = \frac{0}{\alpha} \text{ die Gleichung } \beta = 0,$$

so können wir, wenn α irgend ein wirklicher und endlicher Vector ist, umgekehrt schliessen, dass die Summe $q + Kq$ nicht verschwinden kann, ohne dass auch die Linie OA' verschwindet; das heisst, die Linien OB, OB' werden dann entgegengesetzte Vectoren, und daher wird der Quaternion q ein rechtwinkliger Quotient (132). Wir sind daher berechtigt, die drei folgenden umgekehrten Formeln aufzustellen (die wirklich aus den drei früheren folgen):

$$\text{I}' \ldots \text{wenn } q + Kq > 0, \quad \text{dann ist } \angle q < \tfrac{\pi}{2};$$

$$\text{II}' \ldots \text{wenn } q + Kq = 0, \quad \text{dann ist } \angle q = \tfrac{\pi}{2};$$

$$\text{III}' \ldots \text{wenn } q + Kq < 0, \quad \text{dann ist } \angle q > \tfrac{\pi}{2}.$$

143. Wenn zwei entgegengesetzte Vectoren (1), wie β und $-\beta$, beide durch denselben (und wirklichen) Vector, α, dividirt werden, so wollen wir die so erhaltenen beiden Quotienten entgegengesetzte Quaternionen nennen; so dass der

Digitized by Google

Entgegengesetzte eines Quaternions q, oder eines Quotienten $\beta : \alpha$, in folgender Weise (vergl. 4) bezeichnet werden kann:

$$\frac{-\beta}{\alpha} = \frac{0-\beta}{\alpha} = \frac{0}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha} = 0 - q = -q;$$

der Quaternion q selbst kann, in demselben Sinne, durch das Symbol $0 + q$, oder $+q$, bezeichnet werden (vergl. 7). Die Summe irgend zweier entgegengesetzter Quaternionen ist null, und ihr Quotient ist die negative Einheit; wir können daher, wie in der Algebra (vergl. wieder 7) schreiben,

$$(-q) + q = (+q) + (-q) = 0; \qquad (-q) : q = -1;$$
$$-q = (-1)\,q;$$

denn, nach 106 und 141, ist

$$\frac{-\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta-\beta}{\alpha} = \frac{0}{\alpha} = 0, \qquad \frac{-\beta}{\alpha} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{-\beta}{\beta} = -1, \text{ u. s. w.}$$

Die Reciproken entgegengesetzter Quaternionen sind selbst entgegengesetzt; oder in Zeichen (vergl. 126),

$$\frac{1}{-q} = -\frac{1}{q}, \text{ denn } \frac{\alpha}{-\beta} = \frac{-\alpha}{\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Entgegengesetzte Quaternionen haben entgegengesetzte Achsen, und supplementäre Winkel (vergl. Fig. 33, bis); so dass wir [vergl. 132, (5.)] die beiden folgenden allgemeinen Formeln aufstellen können,

$$\angle\,(-q) = \pi - \angle\,q; \qquad \mathrm{Ax.}\,(-q) = -\,\mathrm{Ax.}\,q.$$

144. Wir können jetzt auch, in völliger Uebereinstimmung mit den früheren Formeln II. und II′. in 142, die Gleichung hinschreiben,

$$\mathrm{II}''.... Kq = -q, \text{ wenn } \angle\,q = \frac{\pi}{2};$$

und umgekehrt* (vergl. 138),

$$\mathrm{II}''' \ldots \text{ wenn } Kq = -q, \text{ dann ist } \angle\,Kq = \angle\,q = \frac{\pi}{2}.$$

In Worten, der Conjugirte eines rechtwinkligen Quotienten, oder eines rechtwinkligen (oder rechten) Quaternions (132), ist der rechte Quotient, der ihm entgegengesetzt ist; und umgekehrt, wenn ein wirklicher Quaternion (das heisst einer, der

* Wir werden später sehn, dass die Gleichung $Kq = -q$, oder $q + Kq = 0$, in die andere Gleichung, $Sq = 0$, transformirt werden kann; und dass sie, unter dieser letzteren Form, ausdrückt, dass der skalare Theil des Quaternions q verschwindet; oder dass der Quaternion ein rechter Quotient (132) ist.

Digitized by Google

nicht null ist) seinem eigenen Conjugirten entgegengesetzt ist, so muss er ein rechter Quotient sein.

(1.) Wenn wir daher die Gleichung antreffen,

$$K\frac{\varrho}{\alpha} = -\frac{\varrho}{\alpha}, \text{ oder } \frac{\varrho}{\alpha} + K\frac{\varrho}{\alpha} = 0,$$

so werden wir daraus ersehn, dass $\varrho \perp \alpha$ ist; und daher (wenn $\alpha = OA$, und $\varrho = OP$, wie vorher), dass der Ort des Punktes P die Ebne durch O ist, senkrecht zur Linie OA [wie in 132, (1.)].

(2.) Andererseits drückt die Gleichung,

$$K\frac{\varrho}{\alpha} = +\frac{\varrho}{\alpha}, \text{ oder } \frac{\varrho}{\alpha} - K\frac{\varrho}{\alpha} = 0,$$

(nach 139) aus, dass der Quotient $\varrho : \alpha$ ein Skalar ist; und dass daher (nach 131) sein Winkel $\angle\ (\varrho : \alpha)$ entweder 0 oder π ist; sodass in diesem Falle der Ort P die unbegrenzte grade Linie durch die beiden Punkte O und A ist.

145. Wie der Entgegengesetzte des Entgegengesetzten, oder der Reciproke des Reciproken, so ist auch der Conjugirte des Conjugirten, irgend eines Quaternions dieser Quaternion selbst; oder in Zeichen,

$$-(-q) = +q; \quad 1:(1:q) = q; \quad KKq = q = 1q;$$

so dass wir, wenn wir von dem Gegenstande der Operation absehn, kurz schreiben können,

$$K^2 = KK = 1.$$

Es ist auch leicht zu beweisen, dass die Conjugirten entgegengesetzter Quaternionen selbst entgegengesetzte Quaternionen sind; und dass die Conjugirten von Reciproken reciprok sind; oder in Zeichen, dass,

$$\text{I} \ldots K(-q) = -Kq, \text{ oder } Kq + K(-q) = 0;$$

und

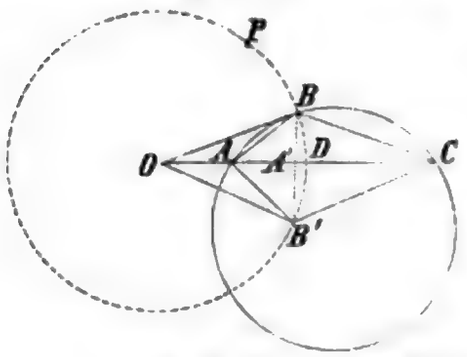
$$\text{II} \ldots K\frac{1}{q} = 1:Kq, \text{ oder } Kq.K\frac{1}{q} = 1.$$

(1.) Die Gleichung $K(-q) = -Kq$ ist in der allgemeineren Formel, $K(xq) = xKq$, in der x irgend ein Skalar ist, eingeschlossen (vergl. 143); und diese letzte Gleichung (vergl. 126) kann dadurch bewiesen werden, dass man sich einfach vorstellt, dass die beiden Linien OB, OB', in Figur 36, mit demselben Skalar multiplicirt werden; oder dass beide durch eine Parallele zur Linie BB' geschnitten werden.

Digitized by Google

(2.) Um zu beweisen, dass Conjugirte von Reciproken reciprok sind, oder dass $Kq.\ K\frac{1}{q} = 1$, können wir uns vorstellen, dass, wie in der nebenstehenden Figur 36, bis, ein neuer Punkt C entweder auf der Linie OA selbst, oder auf deren Verlängerung über A hinaus, so bestimmt wird, dass er jeder der den beiden folgenden Bedingungen für direkte Aehnlichkeit:

Fig. 36, bis.



$$\Delta\ BOC \propto AOB',\quad \Delta\ B'OC \propto AOB,$$

zugleich genügt; oder einfach, als einer Beziehung zwischen den vier Punkten O, A, B, C, der Formel,

$$\Delta\ BOC \propto' AOB;$$

während wir zugleich die Beziehung für inverse Aehnlichkeit,

$$\Delta\ AOB' \propto' AOB \text{ (118, 137)},$$

haben, wie in der früheren Figur 36. Denn dann haben wir die Transformationen,

$$K\frac{1}{q} = K\frac{OA}{OB} = K\frac{OB'}{OC} = \frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OB'} = \frac{1}{Kq}.$$

(3.) Die beiden Quotienten, $OB : OA$, und $OB : OC$, das heisst, der Quaternion q selbst, und der Conjugirte seines Reciproken, oder* der Reciproke seines Conjugirten, haben denselben Winkel, und dieselbe Achse; wir können daher, im Allgemeinen, schreiben,

$$\angle\ K\frac{1}{q} = \angle\ q; \qquad \text{Ax.}\ K\frac{1}{q} = \text{Ax.}\ q.$$

(4.) Da wir nun somit bewiesen haben (nach Nebenart. 2), dass $OA : OB$ und $OA : OB'$ ein Paar conjugirter Quotienten sind, so können wir jetzt den Satz folgern, dass irgend zwei geometrische Brüche, $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\alpha}{\beta'}$, die denselben Zähler α haben, conjugirte

* Wir werden später sehn, dass der gemeinsame Werth der beiden gleichen Quaternionen, $K\frac{1}{q}$ und $\frac{1}{Kq}$, durch eines der beiden neuen Symbole, $Uq : Tq$, oder $q : Nq$, dargestellt werden kann; oder mit Worten, dass er gleich dem Versor dividirt durch den Tensor ist; und auch gleich dem Quaternion selbst dividirt durch die Norm.

Quaternionen sind, wenn der Nenner β' des zweiten das Spiegelbild des Nenners β des ersten in Bezug auf den gemeinsamen Zähler (vergl. 138, I.) ist; während vorher nur, als eine Definition (137), angenommen wurde, dass eine solche Conjugation, unter derselben geometrischen Bedingung, zwischen den beiden anderen (oder umgekehrten) Brüchen, $\frac{\beta}{\alpha}$ und $\frac{\beta'}{\alpha}$, besteht; die drei Vectoren α, β, β' sind alle als coinitial (18) gedacht.

(5.) Wenn wir, umgekehrt, in irgend einer Untersuchung, auf die Formel

$$OA : OB' = K\,(OA : OB)$$

treffen, so werden wir wissen, dass der Punkt B' das Spiegelbild des Pnnktes B, in Beziehung auf die Linie OA, ist; oder dass die Linie, OA, wenn nöthig, über einen ihrer beiden Endpunkte hinaus verlängert, die Linie BB' in einem Punkte A' senkrecht schneidet und halbirt, wie in jeder der beiden Figuren 36 (vergl. 138, II.).

(6.) Unter den vorigen geometrischen Bedingungen folgt aus den elementarsten Sätzen der Geometrie, dass der Kreis, der durch die drei Punkte A, B, C geht, im Punkte B durch die gerade Linie OB berührt wird; und dass diese Linie, der Länge nach, eine mittlere Proportionale zwischen den Linien OA, OC ist. OD sei ein solches geometrisches Mittel, und sei von O aus in der gemeinsamen Richtung der beiden zuletzt erwähnten Linien gezogen, so dass der Punkt D zwischen A und C fällt; es mögen ferner die Vectoren OC, OD durch die Symbole, γ, δ bezeichnet werden; dann haben wir Gleichungen von den Formen,

$$\delta = a\,\alpha, \qquad \gamma = a^2\,\alpha,$$

in denen a einen positiven Skalar bezeichnet, $a > 0$; und der Vector β von B ist mit dem Skalar a, und mit dem Vector α, durch die Formeln,

$$\frac{OB}{OC} = K\frac{OA}{OB}, \text{ oder } \frac{OC}{OB} = K\frac{OB}{OA}, \text{ oder } \frac{a^2\alpha}{\beta} = K\frac{\beta}{\alpha}$$

verbunden (vergl. Nebenart. 2).

(7.) Umgekehrt, wenn wir wieder voraussetzen, dass $\gamma = a^2\alpha$, so drückt die letzte Formel die inverse Aehnlichkeit der

Digitized by Google

Dreiecke, $\Delta BOC \propto' AOB$, aus; und sie drückt nicht mehr aus, oder mit anderen Worten, sie wird befriedigt durch den Vector β jedes Punktes B, der diese inverse Aehnlichkeit ergiebt. Aber für diesen Zweck ist nur erforderlich, dass die Länge von OB (wie vorher) ein geometrisches Mittel zwischen den Längen von OA, OC würde; oder dass die beiden Linien OB, OD (Nebenart. 6) gleich lang würden; oder endlich, dass B irgendwo auf der Oberfläche einer Kugel läge, die so beschrieben wird, dass sie durch den Punkt D (in Fig. 36, bis) geht und den Anfangspunkt O zum Mittelpunkt hat.

(8.) Wenn wir daher eine Gleichung von der Form,

$$\frac{a^2\alpha}{\varrho} = K\frac{\varrho}{\alpha}, \text{ oder } \frac{\varrho}{\alpha} K \frac{\varrho}{\alpha} = a^2,$$

finden, in der $\alpha = OA$, $\varrho = OP$, und a ein Skalar ist, wie vorher, so werden wir wissen, dass der Ort des Punktes P eine Kugeloberfläche ist, mit ihrem Mittelpunkt im Punkte O, und mit dem Vector $a\alpha$ als Radius; und ferner, dass, wenn wir einen Punkt C durch die Gleichung $OC = a^2\alpha$ bestimmen, der sphärische Ort von P zugleich orthogonal zu allen Kreisen APC ist, die so beschrieben werden können, dass sie durch die beiden festen Punkte A und C, gehn; denn jeder Radius OP der Kugel ist eine Tangente zum Kreise APC in dem variablen Punkte P, gerade so wie OB es ist zu ABC in der vorigen Figur.

(9.) In derselben Figur, 36, bis, zeigen die ähnlichen Dreiecke (nach elementaren Sätzen), dass die Länge von BC zu der von AB in dem halben Verhältniss von OC zu OA steht, oder in dem einfachen Verhältniss von OD zu OA; oder wie der Skalar a zu 1. Wenn wir daher in irgend einer Untersuchung die vorige Gleichung in ϱ (Nebenart. 8) antreffen, so wissen wir, dass

$$\text{Länge von } (\varrho - a^2\alpha) = a \times \text{Länge von } (\varrho - \alpha);$$

während die frühere Deutung derselben Gleichung die weitere Beziehung von derselben Art ergiebt:

$$\text{Länge von } \varrho = a \times \text{Länge von } \alpha.$$

(10.) Auf einer späteren Stufe werden wir zeigen, dass die Rechnung mit Quaternionen Transformationsregeln darbietet, durch die wir von irgend einer zu irgend einer anderen von den letzten Gleichungen in ϱ übergehn können, ohne (zu gleicher Zeit)

irgend eine Figur zu construiren, oder (unmittelbar) die Geometrie anzuwenden; aber ich hielt es für nützlich, schon jetzt nachzuweisen, wie viele geometrische Bedeutung* in einer so einfachen Formel enthalten ist, wie die des letzten Nebenartikels 8.

(11.) Das Produkt zweier conjugirten Quaternionen heisst ihre gemeinsame Norm**, und wird in folgender Weise bezeichnet:

$$q\,Kq = Nq.$$

Es folgt daraus, dass $NKq = Nq$; und dass die Norm eines Quaternions im Allgemeinen ein positiver Skalar ist; nämlich, das Quadrat des Quotienten der Längen der beiden Linien, für die der Quaternion selbst der Quotient (112) ihrer Vectoren ist. In der That haben wir, nach Nebenartikel 6 und nach der Definition einer Norm, die Transformationen:

$$N\frac{OB}{OA} = N\frac{OB'}{OA} = \frac{OC}{OB'}\cdot\frac{OB'}{OA} = \frac{OC}{OB}\cdot\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OA} = \left(\frac{OD}{OA}\right)^2;$$

$$Nq = N\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha}K\frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{\text{Länge von } \beta}{\text{Länge von } \alpha}\right)^2.$$

---

* Ein Kenner der Geometrie der Alten wird in den beiden letzten Gleichungen des Nebenartikels 9 eine Art von Uebertragung eines berühmten Satzes des Apollonius von Perga in die Sprache der Vectoren erkennen, der uns durch ein Citat seines ersten Commentators Eutocius erhalten worden ist, und so ausgesprochen werden kann:

„Wenn irgend zwei Punkte (wie hier A und C) in einer Ebene gegeben sind, und irgend ein Verhältniss für ihre Ungleichheit (wie hier das von 1 zu a), so ist es möglich, einen Kreis in dieser Ebne (wie hier den Kreis BDB') so zu construiren, dass die Längen der beiden geraden Linien (wie hier AB und CB, oder AP und CP), die von den zwei gegebenen Punkten zu ein und demselben Punkte (wie B oder P) des Umfanges gehen, zu einander das gegebene Verhältniss haben. (*Δύο δοθέντων σημείων κ. τ. λ.* Seite 11 in Halley's Ausgabe des Apollonius, Oxford, *MDCCX.*)"

** Der Name „Norm" und das entsprechende charakteristische Zeichen N sind hier aus der Zahlentheorie herübergenommen; aber in diesem Buche werden sie nicht oft angewandt werden, obwohl es gelegentlich angemessen sein kann, sie anzuwenden, denn wir werden bald den Begriff und die charakteristische Bezeichnung des Tensors, Tq, eines Quaternions einführen, der von grösserer geometrischer Nützlichkeit ist, als die Norm, aber von dem wir beweisen werden, dass die Norm einfach gleich seinem Quadrat ist,

$$q\,Kq = Nq = (Tq)^2.$$

Vergleiche die Anmerkung zu Nebenart. 3.

Digitized by Google

Als einen Grenzfall können wir anführen, dass die Norm eines (null) Quaternions Null ist, oder in Zeichen: $N0 = 0$.

(12.) Mit dieser Bezeichnung nimmt die Gleichung des sphärischen Ortes (Nebenart. 8), der den Punkt O zum Mittelpunkt hat, und den Vector $a\alpha$ zu einem seiner Radien, die kürzere Form an.:

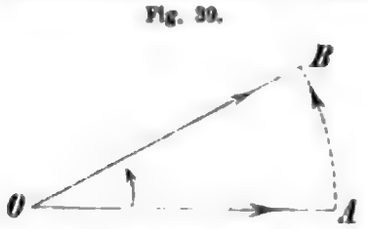
$$N\frac{\varrho}{\alpha} = a^2; \quad \text{oder} \quad N\frac{\varrho}{a\alpha} = 1.$$

Siebenter Abschnitt.

Ueber radiale Quotienten; und über das Quadrat eines Quaternions.

146. Wir haben früher gesehn (vergl. Art. 2, und Fig. 4), dass irgend zwei Radien, AB, AC, eines Kreises oder einer Kugel nothwendig ungleiche Vectoren sind; denn ihre Richtungen sind verschieden. Andererseits können wir, wenn wir nur die relative Richtung (110) in Betracht ziehn, annehmen, dass alle verglichenen Vectoren nicht nur coinitial (18), sondern auch gleich lang sind; wenn wir daher ihre gemeinsame Länge zur Einheit nehmen, so sind sie alle Radien OA, OB, . . . einer sogenannten Einheitskugel (128), die um den Anfangspunkt als Mittelpunkt beschrieben ist; und können sämmtlich Einheitsvectoren (129) genannt werden. Und dann kann der Quaternion, welcher der Quotient eines solchen Vectors dividirt durch einen anderen ist, oder allgemein der Quotient irgend zweier gleich langen Vectoren, ein radialer Quotient genannt werden; oder zuweilen einfach ein Radial. (Vergleiche die nebenstehende Figur 39.)

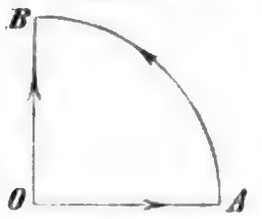
Fig. 39.



147. Die beiden Einheitsskalare, nämlich die positive und negative Einheit, können als Grenzfälle von radialen Quotienten angesehn werden, die den beiden Grenzwerthen 0 und π des Winkels AOB, oder $\angle q$ (131), entsprechen. Im Zwischen-

falle, wenn AOB ein rechter Winkel ist, oder $\angle q = \frac{\pi}{2}$, wie in Figur 40, kann der resultirende Quotient, oder Quaternion, ein rechter radialer Quotient genannt werden (vergl. 132); oder einfach ein rechter Radial. Die Betrachtung solcher rechten Radiale ist, wie wir finden werden, von grosser Wichtigkeit in der ganzen Theorie und Praxis der Quaternionen.

Fig. 40.

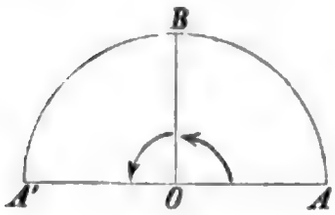


148. Die wichtigste allgemeine Eigenschaft der zuletzt erwähnten Quotienten ist folgende: dass das Quadrat jedes rechten Radials gleich der negativen Einheit ist; ich bemerke dabei, dass wir allgemein, wie in der Algebra, schreiben,

$$q \cdot q = qq = q^2,$$

und dass wir dies Produkt zweier gleichen Quaternionen das Quadrat jedes von ihnen nennen. Denn wenn wir, wie in Fig. 41, einen Halbkreis ABA' beschreiben, um O als Mittelpunkt, und mit dem die Linie AA' halbirenden Radius OB als Radius, so sind die beiden rechten Quotienten, $OB : OA$ und $OA' : OB$, gleich (vergl. 117); und daher ist ihr gemeinsames Quadrat (vergl. 107) das Produkt,

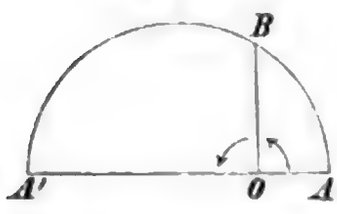
Fig. 41.



$$\left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = \frac{OA'}{OB} \cdot \frac{OB}{OA} = \frac{OA'}{OA} = -1;$$

wo OA und OB irgend zwei gleich lange, aber zu einander rechtwinklige Linien darstellen können. Allgemeiner, das Quadrat jedes rechten Quotienten (132) ist gleich einem negativen Skalar; nämlich gleich dem negativen Quadrat der Zahl, welche das Längenverhältniss* der beiden zu einander rechtwinkligen verglichenen Linien darstellt; oder gleich Null weniger dem Quadrat der Zahl, welche die Länge des Index des rechten Quotienten bezeichnet (vergl. 133);

Fig. 41, bis.



* Daher ist nach 145 (11) $q^2 = -Nq$, wenn $\angle q = \frac{\pi}{2}$.

Digitized by Google

man sieht das sofort aus Fig. 41, bis, in der OB nur eine Ordinate, und nicht (wie vorher) ein Radius, des Halbkreises ABA' ist; denn wir haben so:

$$\left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = \frac{OA'}{OA} = -\left(\frac{\text{Länge von } OB}{\text{Länge von } OA}\right)^2, \text{ wenn}$$

$$OB \perp OA.$$

149. So ist also jeder rechte Radial in dem gegenwärtigen System eine der Quadratwurzeln der negativen Einheit, und kann daher einer der Werthe des Symbols $\sqrt{-1}$ genannt werden; dieses berühmte Symbol hat daher einen gewissen Grad von Allgemeinheit, oder wenigstens von Unbestimmtheit, in seiner Bedeutung in unserer Theorie; und ich werde es deshalb nicht oft anwenden. Denn obwohl es eine vollkommen klare und geometrisch reelle Deutung zulässt, da es das bezeichnet, was wir vorher einen rechten radialen Quotienten genannt haben, so ist doch die Ebne dieses Quotienten willkürlich; und das Symbol selbst muss daher in dem gegenwärtigen Rechensysteme so angesehn werden, als ob es unendlich viele Werthe habe; oder mit anderen Worten, die Gleichung,

$$q^2 = -1,$$

hat im Quaternionencalcül unendlich viele Wurzeln*, die alle geometrische Reelle sind; ausser einigen anderen Wurzeln von rein symbolischem Charakter, die, wie man sich vorstellen kann, dieselbe Gleichung besitzt, und die geometrische Imaginäre genannt** werden können.

Umgekehrt, wenn q irgend ein reeller Quaternion ist, der

* Ich werde später zeigen, dass, wenn x, y, z irgend drei Skalare sind, für welche die Summe ihrer Quadrate gleich der Einheit ist, so dass

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

und wenn i, j, k irgend drei rechte Radiale sind, in drei zu einander rechtwinkligen Ebnen, dann der Ausdruck

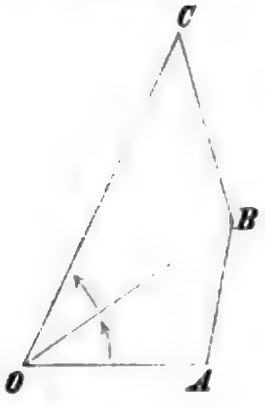
$$q = ix + jy + kz$$

einen anderen rechten Radial bezeichnet, der (als solcher und nach symbolischen Gesetzen, die ich angeben werde) der Gleichung $q^2 = -1$ genügt, und der daher einer der geometrisch reellen Werthe des Symbols $\sqrt{-1}$ ist.

** Solche Imaginäre werden sich von selbst darbieten bei der Behandlung von idealen Durchschnitten und von idealen Berührungen in

der Gleichung $q^2 = -1$ genügt, so muss er ein rechter Radial sein; denn wenn wir, wie in Fig. 42, annehmen, dass $\measuredangle AOB \propto BOC$, so haben wir

Fig. 42.



$$q^2 = \left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OA};$$

und das Quadrat von q kann nicht gleich der negativen Einheit werden, wenn nicht $OC = -OA$ ist, oder $= OA'$ in Fig. 41; das heisst, wenn nicht die Linie OB rechtwinklig zur Linie OA ist, und zu gleicher Zeit ebenso lang wie sie, wie in Fig. 40.

(1.) Wenn wir daher die Gleichung antreffen,

$$\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = -1,$$

in der $\alpha = OA$, und $\varrho = OP$, wie vorher, ist, so werden wir wissen, dass der Ort des Punktes P der Umfang eines Kreises ist, dessen Mittelpunkt O ist, und dessen Radius dieselbe Länge hat, wie die Linie OA; die Ebne des Kreises ist senkrecht zur gegebenen Linie. Mit anderen Worten, der Ort von P ist ein grösster Kreis auf einer Kugel, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist; und der gegebene Punkt A, auf derselben Kugeloberfläche, ist einer der Pole dieses Kreises.

(2.) Im Allgemeinen erfordert die Gleichung $q^2 = -a^2$, in der a irgend ein (reeller) Skalar ist, dass der Quaternion q (wenn er reell ist) ein rechter Quotient (132) sei; die Zahl a bezeichnet die Länge des Index (133) dieses rechten Quotienten oder Quaternions (vergl. Art. 148, und Fig. 41, bis). Aber die Ebne von q ist auch jetzt noch ganz willkürlich; die Gleichung,

$$q^2 = -a^2,$$

wie die Gleichung $q^2 = -1$, die in ihr enthalten ist, muss daher so angesehn werden (in dem gegenwärtigen Systeme), als ob sie unendlich viele geometrisch reelle Wurzeln hat.

---

der Geometrie durch Quaternionen (oder besser durch sogenannte Biquaternionen); aber wir richten unsere Aufmerksamkeit gegenwärtig nur auf geometrische Reelle. Vergleiche die Anmerkungen zu Seite 112.

Digitized by Google

(3.) Daher drückt die Gleichung,

$$\left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = -a^2,$$

in der wir annehmen, dass $a > 0$ ist, aus, dass der Ort des Punktes P ein (neuer) Kreisumfang ist; die Linie OA ist seine Achse*, und die Länge seines Radius ist $= a \times$ der Länge von OA.

150. Ich füge hinzu, dass der Index (133) und die Achse (128) eines rechten Radials (147), eins und dasselbe ist; und dass sein Reciproker (134), sein Conjugirter (137), und sein Entgegengesetzter (143) einander sämmtlich gleich sind. Umgekehrt, wenn der Reciproke eines gegebnen Quaternions q gleich dem Entgegengesetzten dieses Quaternions ist, dann ist q ein rechter Radial; denn sein Quadrat, q^2, ist dann gleich (vergl. 136) dem Quaternion selbst, dividirt durch seinen Entgegengesetzten; und daher (nach 143) gleich der negativen Einheit. Ferner ist der Conjugirte jedes radialen Quotienten gleich dem Reciproken dieses Quotienten; denn wenn wir uns, in Fig. 36, die drei Linien OA, OB, OB' als gleich lang denken, oder wenn wir, in Fig. 39, den Bogen BA um einen gleichen Bogen AB' verlängern, so haben wir die Gleichung,

$$Kq = \frac{OB'}{OA} = \frac{OA}{OB} = \frac{1}{q}.$$

Und umgekehrt**,

$$\text{wenn } Kq = \frac{1}{q}, \text{ oder wenn } qKq = 1,$$

dann ist der Quaternion q ein radialer Quotient.

Achter Abschnitt.

Ueber den Versor eines Quaternions, oder eines Vectors; und über einige allgemeine Transformationsformeln.

151. Wenn ein Quaternion $q = \beta : \alpha$ ein radialer Quotient (146) ist, und wenn daher die Längen der beiden Linien

* Ich verstehe unter der Achse eines Kreises die gerade Linie senkrecht zu seiner Ebne, die durch seinen Mittelpunkt geht.

** Daher ist denn, mit Anwendung des Zeichens der Normen [145, (11.)], wenn $Nq = 1$, q ein Radial; und umgekehrt, die Norm eines radialen Quotienten ist stets gleich der positiven Einheit.

α und β gleich sind, so ist die Wirkung des Quaternions q, wenn man ihn als einen Factor (103) in der Gleichung $q\alpha = \beta$ auffasst, einfach eine Drehung der Multiplicand-Linie α um einen Winkel in der Ebne von q (119), der mit $\angle q$ (130) bezeichnet wird, und in einem Sinne, der durch die Richtung der positiven Achse Ax. q (129) bestimmt wird; so dass er die Linie α (oder eine drehbare Linie, die zuerst mit ihr zusammenfiel) in eine neue Lage bringt; nämlich in die der Produkt-Linie β. Und im Hinblick auf diese gedachte Operation des Drehens, werden wir von jetzt an jeden radialen Quotienten einen Versor nennen.

152. Ein Versor hat also, im Allgemeinen, eine Ebne, eine Achse, und einen Winkel; nämlich die des Radials (146), dem er entspricht, oder dem er gleich ist; der einzige Unterschied zwischen ihnen liegt in den verschiedenen Gesichtspunkten*, unter denen sie bezüglich betrachtet werden; nämlich, der Radial als der Quotient, q, in der Formel $q = \beta : \alpha$; und der Versor als der (gleiche) Factor, q, in der umgekehrten Formel $\beta = q \,.\, \alpha$; hierbei ist, wie vorher, vorausgesetzt, dass die beiden Vectoren, α und β, gleich lang sind.

153. Ein Versor, wie ein Radial (147), kann nur dann zu einem Skalar werden, wenn sein Winkel einen oder den anderen der beiden Grenzwerthe, 0 und π, annimmt. Im ersten Falle wird er die positive Einheit und im zweiten die negative Einheit; jeder der beiden Einheitsskalare (147) wird hierbei als ein Factor (oder Coëfficient, vergl. 12) angesehn, der an einer Linie wirkt, ihre Richtung zu erhalten oder umzukehren. Unter diesem Gesichtspunkte können wir sagen, dass -1 ein Inversor ist; und dass jeder rechte Versor (oder Versor mit einem Winkel $= \frac{\pi}{2}$) ein Semi-Inversor** ist; denn er dreht die Linie, an der er wirkt, zur Hälfte um, oder er dreht sie

* In einer gewissermassen metaphysischen Ausdrucksweise kann gesagt werden, dass der radiale Quotient das Ergebniss einer analytischen Betrachtung ist, in der zwei Radien einer Kugel (oder eines Kreises) in Bezug auf ihre relative Richtung verglichen werden; und dass der gleiche Versor das Mittel einer entsprechenden Synthese ist, durch die man sich einen Radius aus einem andern durch eine gewisse Drehung erzeugt denkt.

** Das Wort „Semi-Inversor" wird nicht oft gebraucht werden; aber

Digitized by Google

um die Hälfte von zwei rechten Winkeln (vergl. Fig. 41). Aus demselben Grunde werden wir dazu geführt, jeden rechten Versor (wie jeden rechten Radial, 149, von dem er sich ja, wie wir eben, in 152, gesehen haben, nur wie ein Factor von einem Quotienten unterscheidet) als eine der Quadratwurzeln der negativen Einheit anzusehn, oder als einen von den Werthen des Symbols $\sqrt{-1}$.

154. Man kann in der That bemerken, dass die Wirkung eines rechten Versors, der so aufgefasst wird, als ob er an einer Linie (in seiner Ebne) wirkt, die ist, diese Linie in einem gegebenen Sinne um einen rechten Winkel zu drehen. Wenn nun q ein solcher Versor ist, und wenn $q\alpha = \beta$, so haben wir auch (vergl. Fig. 41), $q\beta = -\alpha$; so dass wir, wenn α irgend eine Linie in der Ebne eines rechten Versors q ist, die Gleichung haben:

$$q \cdot q\alpha = -\alpha;$$

und es ist daher naturgemäss, unter derselben Bedingung, zu schreiben,

$$q^2 = -1,$$

wie in 149. Andererseits kann kein Versor, der nicht rechtwinklig ist, ein Werth von $\sqrt{-1}$ sein; oder kann der Gleichung, $q^2\alpha = -\alpha$, genügen, wie Fig. 42 erläutern kann. Denn in der Bedeutung dieser letzten Gleichung, wenn sie auf die Theorie der Versoren angewandt wird, ist mitenthalten, dass eine Drehung um $2 \angle q$, oder um das Doppelte des Winkels q selbst, gleich einer Umkehrung der Richtung ist; und daher gleich einer Drehung um zwei rechte Winkel.

155. Allgemein, wenn α irgend ein Vector ist, und wenn a augenblicklich* als Zeichen für die Zahl gebraucht wird,

---

seine gelegentliche Einführung an dieser Stelle scheint mir geeignet, den Gesichtspunkt zu beleuchten, unter dem wir in diesem Buche das Symbol $\sqrt{-1}$ betrachten, wenn es als Bezeichnung einer bestimmten wichtigen Klasse (149) von Reellen in der Geometrie angesehen wird. Ich brauche dieses Symbol auch, geometrische Imaginäre (vergl. wieder Art. 149 und die Anmerkungen zu Seite 112, 113) zu bezeichnen, die in Verbindung mit idealen Durchschnitten und mit idealen Berührungen in Betracht gezogen werden; aber mit solchem Gebrauch von $\sqrt{-1}$ haben wir gegenwärtig nichts zu thun.

* Ich werde bald eine allgemeine Bezeichnung vorschlagen, welche die Länge von Vectoren darstellt, und nach der das Symbol $T\alpha$ das bezeichnet, was ich vorher a genannt habe; aber ich will nicht jetzt schon mehr als

die seine Länge ausdrückt; so dass a hier ein positiver Skalar ist, der zur positiven Einheit, oder zum Skalar + 1, in demselben Verhältniss steht, wie die Länge der Linie α zur angenommenen Linieneinheit (vergl. 128); so bezeichnet der Quotient $\alpha : a$ im Allgemeinen (vergl. 16) einen neuen Vector, der dieselbe Richtung wie der angenommene Vector α hat, dessen Länge aber gleich der angenommenen Einheit ist: so dass er (vergl. 146) der Einheitsvector in der Richtung von α ist. Wir wollen diesen Einheitsvector durch das Symbol, $U\alpha$, bezeichnen; und wir werden daher allgemein schreiben,

$$U\alpha = \frac{\alpha}{a}, \text{ wenn } a = \text{Länge von } \alpha;$$

das heisst, um es vollständig auszudrücken, wenn a, wie vorher angenommen wurde, die (commensurable oder incommensurable, aber positive) Zahl ist, welche die Länge in Bezug auf eine gewählte Einheit darstellt.

156. Wir wollen jetzt annehmen, dass $q = \beta : \alpha$ (wie zu Anfang) ein allgemeiner Quaternion ist, oder der Quotient irgend zweier Vectoren α und β, mögen sie gleiche oder ungleiche Länge haben. Ein solcher Quaternion wird im Allgemeinen kein Versor sein, oder wenigstens nicht nur ein solcher, nach der zuletzt gegebenen Definition; denn seine Wirkung wird, wenn er als ein Factor (103) auf α wirkt, im Allgemeinen nicht die sein, diese Linie (151) nur zu drehen, sondern er wird, im Allgemeinen, sowohl die Länge*, als auch die Richtung ändern. Aber wenn wir die beiden angenommenen Vectoren, α und β, auf die beiden Einheitsvectoren $U\alpha$ und $U\beta$ (155) reduciren, und den Quotienten derselben bilden, so haben wir nur die relative Richtung in Betracht gezogen; und das Resultat wird daher ein Versor, in dem zuletzt definirten (151) Sinne, sein. Ich schlage vor, den so erhaltenen Quotienten, oder Versor, das Versor-Element, oder kurz, den Versor des Quaternions q zu nennen; und werde dasselbe** charakte-

---

ein neues charakteristisches Zeichen für eine Operation, wie K, oder T, oder U, u. s. w., auf einmal einführen.

* Durch eine Operation, die ich bald eine Spannung nennen werde, und die uns zur Betrachtung des Tensors eines Quaternions führen wird.

** Für jetzt kann die doppelte Anwendung der Charakteristik U,

Digitized by Google

ristische Zeichen, U, anwenden, um die Operation, den Versor eines Quaternions zu bilden, zu bezeichnen, wie das, welches ich vorher angewandt habe, die Operation (155), der Reduction eines Vectors auf die Längeneinheit, ohne irgend welche Aenderung seiner Richtung, zu bezeichnen. In diesem Sinne bezeichnet das Symbol Uq den Versor von q; und die vorhergehenden Definitionen setzen uns in den Stand die allgemeine Formel aufzustellen:

$$Uq = U\frac{\beta}{\alpha} = \frac{U\beta}{U\alpha};$$

in ihr können die beiden Einheitsvectoren, $U\alpha$ und $U\beta$, nach Analogie und aus anderen Gründen, die ich später darlegen werde, die Versoren* der Vectoren, α und β, genannt werden.

157. Wenn wir also von einem gegebenen Quaternion, q, zu seinem Versor, Uq, übergehen, so haben wir im Allgemeinen nur die Längen der beiden verglichenen Linien ge-

---

zur Aushülfe, um beides zu bezeichnen, den Einheitsvector $U\alpha$, der von einer gegebenen Linie α abgeleitet ist, und auch den Versor Uq, der von einem Quaternion q abgeleitet ist, hier so angesehen werden, als ob sie durch eine willkürliche Definition eingeführt worden ist; aber das ist gestattet, denn die Verschiedenheit der Zeichen, hier α und q, die bisher dazu dienten, Vectoren und Quaternionen zu bezeichnen, als den Gegenständen, an denen die beiden Operationen U vollzogen werden, schützt uns bei einem solchem doppelten Gebrauch der Charakteristik vor Missverständnissen. Aber wir werden weiter finden, dass verschiedene wichtige Analogien sich ohne Weiteres ausdrücken lassen, oder wenigstens gefördert werden, wenn die vorgeschlagene Bezeichnung angewandt wird. So werden wir finden (vergl. die zweite Anmerkung zu Seite 154), dass jeder Vector α mit Nutzen dem rechten Quotienten gleichgesetzt werden kann, dessen Index er ist (133); und dass ferner der Einheitsvector $U\alpha$, in demselben Sinne, dem rechten Radial (147) gleichgesetzt werden kann, der (in dem zuletzt definirten Sinne) der Versor dieses rechten Quotienten ist. Wir werden uns auch veranlasst sehen, jeden Einheitsvector als die Achse einer Drehung um einen Quadranten, oder einer rechtwinkligen Drehung in einer Ebne senkrecht zu ihm, anzusehen; das wird für uns ein weiterer Antrieb sein, von jedem solchen Vector als von einem Versor zu sprechen. Ueberhaupt scheint mir, dass kein Uebelstand, vielmehr ein vielversprechender Vortheil darin liegt, schon jetzt das Zeichen $U\alpha$ als „Versor von α" zu lesen; ebenso wie wir das analoge Zeichen Uq als „Versor von q" lesen können.

* Vergleiche die unmittelbar vorhergehende Anmerkung.

ändert, nämlich dadurch, dass wir jede auf die angenommene Längeneinheit (155, 156) reduciren, ohne ihre Richtung irgendwie zu ändern. Daher bleiben die Ebne (119), die Achse (127, 128) und der Winkel (130) des Quaternions bei diesem Uebergange ungeändert; so dass wir die beiden folgenden allgemeinen Formeln aufstellen können:

$$\angle\, Uq = \angle\, q; \qquad \text{Ax. } Uq = \text{Ax. } q.$$

Allgemeiner können wir schreiben:

$$\angle\, q' = q, \text{ und } \text{Ax. } q' = \text{Ax. } q, \text{ wenn } Uq' = Uq;$$

der Versor eines Quaternions hängt nur von der relativen Richtung (156) der beiden Linien ab, für die der Quaternion selbst der Quotient (112) ihrer Vectoren ist, und er ist auch umgekehrt genügend, sie zu bestimmen; oder er hängt nur von der Achse und dem Winkel der Drehung vom Divisor zum Dividenden (128), in der Ebne der beiden Linien, ab; so dass irgend zwei Quaternionen, die gleiche Versoren haben, auch gleiche Winkel und gleiche (oder zusammenfallende) Achsen haben müssen, wie es durch die zuletzt hingeschriebene Formel ausgedrückt wird. Umgekehrt folgt aus der alleinigen Abhängigkeit des Versors Uq von der relativen Richtung*, dass irgend zwei Quaternionen, deren Winkel und Achsen gleich sind, auch gleiche Versoren haben; oder in Zeichen, dass

$$Uq' = Uq, \text{ wenn } \angle\, q' = q, \text{ und } \text{Ax. } q' = \text{Ax. } q.$$

So sahen wir, zum Beispiel in 138, dass der Conjugirte

* Der Einheitsvector $U\alpha$, für den wir kürzlich (156) den Namen Versor des Vectors α vorgeschlagen haben, hängt ebenso nur von der Richtung dieses Vectors ab; diese ausschliessliche Beziehung, in beiden Fällen, zur Richtung kann als ein weiterer Grund gelten, ein und denselben Namen, Versor, wie wir es zuletzt gethan haben, und ein und dasselbe charakteristische Zeichen, U, anzuwenden, um zur Beschreibung oder Bezeichnung von beiden zu dienen, nämlich des Einheitsvectors $U\alpha$ selbst, und des Quotienten zweier solcher Einheitsvectoren, $Uq = U\beta : U\alpha$; jede Gefahr eines Missverständnisses ist hier wieder (vergl. die Anmerkung zu Art. 156) genügend durch die Verschiedenheit der beiden Zeichen, α und q, beseitigt, die zur Bezeichnung des Vectors und des Quaternions angewandt werden, welche bezüglich die Gegenstände der beiden Operationen sind; während beide Operationen in dem wesentlichen Punkte übereinstimmen, dazu zu dienen, das quantitative Element der absoluten oder relativen Länge zu beseitigen.

und der Reciproke eines Quaternions gleiche Winkel und gleiche Achsen haben; es folgt daher, dass der Versor des Conjugirten stets dem Versor des Reciproken gleich ist; so dass wir die folgende allgemeine Formel* aufstellen können,

$$UKq = U\frac{1}{q}.$$

158. Ferner folgt, da

$$U\left(1 : \frac{\beta}{\alpha}\right) = U\frac{\alpha}{\beta} = \frac{U\alpha}{U\beta} = 1 : \frac{U\beta}{U\alpha} = 1 : U\frac{\beta}{\alpha},$$

dass der Versor des Reciproken eines Quaternions zugleich der Reciproke des Versors ist; so dass wir schreiben können,

$$U\frac{1}{q} = \frac{1}{Uq}; \text{ oder } Uq \,.\, U\frac{1}{q} = 1.$$

Daher haben wir auch, nach einem früheren Resultate (157), allgemein,

$$UKq = \frac{1}{Uq}; \text{ oder, } Uq \,.\, UKq = 1.$$

Es ist auch, da der Versor Uq stets ein radialer Quotient (151, 152) ist, der Conjugirte (nach 150) sein eigener Reciproker; und daher zugleich (vergl. 145) der Reciproke sein eigener Conjugirter; so dass das Produkt zweier conjugirten Versoren, oder, wie wir es früher genannt haben [145, (11.)], ihre gemeinsame Norm stets der positiven Einheit gleich ist; oder in Zeichen (vergl. 150),

$$NUq = Uq \,.\, KUq = 1.$$

Aus demselben Grunde ist der Conjugirte des Versors eines Quaternions gleich dem Reciproken des Versors, oder (nach dem, was wir eben gesehn haben) gleich dem Versor des Reciproken des Quaternions; und daher (nach 157) auch gleich dem Versor des Conjugirten, so dass wir allgemein, als Zusammenfassung der bisherigen Resultate, die Formel hinschreiben können,

$$KUq = \frac{1}{Uq} = U\frac{1}{q} = UKq;$$

jedes dieser vier Symbole bezeichnet einen neuen Versor, der dieselbe Ebne und denselben Winkel hat, wie der frühere oder

* Vergleiche die Anmerkung zu Art. 138.

Digitized by Google

gegebene Versor Uq, der aber eine entgegengesetzte Achse oder eine entgegengesetzte Drehungsrichtung hat: so dass er, in Beziehung auf den gegebenen Versor, naturgemäss ein Reversor genannt werden kann.

159. Was den Versor selbst betrifft, mag er nun der eines Vectors oder der eines Quaternions sein, so ergiebt die Definition (155) von $U\alpha$:

$Ux\alpha = +U\alpha$, oder $= -U\alpha$, je nachdem $x >$ oder < 0;

denn (nach 15) erhält der Skalarcoëfficent x im ersten Falle die Richtung des Vectors α, kehrt sie aber im zweiten Falle um; daher haben wir auch, nach der Definition (156) von Uq, allgemein (vergl. 126, 143),

$Uxq = +Uq$, oder $= -Uq$, je nachdem $x >$ oder < 0.

Der Versor eines Skalars, den man als den Grenzwerth eines Quaternions (131, 139) ansehn kann, ist gleich der positiven oder negativen Einheit (vergl. 147, 153), je nachdem der Skalar selbst positiv oder negativ ist; oder in Zeichen,

$Ux = +1$, oder $= -1$, je nachdem $x >$ oder < 0;

die Ebne und die Achse eines jeden dieser beiden Einheitsskalare (147), wenn man sie als Versoren (153) auffasst, ist — wie wir schon gesehn haben — unbestimmt. Der Versor eines null Quaternions (141) muss als ein ganz beliebiger angesehen werden, so lange wir nicht gerade ein Gesetz* kennen, nach dem der Quaternion gegen Null convergirt, ehe er diesen Grenzwerth wirklich erreicht; in dem letzteren Falle können die Ebne, die Achse und der Winkel des Versors** $U0$ völlig bestimmt werden, als Grenzwerthe, die nach jenem Gesetz abzuleiten sind. Der Versor eines rechten Quotienten (132), oder eines rechtwinkligen Quaternions (141), ist stets ein rechter Radial (147), oder ein rechter Versor (153); und er ist daher, als solcher, eine der Quadratwurzeln der negativen Einheit (149), oder einer der Werthe des Symbols $\sqrt{-1}$; die Achse und der Index eines solchen Versors fallen (nach 150) zusammen; und ebenso sind sein Reciproker, sein Conjugirter, und sein Entgegengesetzter alle einander gleich.

---

* Vergleiche die Anmerkung zu Art. 131.

** Wenn die Null in dem Symbol, $U0$, als Zeichen für einen Null-

Digitized by Google

160. Es ist einleuchtend, dass, wenn ein vorgeschlagener Quaternion q schon ein Versor (151) ist, in dem Sinne, dass er ein Radial (146) ist, die Operation, seinen Versor zu nehmen (156); keine Aenderung hervorbringt; und ebenso, dass, wenn ein gegebener Vector α schon ein Einheitsvector ist, er derselbe Vector bleibt, wenn er durch seine eigene Länge dividirt wird (155), das heisst, in diesem Falle durch die Zahl Eins. Zum Beispiel, wir haben angenommen (128, 129), dass die Achse jedes Quaternions ein Einheitsvector ist; wir können daher allgemein, in der Bezeichnung von 155, die Gleichung,

$$U\,(\mathrm{Ax.}\ q) = \mathrm{Ax.}\ q$$

hinschreiben. Eine zweite Operation U lässt also das Ergebniss der ersten Operation U ungeändert, mag der Gegenstand solcher aufeinanderfolgenden Operationen eine Linie, oder ein Quaternion sein; wir haben daher die beiden folgenden allgemeinen Formeln, die nur im Zeichen für den Gegenstand der Operationen verschieden sind:

$$U\,U\alpha = U\alpha; \qquad U\,Uq = Uq;$$

wir können daher, wenn wir vom Gegenstande der Operation absehen (vergl. 145), kurz und symbolisch schreiben:

$$U^2 = U\,U = U.$$

161. Mit Hülfe von 145, 158, 159 können wir daher leicht (ausser anderen) die folgenden Transformationen des Versors eines Quaternions ableiten:

$$Uq = \frac{1}{U\frac{1}{q}} = \frac{1}{KUq} = \frac{1}{UKq} = KU\frac{1}{q} = K\frac{1}{Uq} = KUKq$$

$$= U\frac{1}{Kq} = UK\frac{1}{q} = U^2q = UKU\frac{1}{q} = UK\frac{1}{Uq} = (UK)^2q;$$

$$Uq = Ux\,q, \text{ wenn } x > 0; \quad = -Ux\,q, \text{ wenn } x < 0.$$

Wir können auch allgemein schreiben,

$$\frac{q}{Kq} = \frac{Uq}{KUq} = (Uq)^2 = U(q^2) = Uq^2;$$

die Parenthesen sind hier unnöthig, denn — wie ich bald aus-

vector (2) angesehen wird, so bezeichnet das Symbol selbst im Allgemeinen, nach den vorhergehenden Sätzen, einen unbestimmten Einheitsvector; aber die Richtung dieses Einheitsvectors kann in gewissen Untersuchungen als Grenze, die nach einem bestimmten Gesetz resultirt, bestimmt werden.

führlicher zeigen werde — bezeichnet das Symbol Uq^2 ein und denselben Versor, mögen wir es nun deuten als Bezeichnung für das Quadrat des Versors, oder als den Versor des Quadrats, von q. Wir werden in unserer Rechenart eine Fülle allgemeiner Umformungen der Art finden; die alle, oder fast alle, wie die vorhergehenden, schliesslich von sehr einfachen geometrischen Begriffen abhängen; die aber trotz, oder besser vielleicht wegen der ausserordentlichen Einfachheit ihres Ursprungs oft von Nutzen als Elemente einer neuen Art symbolischer Sprache in der Geometrie sind: und allgemein, als Ausdrucksmittel, in all den mathematischen oder physikalischen Untersuchungen, auf die der Quaternionencalcül angewendet werden kann. Es ist indessen durchaus nicht nothwendig, dass der Leser sich schon jetzt mit allen den eben angegebenen Transformationen von Uq vertraut mache; doch ist es gut, wenn er sich von ihrer Richtigkeit überzeugt und hierin mögen ihn die folgenden Bemerkungen vielleicht unterstützen.

(1.) Um eine geometrische Erläuterung zu geben, die als ein Beweis der vorigen Gleichung,

$$q : Kq = (Uq)^2,$$

gelten mag, können wir Fig. 36, bis., benutzen; in ihr haben wir, nach, 145, (2.),

$$q \cdot \frac{1}{Kq} = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OA}{OB'} = \frac{OB}{OB'} = \left(\frac{OB}{OD}\right)^2 = \left(U\frac{OB}{OA}\right)^2 = \left(Uq\right)^2.$$

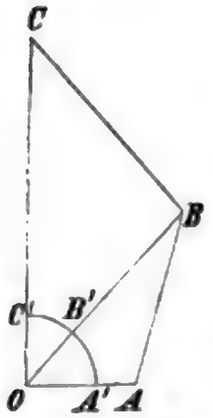
(2.) Was die Gleichung, $U(q^2) = (Uq)^2$, betrifft, so brauchen wir nur daran zu denken, dass die drei Linien OA, OB, OC, der Fig. 42, in drei neuen Punkten A', B', C', (wie in Fig. 42, bis.) durch einen Einheitskreis (oder durch einen Kreis, dessen Radius gleich der Längeneinheit ist), der um ihren gemeinschaftlichen Anfangspunkt O als Mittelpunkt und in ihrer Ebne beschrieben ist, geschnitten werden; denn wenn dann die drei Linien α, β, γ, genannt werden, so sind die drei neuen Linien OA', OB', OC' (nach 155) drei Einheitsvectoren und durch die Symbole, $U\alpha$, $U\beta$, $U\gamma$ zu bezeichnen; und wir haben die Transformationen (verg. 1148, 149),

$$U(q^2) = U.\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = U\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{U\gamma}{U\alpha} = \frac{OC'}{OA'} = \left(\frac{OB'}{OA'}\right)^2 = (Uq)^2.$$

Digitized by Google

(3.) Was andere, vorher angegebene Transformationen (161) betrifft, so erhalten wir, wenn wir einer augenblicklichen Zweckmässigkeit wegen, und als eine nur augenblicklich benutzte Bezeichnungsweise, schreiben

Fig. 42, bis.



$$Rq = \frac{1}{q},$$

obwohl wir gesehn haben (135), dass es nicht nothwendig ist, irgend ein neues oder besonderes Symbol zu erfinden, um den Reciproken eines Quaternions darzustellen, wenn wir aber doch, für einen Augenblick, den Buchstaben R in dieser Weise anwenden, als ein charakteristisches Zeichen der Reciprocität, oder der Operation den Reciproken zu bilden, die symbolischen Gleichungen (vergl. 145, 158):

$$R^2 = K^2 = 1; \quad RK = KR;$$
$$RU = UR = KU = UK;$$

aber wir haben auch (nach 160), $U^2 = U$; daraus folgt leicht, dass:

$$U = RUR = RKU = RUK = KUR = KRU$$
$$= KUK = URK = UKR = UKUR = UKRU$$
$$= (UK)^2 = \text{u. s. w..}$$

(4.) Die Gleichung

$$U\frac{\varrho}{\alpha} = U\frac{\beta}{\alpha}, \text{ oder einfach, } U\varrho = U\beta,$$

drückt aus, dass der Ort des Punktes P die unendliche gerade Linie, oder der Strahl [vergl. 132, (4.)], ist, der von O aus in der Richtung OB, aber nicht in der entgegengesetzten Richtung gezogen ist; denn sie ist gleichbedeutend mit:

$$U\frac{\varrho}{\beta} = 1; \text{ oder } \angle\frac{\varrho}{\beta} = 0; \text{ oder } \varrho = x\beta,\ x > 0.$$

(5.) Andererseits drückt die Gleichung,

$$U\frac{\varrho}{\alpha} = -U\frac{\beta}{\alpha}, \text{ oder } U\varrho = -U\beta,$$

aus [vergl. 132, (5.)], dass der Ort von P der entgegengesetzte Strahl von O aus ist; oder, dass er die unbegrenzte Verlängerung des Revectors BO ist; denn sie kann transformirt werden in:

$$U\frac{\varrho}{\beta} = -1; \text{ oder } \angle\frac{\varrho}{\beta} = \pi; \text{ oder } \varrho = x\beta,\ x < 0.$$

Digitized by Google

(6.) Wenn α, β, γ (wie in Nebenart. 2) die drei Linien OA, OB, OC der Figur 42 (oder der Fig. 42, bis) bezeichnen, so dass wir (nach 149) die Gleichung $\frac{\gamma}{\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$ haben, dann drückt die Gleichung,

$$\left(U\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = U\frac{\gamma}{\alpha},$$

allgemein aus, dass der Ort von P das System der beiden letzteren Orte ist; oder dass er die ganze unendliche, nach beiden Seiten verlängerte, gerade Linie durch O und B ist. [Vergl. 144, (2.)].

(7.) Aber wenn die Linie γ oder OC zufällig, wie OA' in Fig. 41 (oder in Fig. 41, bis), die entgegengesetzte Richtung wie α oder OA hat, so dass die letzte Gleichung die besondere Form,

$$\left(U\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = -1,$$

annimmt, dann muss $U\frac{\varrho}{\alpha}$ (nach 154) ein rechter Versor sein; und umgekehrt, jeder rechte Versor, dessen Ebne α enthält, ist ein Werth, der (nach 153) der Gleichung genügt. In diesem Falle ist daher der Ort des Punktes P [wie in 132, (1.), oder in 144, (1.)] die Ebne durch O, senkrecht zur Linie OA; und die vorige Gleichung selbst, wenn man annimmt, dass sie durch einen reellen* Vector ϱ befriedigt wird, kann unter einer der beiden früher angegebenen, aber äquivalenten Formen:

$$\angle\frac{\varrho}{\alpha} = \frac{\pi}{2}, \quad \varrho \perp \alpha$$

geschrieben werden.

Neunter Abschnitt.

Ueber Bogenvectoren und Winkelvectoren, als Darstellungen der Versoren von Quaternionen; und über die Multiplication und Division eines Versors durch einen anderen.

162. Da jeder Einheitsvector OA (129), der vom Anfangspunkte O aus gezogen wird, in einem Punkte A auf der Fläche

* Vergleiche 149, (2.); auch die zweite Anmerkung zu demselben Artikel, und die Anmerkungen zu Art. 98.

Digitized by Google

endigt, die wir die Einheitskugel (128) genannt haben, so kann sein Endpunkt A (1) als ein ihn darstellender Punkt betrachtet werden, dessen Lage auf der Oberfläche die Richtung der Linie OA im Raume bestimmt, und von dem man sagen kann, dass er sie darstellt; er bestimmt auch die Richtung der Linie, wenn sie mit irgend einem positiven Skalar multiplicirt (12, 17) wird. Und dann kann man sagen, der Quaternion, welcher der Quotient (112) irgend zweier solcher Einheitsvectoren ist, und der unter einem Gesichtspunkte ein Radial (146) ist, und unter einem anderen ein Versor (151), hat den Bogen eines grössten Kreises AB, auf der Einheitskugel, der die Endpunkte der beiden Vectoren verbindet, zu dem ihn darstellenden Bogen. Wir können diesen Bogen auch einen Vectorbogen nennen, da er eine bestimmte Richtung (vergl. Art. 1) hat, so wie sie z. B. durch einen gekrümmten Pfeil in Fig. 39 angedeutet ist; und da er so mit seinem eigenen Entgegengesetzten im Gegensatze steht, seinem Entgegengesetzten, den wir nach Analogie den Revectorbogen BA (vergl. wieder 1) nennen können.

Dieser letztere Bogen stellt, in unserem Sinne, zugleich den Reciproken (134), und den Conjugirten (137), des vorigen Versors dar; denn er stellt den entsprechenden Reversor (158) dar.

163. Diese Art der Darstellung von Versoren von Quaternionen durch Vectorbogen würde gewiss sehr unvollkommen sein, wenn nicht Gleiches durch Gleiches dargestellt würde. Wir wollen daher die Definition aufstellen, wie es anderweitig natürlich ist, dass ein Vectorbogen AB auf der Einheitskugel jedem anderen Vectorbogen CD gleich ist, der von ihm abgeleitet werden kann, dadurch, dass man ihn auf seinem eigenen grössten Kreise gleiten* lässt (oder sich vorstellt, dass er

* Einige Hülfe für die Anschauung kann man hier aus dem Anblick der Fig. 34 gewinnen, in der zwei gleiche Winkel auf der Oberfläche ein und desselben Pultes aufgezeichnet sind. Oder die vier Linien OA, OB, OC, OD, von Fig. 35, kann man sich jetzt als gleich lang denken; oder annehmen, dass sie durch einen Kreis mit dem Mittelpunkt O geschnitten werden, wie in der Abänderung der Figur, die ein wenig später in Art. 163 gegeben ist.

gleitet), ohne irgend welche Aenderung seiner Länge oder Umkehrung seiner Richtung.

In der That sind die beiden gleichschenkligen und ebnen Dreiecke AOB, COD, die den Anfangspunkt O zu ihrer gemeinsamen Spitze haben und auf den Sehnen der beiden Bogen als Basen ruhn, complanar, gleich und ähnlich gelegen; so dass wir (nach 117, 118) hier schreiben können:

$$\Delta\, AOB \propto COD, \quad \frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC};$$

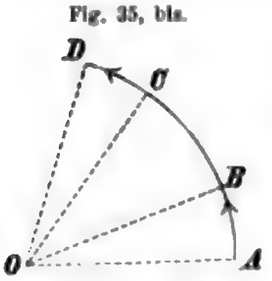
die Bedingung für die Gleichheit der Quotienten, (das heisst hier der Versoren) die durch die beiden Bogen dargestellt werden, ist also erfüllt. Wir werden bisweilen diese Art von Gleichheit zweier Vectorbogen, AB und CD, durch die Formel:

$$\frown AB = \frown CD,$$

bezeichnen; und dann ist es klar, (vergl. 125, und den früheren Art. 3), dass wir auch haben werden durch eine Inversion und Umwechslung, wie wir es nennen können, die beiden anderen Formeln von Bogengleichheit:

$$\frown BA = \frown DC; \quad \frown AC = \frown BD.$$

Fig. 35, bis.



(Vergleiche die nebenstehende Figur 35, bis.)

164. Umgekehrt müssen ungleiche Versoren in unserem Sinne durch ungleiche Vectorbogen dargestellt werden; und wir werden deshalb irgend zwei solche Bogen, für unsern Zweck, als ungleich ansehn (vergl. 2), auch wenn sie der Grösse nach übereinstimmen, oder wenn sie dieselbe Anzahl Grade enthalten, vorausgesetzt, dass sie sich in ihrer Richtung unterscheiden; und das kann auf einem der beiden folgenden Hauptwege der Fall sein. Erstens, sie können entgegengesetzte Bogen auf einem grössten Kreise sein, wie zum Beispiel ein Vectorbogen AB und der entsprechende Revectorbogen BA; und so können sie bezüglich einen Versor $OB:OA$, und den entsprechenden Reservor $OA:OB$ darstellen (162). Oder zweitens, die beiden Bogen können zu verschiedenen grössten Kreisen gehören, wie AB und BC in Fig. 43; in diesem letzteren Falle stellen sie zwei radiale Quotienten (146) in verschiedenen Ebnen dar; oder (vergl. 119) zwei diplanare Versoren, $OB:OA$, und $OC:OB$;

Digitized by Google

aber ich habe allgemein (122) gezeigt, dass diplanare Quaternionen stets ungleich sind; ich sehe daher hier wieder die Bogen, AB und BC, selbst als ungleiche Vectoren, wie ich es genannt habe, an.

Fig. 43.

165. Auf diese Weise werden wir denn dazu geführt (vergl. 122), den Begriff einer Ebne, oder der Lage eines grössten Kreises auf der Einheitskugel als einen, im Allgemeinen*, wesentlichen Bestandtheil des Begriffes eines Vectorbogens, als der Darstellung eines Versors (162), anzusehn. Aber auch wenn wir uns nicht ausdrücklich auf Versoren beziehen, können wir sehn, dass, wenn wir, in Fig. 43, annehmen, dass B der Mittelpunkt eines Bogens AA' eines grössten Kreises ist, so dass wir, mit Benutzung einer früheren Bezeichnungsweise (163), die Bogengleichung

$$\frown AB = \frown BA',$$

aufstellen können, wir nicht auch schreiben könnten (vergl. 105):

$$\frown AB = \frown BC;$$

denn die beiden coinitialen Bogen, BA' und BC, die in verschiedenen Punkten endigen, müssen (vergl. 2) als Vectorbogen ungleich sein. Wenn wir andererseits nicht zulassen wollten, (wie in 163), dass zwei complanare Bogen, wenn sie gleich lang und gleich (nicht entgegengesetzt) gerichtet sind, wie AB und CD in der vorigen Fig. 35, bis, gleiche Vectoren sind, würden wir nicht mit Nutzen von Gleichheit, die zwischen Bogenvectoren unter irgend welchen Umständen besteht, sprechen können. So werden wir denn dazu geführt, allgemein den Begriff einer Ebne, oder eines grössten Kreises als verschieden von einem andern, als ein Element in den Begriff eines Vectorbogens einzuführen. Und wir müssen uns daher im Allgemeinen vor-

* Ich sage, im Allgemeinen; denn wir werden bald sehn, dass in einem Sinne alle grössten Halbkreise, als Vectorbogen betrachtet, einander gleich genannt werden können.

stellen, dass eine Gleichung zwischen zwei solchen Bogen zwei Beziehungen von Coarcualität einschliesst. Zum Beispiel, die Gleichung $\frown AB = \frown CD$, des Art. 163, schliesst allgemein, als einen Theil ihrer Bedeutung, die Behauptung (vergl. 123) ein, dass die vier Punkte A, B, C, D zu ein und demselben grössten Kreise der Einheitskugel gehören; oder dass jeder der beiden Punkte, C und D, coarcual mit den beiden anderen Punkten, A und B, ist.

166. Es giebt indessen einen bemerkenswerthen Ausnahmefall, in dem zwei Vectorbogen gleich genannt werden können, obwohl sie in verschiedenen Ebnen liegen; nämlich, wenn sie beide grösste Halbkreise sind. In der That stellt, in unserem Sinne, jeder grösste Halbkreis, AA', wenn man ihn als einen Vectorbogen ansieht, einen Inversor (153) dar; oder er stellt die negative Einheit dar ($OA' : OA = -\alpha : \alpha = -1$), als den einen Grenzwerth eines Versors; aber wir haben gesehn (159), dass ein solcher Versor im Allgemeinen keine bestimmte Ebne hat. Während daher der erste und letzte Punkt, oder (vergl. 1) der Anfangspunkt A und der Endpunkt B, eines Vectorbogens AB im Allgemeinen genügen, die Ebne des Bogens zu bestimmen, welcher der kürzeste oder direkteste Weg (vergl. 112, 128) auf der Kugel von einem zum andern Punkte ist; so wird, in dem besonderen Falle, wenn einer der beiden gegebenen Punkte dem andern diametral entgegengesetzt ist, wie A' und A, die Richtung der Bahn unbestimmt. Wenn wir daher nur auf die erzeugte Wirkung, in Bezug auf die Lagenänderung eines Punktes, sehn, wie sie durch eine Vection (oder Bewegung) auf der Kugel hervorgebracht wird, so können wir sagen, dass alle grössten Halbkreise gleiche Vectorbogen sind; jeder dient einfach dazu, unter dem Gesichtspunkte, unter dem wir ihn betrachten, einen Punkt aus einer Lage in die entgegengesetzte zu bringen; und dadurch, (wie durch den Factor -1, den er hier darstellt) die Richtung des Radius, der zu dem Punkte auf der Einheitskugel gezogen ist, umzukehren.

(1.) Die Gleichung,

$$\frown AA' = \frown BB',$$

in der hier angenommen ist, dass A' zu A, und B' zu B ent-

Digitized by Google

gegengesetzt ist, genügt augenscheinlich den allgemeinen Bedingungen der Coarcualität (165); denn die vier Punkte $A, B, A' B'$ liegen alle auf einem grössten Kreise. Es ist klar, dass dieselbe Bogengleichung (wie in 163) auch invertirt und alternirt werden kann; so dass,

$$\frown A'A = \frown B'B, \text{ und } \frown AB = \frown A'B'.$$

(2.) Wir können auch sagen (vergl. 2), dass alle null Bogen gleich sind, da sie keinen Einfluss auf die Lage eines Punktes auf der Kugel ausüben; und wir können daher allgemein schreiben,

$$\frown AA = \frown BB = 0,$$

und die alternirte Gleichung, oder Identität, $\frown AB = \frown AB$.

(3.) Jeder solcher null Vectorbogen AA ist, in unserem Sinne, eine Darstellung des anderen Einheitsskalars, nämlich der positiven Einheit, die als ein zweiter Grenzwerth eines Versors (153) angesehn werden kann; und seine Ebne ist gleichfalls unbestimmt (159), wenigstens wenn nicht irgend ein Gesetz gegeben ist, nach dem man sich vorstellen kann, dass die Bewegung auf dem Bogen von einem gegebenen Punkte A aus beginnt und zu einem dem Punkte A unendlich nahen Punkte B auf der Kugel geht.

167. Der hauptsächlichste Gebrauch von Vectorbogen besteht in unserer Theorie darin, dass sie als Hülfsmittel dienen, die Multiplication und Division irgend zweier diplanaren Versoren (vergl. 119, 164) vermittelst eines sphärischen Dreiecks darzustellen und gewissermassen zu construiren. In der That können irgend zwei solche Versoren von Quaternionen (156), als radiale Quotienten (152) betrachtet, leicht durch das allgemeine Verfahren des Art. 120 auf die Formen,

$$q = \beta : \alpha = OB : OA, \qquad q' = \gamma : \beta = OC : OB,$$

gebracht werden, wo A, B, C Ecken eines solchen Dreiecks auf der Einheitskugel sind; und dann giebt (nach 107) der erste Quotient multiplicirt mit dem zweiten als Produkt:

$$q' . q = \gamma : \alpha = OC : OA.$$

Wenn wir daher, (im Sinne des Art. 1), irgend zwei aufeinanderfolgende Bogen, wie AB und BC in Fig. 43, in Bezug zu einander Vector und Provector nennen, und den dritten Bogen AC, der vom Anfangspunkt des ersten zum Endpunkt des zweiten

Digitized by Google

geht, (in demselben Sinne), Transvector nennen: so können wir jetzt sagen, dass bei der Multiplication irgend eines Versors (eines Quaternions) mit irgend einem andern das Product $q' . q$, oder $q'q$, durch den entsprechenden Transvectorbogen AC dargestellt wird, wenn zugleich der Multiplicand* q durch einen Vectorbogen AB, und wenn der Multiplicator q' ebenso durch einen Provectorbogen BC dargestellt werden; und diese Art der Darstellung ist nach dem, was wir bereits gezeigt haben, stets möglich.

168. Eine der bemerkenswerthesten Folgen dieser Construction der Multiplication von Versoren ist die folgende: dass der Werth des Productes zweier diplanaren Versoren (164) von der Reihenfolge der Factoren abhängt; oder dass $q'q$ und qq' ungleich sind, wenn nicht q' complanar (119) mit q ist. Denn es seien AA' und CC' irgend zwei Bogen von grössten Kreisen, in verschiedenen Ebnen, die einander im Punkte B halbiren, wie Fig. 43 zeigen kann; so dass wir die beiden Bogengleichungen (163) haben,

$$\frown AB = \frown BA', \text{ und } \frown BC = \frown C'B;$$

dann wird der eine oder der andere der beiden folgenden Fälle stattfinden. Entweder, 1), sind die beiden, einander halbirenden Bogen beide Halbkreise; in diesem Falle sind die beiden neuen Bogen, AC und $C'A'$, in der That beide Theile eines grössten Kreises, nämlich desjenigen, dessen Pol B ist, aber sie haben in ihm entgegengesetzte Richtungen; denn, in diesem Falle, liegen A' und C' dem A und C diametral gegenüber und daher wird [nach 166, (1.)] der Gleichung

$$\frown AC = \frown A'C'$$

genügt, aber nicht der Gleichung

$$\frown AC = \frown C'A'.$$

Oder, 2), die Bogen AA' und CC', von denen wir annehmen, dass sie sich in B gegenseitig halbiren, sind nicht beide Halbkreise, wenn auch zufällig der eine von ihnen ein solcher ist; in diesem Falle gehören die Bogen AC, $C'A'$ zu zwei verschiedenen grössten Kreisen, sie sind diplanar und daher, als Vectoren betrachtet, ungleich. (Vergleiche den ersten und zweiten Fall

* Wir schreiben hier, wie in 107, und anderwärts, das Zeichen des Multiplicators zur linken Hand und das des Multiplicandus zur rechten.

Digitized by Google

des Art. 164.) In beiden Fällen sind daher AC und $C'A'$ ungleiche Vectorbogen; aber der erste stellt, wie wir gesehn haben (167), das Product $q'q$ dar; und der zweite stellt ebenso das andere Product qq' derselben beiden Versoren in umgekehrter Reihenfolge dar; denn er ist der neue Transvectorbogen, wenn $C'B$ $(= BC)$ als der neue Vectorbogen angesehn wird, und BA' $(= AB)$ als der neue Provectorbogen, wie es in Fig. 43 durch die gekrümmten Pfeile angedeutet ist. Die beiden Producte, $q'q$ und qq', sind daher, wie vorher behauptet wurde, selbst ungleich, wenn sie, wie angenommen worden ist, diplanar sind.

169. Andrerseits ist leicht, auf mehrfachen verschiedenen Wegen zu zeigen, dass, wenn die beiden Factoren, q und q', complanare Versoren sind, ihre Producte, $q'q$ und qq', gleich sind wie in der Algebra. So können wir uns vorstellen, dass der Bogen CC', in Fig. 43, um seinen Mittelpunkt B gedreht wird, bis der sphärische Winkel CBA' verschwindet; und dann werden die beiden neuen Transvectorbogen, AC und $C'A'$, augenscheinlich nicht nur complanar, sondern gleich, in dem Sinne des Art. 163, da sie auch jetzt noch gleich lang und dazu gleich gerichtet sind. Oder, in Fig. 35, bis, des zuletzt angeführten Artikels, können wir uns einen Punkt E denken, der den Bogen BC halbirt, und daher auch den Bogen AD, der mit ihm commedial (vergl. Art. 2, und die zweite Figur 3 dieses Artikels) ist; und dann können wir, wenn wir den einen Versor q durch einen der beiden gleichen Bogen, AE, ED darstellen, zugleich den andern Versor q' durch einen der beiden andern gleichen Bogen EC, BE darstellen; sodass das eine Product, $q'q$, durch den Bogen CA dargestellt wird, und das andere Product, qq', durch den gleichen Bogen BD. Oder wir können, ohne Beziehung auf Vectorbogen, annehmen, dass die beiden Factoren sind,

$$q = \beta : \alpha = OB : OA, \qquad q' = \gamma : \alpha = OC : OA;$$

OA, OB, OC seien irgend drei complanare und gleich lange grade Linien (siehe wieder Fig. 35, bis); denn dann haben wir nur eine vierte Linie, δ oder OD, von derselben Länge und in derselben Ebne zu bestimmen, die der Gleichung $\delta : \gamma = \beta : \alpha$ (117) genügt, und daher auch (nach 125) der alter-

nirten Gleichung, $\delta : \beta = \gamma : \alpha$; und dann folgt* (nach 107) unmittelbar, dass,

$$q' \cdot q = \frac{\delta}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} = q \cdot q'.$$

Wir können daher, für irgend zwei Versoren von Quaternionen, q und q', auf die beiden folgenden reciproken Beziehungen schliessen:

I. . . $q'q = qq'$, wenn $q' \| \| q$ (123);
II. . . wenn $q'q = qq'$, dann ist $q' \| \| q$ (168);

Vertauschbarkeit der Factoren, was ihre Stellen im Producte betrifft, ist daher zugleich eine Folge und ein Beweis der Complanarität.

170. In dem ersten Falle des Art. 168 sind die Factoren q und q' beide rechte Versoren (153); und da wir gesehn haben, dass dann ihre beiden Producte, $q'q$ und qq', Versoren sind, die durch gleich lange, aber entgegengesetzt gerichtete Bogen eines grössten Kreises dargestellt werden, wie in dem ersten Falle von 164, so folgt (vergl. 162), dass die beiden Producte zugleich reciprok (134) und conjugirt (137) zu einander sind; oder dass sie zu einander in der Beziehung von Versor und Reversor (158) stehn. Wir können daher, allgemein, schreiben,

$$\text{I.}\ldots qq' = Kq'q, \quad \text{und} \quad \text{II.}\ldots qq' = \frac{1}{q'q},$$

wenn q und q' irgend zwei rechte Versoren sind; denn die Multiplication irgend zweier solcher Versoren, in zwei entgegengesetzten Reihenfolgen, kann stets durch eine Figur, wie ich sie zuletzt mit 43 bezeichnet habe, dargestellt oder construirt werden, in der die einander halbirenden Bogen AA' und CC' Halbkreise sind. Die zweite Formel kann auch so geschrieben werden (vergl. 135, 154):

III. . . wenn $q^2 = -1$, und $q'^2 = -1$, dann ist $q'q \cdot qq' = +1$;

und unter dieser Form stimmt sie augenscheinlich mit der

* Man übersieht, dass ich in dem letzten Schlussverfahren keinen Gebrauch von der vorausgesetzten Längengleichheit der vier verglichenen Linien gemacht habe; so dass wir genau auf demselben Wege beweisen könnten, dass $q'q = qq'$, wenn $q' \| \| q$ (123), ohne anzunehmen, dass die beiden complanaren Factoren oder Quaternionen, q und q', Versoren sind.

Digitized by Google

gewöhnlichen Algebra überein, denn sie drückt aus, dass unter den angenommenen Bedingungen,

$$q'q \cdot qq' = q'^2 \cdot q^2;$$

aber wir werden finden, dass diese letztere Gleichung in der allgemeinen Theorie der Quaternionen keine Identität ist.

171. Wenn die beiden einander halbirenden Halbkreise sich gegenseitig unter rechten Winkeln schneiden, so werden die conjugirten Producte durch zwei Quadranten eines grössten Kreises dargestellt, die in entgegengesetztem Sinne zu durchlaufen sind. Es folgt daraus, dass wenn zwei rechte Versoren, die in zwei zu einander rechtwinkligen Ebnen liegen, mit einander in der einen und anderen Reihenfolge multiplicirt werden, die beiden sich ergebenden Producte zwei entgegengesetzte rechte Versoren in einer dritten Ebne sein werden, die rechtwinklig zu den beiden vorigen ist; oder in Zeichen, dass,

$$\text{wenn } q^2 = -1,\ q'^2 = -1, \text{ und Ax. } q' \perp \text{Ax. } q,$$

dann,

$$(q'q)^2 = (qq')^2 = -1, \quad q'q = -qq';$$

und,

$$\text{Ax. } q'q \perp \text{Ax. } q, \quad \text{Ax. } q'q \perp \text{Ax. } q'.$$

In diesem Falle haben wir daher, was in der Algebra widersinnig sein würde, nämlich die Gleichung,

$$(q'q)^2 = -q'^2 \cdot q^2,$$

wenn q und q' irgend zwei rechte Versoren in zwei rechtwinkligen Ebnen sind; aber wir sehen, dass dies Resultat nicht widersinniger, dem äusseren Anscheine nach, ist, als die Gleichung

$$q'q = -qq',$$

die unter denselben Bedingungen statt hat. Und wenn wir dazu übergehen, das, was nach den letzten Auseinandersetzungen die Bedeutung der letzten Gleichung genannt werden kann, aufzusuchen, so finden wir, dass sie einfach folgende ist: irgend zwei Drehungen um einen Quadranten oder rechte Drehungen, in zu einander rechtwinkligen Ebnen, setzen sich zu einer dritten rechten Drehung in einer Ebne senkrecht zu jeder von ihnen, als ihrer Resultante, zusammen; und diese dritte oder

resultirende Drehung findet in dem einen oder entgegengesetzten Sinne statt, je nach der Reihenfolge, in der die beiden componirenden Drehungen erfolgen, so dass also stets die eine nach der andern stattfindet.

172. Ich beabsichtige, im nächsten Abschnitt auf die Betrachtung eines solchen Systems rechter Versoren zurückzukommen, wie dasjenige ist, welches ich hier kurz berührt habe; aber ich möchte schon jetzt bemerken (vergl. 167), dass ein sphärisches Dreieck ABC, vermittelst der darstellenden Bogen (162), nicht nur dazu dienen kann, die Multiplication, sondern auch die Division irgend eines von zwei diplanaren Versoren (oder radialer Quotienten) durch einen andern, darzustellen. In der That brauchen wir uns nur vorzustellen (vergl. Fig. 43), dass der Vectorbogen AB einen gegebenen Divisor, sagen wir q, oder $\beta:\alpha$, darstellt, und der Transvectorbogen AC (167) einen gegebenen Dividenden, sagen wir q'', oder $\gamma:\alpha$; denn dann stellt der Provectorbogen BC (vergl. wieder 167), in demselben Sinne, den Quotienten dieser beiden Versoren dar, nämlich $q'':q$, oder $\gamma:\beta$ (106), oder den zuletzt q' genannten Versor; daher haben wir allgemein, nach 106, 107, 120, für Quaternionen, wie in der Algebra, die beiden Identitäten:

$$(q'':q).q = q'', \qquad q'q:q = q'.$$

173. Es muss indessen beachtet werden, dass wir, aus schon angegebenen Gründen, für diplanare Versoren nicht eine solche Gleichung wie $q.(q'':q) = q''$ anwenden dürfen; denn wir haben (168) gefunden, dass für solche Versoren die gewöhnliche algebraische Identität, $qq' = q'q$, aufhört richtig zu sein. In der That können wir, nach 169, jetzt die beiden umgekehrten Formeln aufstellen:

I. . . $q\,(q'':q) = q''$, wenn $q'' \,|||\, q$ (123);
II. . . wenn $q\,(q'':q) = q''$, dann ist $q'' \,|||\, q$.

Demgemäss wird in Fig. 43, wenn q, q', q'' wieder durch die Bogen AB, BC, AC dargestellt werden, das Product $q\,(q'':q)$, oder qq', nicht durch AC dargestellt, sondern durch den andern Bogen $C'A'$ (168), von dem wir gesehn haben, dass er als Vectorbogen dem vorigen ungleich ist; obwohl die beiden letzteren Bogen, AC und $C'A'$, stets gleich lang sind und

Digitized by Google

daher gleiche Winkel im Mittelpunkte O der Einheitskugel umfassen; so dass wir allgemein für irgend zwei Versoren (oder auch für irgend zwei Quaternionen)*, q und q'', die Formel haben:

$$\angle\, q\,(q'' : q) = \angle\, q''.$$

174. Eine andere Art der Darstellung von Versoren, oder besser zwei neue Arten, obwohl aufs innigste mit einander verbunden, mögen hier kurz bemerkt werden.

1) Wir können den Winkel AOB, im Mittelpunkt O der Einheitskugel, wenn wir uns vorstellen, dass er nicht nur eine bestimmte Grösse, sondern auch eine bestimmte Ebne (110) und eine gegebene Richtung in ihr hat, wie sie durch einen der gekrümmten Pfeile in Fig. 39, oder durch den Pfeil in Fig. 33 angedeutet wird, nach Analogie einen Vector-Winkel nennen; und können sagen, dass er den Versor $OB : OA$ darstellt, oder dass er sein darstellender Winkel ist, wo OA, OB Radien der Einheitskugel sind.

2) Oder wir können den geradlinigen Winkel AOB im Mittelpunkt durch den gleichen sphärischen Winkel $AC'B$ im, wie wir sagen können, positiven Pol des darstellenden Bogens AB ersetzen; so dass $C'A$ und $C'B$ Quadranten sind; und die Drehung im Pole C', vom ersten der beiden Quadranten zum zweiten, wenn sie von einem Punkte ausserhalb der Kugel angesehn wird, die Richtung hat, welche wir zur positiven gewählt (111, 127) haben, wie sie in der nebenstehenden Figur 44 angedeutet ist: und dann können wir diesen sphärischen Winkel als einen neuen Winkelrepräsentanten desselben Versors q, oder von $OB : OA$, ansehn, wie vorher.

Fig. 44.

175. Denken wir uns jetzt, dass wir nach der Benutzung eines ersten sphärischen Dreiecks ABC, zur Construction (wie in 167) der Multiplication irgend eines gegebenen Versors q, mit irgend

* Wir werden bald sehn, dass verschiedene Formeln dieses Abschnittes, in Betreff der Multiplication und Division von Versoren, als radiale Quotienten (151) betrachtet, wenig oder keiner Aenderung bedürfen, wenn man zu den entsprechenden Operationen an Quaternionen, als allgemeinen Quotienten von Vectoren (112), übergeht.

einem anderen gegebenen Versor q', ein zweites oder polares Dreieck bilden, dessen Ecken A', B', C' respective, in dem eben angegebenen Sinne, die positiven Pole der drei aufeinanderfolgenden Seiten BC, CA, AB des vorigen Dreiecks sind; und dass wir dann zu einem dritten Dreieck $A'B''C'$, einem Theile derselben Halbkugel $B'B''$, wie das zweite, übergehn, indem wie für B'' den dem B' diametral gegenüberliegenden Punkt nehmen; so dass B'' der negative Pol des Bogens CA, oder der positive Pol des, wie wir ihn kürzlich (167) genannt haben, Transvectorbogens AC ist; es sei auch C'', ebenso, der dem Punkte C' auf der Einheitskugel gegenüberliegende Punkt. Dann können wir nicht nur schreiben (vergl. 129),

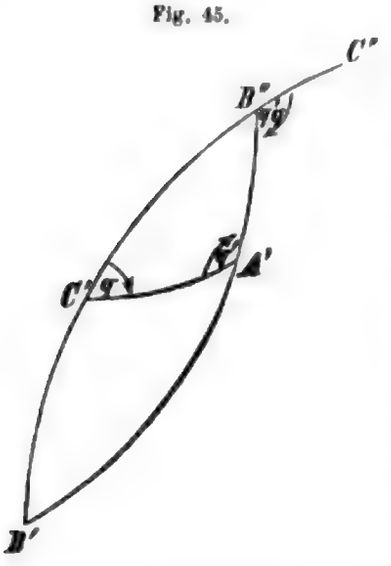
$$\text{Ax. } q = OC', \quad \text{Ax. } q' = OA', \quad \text{Ax. } q'q = OB'',$$

sondern wir haben auch die Gleichungen:

$$\angle\, q = B''C'A', \quad \angle\, q' = C'A'B'', \quad \angle\, q'q = C''B''A';$$

die drei sphärischen Winkel, nämlich die beiden Basiswinkel bei C' und A', und der Aussenwinkel an der Spitze bei B'' des neuen oder dritten Dreiecks $A'B''C'$ stellen daher, im Sinne des Art. 174, II., bezüglich den Multiplicand, q, den Multiplicator, q' und das Product $q'q$, dar. (Vergleiche die nebenstehende Figur 45.)

Fig. 45.



176. Ohne ausdrückliche Beziehung auf das vorige Dreieck ABC können wir die letzte Construction der Multiplication von Versoren (175) mit der allgemeinen Formel (107) in folgender Weise verbinden.

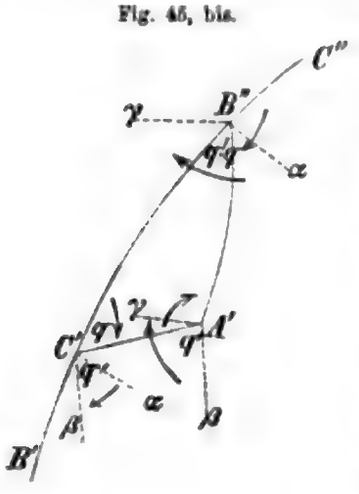
Es seien α und β jetzt zwei Einheitstangenten* zur Kugel in C', bezüglich senkrecht zu den beiden Bogen $C'B''$ und $C'A'$,

* Unter einer Einheitstangente meine ich hier einfach eine Einheitslinie (oder einen Einheitsvector, 129), der tangential zur Einheitskugel gezogen ist und seinen Ausgang, oder seinen Anfangspunkt (1), auf der Oberfläche der Kugel hat, und nicht, wie ich gewöhnlich angenommen habe, in deren Mittelpunkt.

Digitized by Google

und nach derselben Seite von den Bogen aus gezogen, nach denen bezüglich die Punkte A' und B' liegen; und es seien zwei andere Einheitstangenten, ihnen gleich und mit denselben Buchstaben bezeichnet, (wie in der nebenstehenden Figur 45, bis) in den Puncten B'' und A' gezogen, so dass sie zu denselben Bogen $C'B''$ und $C'A'$ senkrecht sind und nach denselben Seiten von ihnen ausgehn, wie vorher. Wir wollen auch zwei andere Einheitstangenten von den beiden letzten Punkten B'' und A' aus ziehn, die einander gleich sind und beide mit γ bezeichnet werden mögen, beide senkrecht zum Bogen $A'B''$ und nach derselben Seite von ihm, wie C'. Dann sind (vergl. 174, II.) die beiden Quotienten $\beta:\alpha$ und $\gamma:\beta$ gleich den beiden Versoren q und q', die vorhin (in Fig. 45) durch die beiden Basiswinkel des sphärischen Dreiecks $A'B''C'$ bei C' und A' dargestellt wurden; das Product, $q'q$, der beiden Versoren ist daher (nach 107) gleich dem dritten Quotienten, $\gamma:\alpha$; und folglich wird es, wie vorher, durch den Aussenwinkel an der Spitze desselben Dreiecks $C'B''A'$ dargestellt; er ist augenscheinlich dem Winkel des dritten Quotienten an Grösse gleich, und hat dieselbe Achse OB'' und dieselbe Drehungsrichtung, wie die Pfeile in Fig. 45, bis zeigen können.

Fig. 45, bis.



177. In jeder der beiden letzten Figuren ist der innere Winkel an der Spitze bei B'' somit gleich dem Supplementwinkel, $\pi - \angle\, q'q$, des Winkels des Products; und es ist von Wichtigkeit zu beachten, dass die entsprechende Drehung um die Spitze B'', von der Seite $B''A'$ zur Seite $B''C'$, oder (wie wir es kurz ausdrücken können) vom Punkte A' zum Punkte C', positiv ist; ein Resultat, das, wie leicht zu sehn, ein allgemeines ist, nach der Betrachtung des vorhergehenden Artikels.*

* Wenn wir annehmen, dass jemand auf der Kugel im Punkte B'' steht und nach dem Bogen $A'C'$ hinsieht, so würde ihm die Bewegung rechtläufig erscheinen, eine Bewegungsrichtung, die wir hier als positiv (127) angenommen haben.

Wir können daraus allgemein schliessen, dass, wenn die Multiplication irgend zweier Versoren durch ein sphärisches Dreieck construirt wird, dessen beide Basiswinkel, wie in den letzten beiden Artikeln, die Factoren darstellen, und dessen Aussenwinkel an der Spitze das Product darstellt, dass dann die Drehung um die Achse (OB'') des Productes $q'q$, von der Achse (OA') des Multiplicators q' zur Achse (OC') des Multiplicandus q, positiv ist; daraus folgt, dass die Drehung um die Achse Ax. q' des Multiplicators, von der Ache Ax. q des Multiplicandus zur Achse Ax. $q'q$ des Products, auch positiv ist. Oder, um dasselbe vollständiger auszudrücken, da die bis jetzt betrachteten Drehungen nur ebene gewesen sind (wie in 128, u. s. w.), so können wir sagen, dass wenn die beiden letzteren Achsen auf eine Ebne projicirt werden, die senkrecht zur ersten ist, und alle drei wieder denselben Anfangspunkt O haben, dann die Drehung um Ax. q', von der Projection von Ax. q zur Projection von Ax. qq', nach unseren Annahmen rechtsläufig ist.

178. Wir haben also damit eine neue Methode, die Ungleichheit der beiden Producte, $q'q$ und qq', zweier diplanaren Versoren (168) auf geometrischem Wege zu zeigen, wenn die Versoren als Factoren in verschiedener Reihenfolge genommen werden. Zu diesem Zwecke sei

$$\text{Ax. } q = OP, \quad \text{Ax. } q' = OQ, \quad \text{Ax. } q'q = OR;$$

und man verlängere den Bogen PR eines grössten Kreises auf der Einheitskugel bis zu einem Punkte S. Dann erhalten wir, nach früher aufgestellten Sätzen, für das sphärische Dreieck PQR (vergl. 175) die folgenden Werthe für die beiden inneren Basiswinkel bei P und Q, und für den Aussenwinkel an der Spitze bei R:

$$RPQ = \angle q; \quad PQR = \angle q'; \quad SRQ = \angle q'q;$$

und die Drehung um Q, von der Seite QP zur Seite QR, ist rechtsläufig. Ziehen wir von der Spitze R zur Basis PQ einen Bogen RT, senkrecht zu ihr und verlängern dieses Bogenloth bis R', so dass wir haben:

$$\frown RT = \frown TR';$$

und verlängern wir auch PR' bis zu einem Punkte S'. Wir erhalten dann ein neues Dreieck PQR', das eine Art Spiegelbild (vergl. 138) des ersteren in Bezug auf ihre gemeinsame

Digitized by Google

Basis PQ ist; und dieses neue Dreieck dient dazu, das neue Product, qq', zu construiren. Denn die Drehung um P von PQ zu PR' ist rechtsläufig, wie sie es sein sollte; und wir haben die Gleichungen:

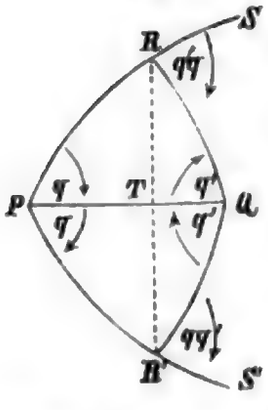
$$QPR' = \angle q; \quad R'QP = \angle q'; \quad S'QR'S' = \angle qq';$$
$$OR' = \text{Ax.}\, qq';$$

so dass der neue sphärische Aussenwinkel, $QR'S'$, den neuen Versor, qq', darstellt, wie der vorige Winkel SRQ den früheren Versor, $q'q$, darstellt, der aus ihm durch eine verschiedene Anordnung der Factoren erhalten werden kann. Und obwohl, ohne Zweifel, die beiden Winkel bei R und R' stets der Grösse nach gleich sind, so dass wir die allgemeine Formel,

$$\angle q'q = \angle qq',$$

aufstellen (vergl. 173) können, so sind sie doch als Vectorwinkel (174), und daher als Repräsentanten von Versoren, als ungleich anzusehn; denn sie haben verschiedene Ebnen, nämlich die Tangentialebnen an die Kugel in den beiden Spitzen R und R'; oder die beiden ihnen bezüglich parallelen Ebnen, die durch den Mittelpunkt O gelegt sind.

Fig. 46.



179. Division von Versoren (vergl. 172) kann durch darstellende Winkel (174) eben so wohl construirt werden, wie durch darstellende Bogen (162). Um also q'' durch q zu dividiren, oder besser, eine solche Division geometrisch darzustellen, in einem dem zuletzt für die Multiplication angewendeten ganz ähnlichen Sinne, haben wir nur die beiden Punkte P und R, in Fig. 46, zu bestimmen, durch die beiden Bedingungen,

$$OP = \text{Ax.}\, q, \qquad OR = \text{Ax.}\, q'',$$

und dann einen dritten Punkt Q durch die beiden Winkelgleichungen,

$$RPQ = \angle q, \qquad QRP = \pi - \angle q'',$$

zu finden; hierbei ist die Drehung um P von PR zu PQ positiv, so dass wir haben:

$$\text{Ax.}\,(q'' : q) = OQ; \qquad \angle\,(q'' : q) = PQR.$$

(1.) Anstatt uns vorzustellen, dass die punktirte Linie RTR', in Fig. 46, welche die Spitzen der beiden Dreiecke mit der gemeinsamen Basis (178) PQ verbindet, ein Bogen eines grössten Kreises ist, der durch die Basis senkrecht geschnitten und halbirt wird, können wir annehmen, dass er ein Bogen eines kleinen Kreises ist, der mit dem Punkte P als positivem Pole (vergl. 174, II.) beschrieben ist. Und wir können dann sagen, dass der Uebergang (vergl. 173) vom Versor q'', oder $q'q$, zu dem ungleichen Versor $q\ (q'' : q)$, oder qq', geometrisch durch eine konische Drehung der Achse Ax. q'', um die Achse Ax. q, um einen Winkel $= 2 \angle q$ bewerkstelligt wird, ohne irgend welche Aenderung der Grösse des Winkels $\angle q''$; so dass wir, wie vorher, die allgemeine Formel (vergl. wieder 173) haben:

$$\angle q(q'' : q) = \angle q''.$$

(2.) Oder, wenn wir vorziehn, die Construction der Multiplication und Division durch darstellende Bogen anzuwenden, wie sie Fig. 43 zu erläutern bestimmt war, und uns vorstellen, dass ein neuer Punkt C'' in dieser Figur durch die Bedingung $\frown A'C'' = \frown C'A'$ bestimmt wird, so können wir sagen, dass bei dem Uebergange vom Versor q'', der durch AC dargestellt wird, zum Versor $q\ (q'' : q)$, der durch $C'A'$ oder durch $A'C''$ dargestellt wird, der darstellende Bogen von q'' sich ohne Aenderung seiner Länge so bewegt, dass er eine konstante Neigung* zum darstellenden Bogen AB von q bewahrt, während sein Anfangspunkt das Doppelte des Bogens AB beim Uebergang von A zu A' beschreibt.

(3.) Aus diesen wenigen Beispielen kann man ersehn, dass wenn, selbst unabhängig von neuen charakteristischen Operationszeichen, wie K und U, neue Combinationen früherer Symbole, wie $q\ (q'' : q)$, in unserer Rechenart auftreten, die in der Algebra nicht gebraucht werden, sie meistentheils geometrische Deutungen zulassen, die leicht verständlich und interessant sind; und sie stellen in der That Begriffe dar, von denen man nicht gut absehn kann, und es ist nützlich, dass man im Stande ist, sie

* Ebenso wie bei der Bewegung des Aequators auf der Ekliptik durch die Präcession von Sonne und Mond, in der Astronomie.

Digitized by Google

mit so vieler Einfachheit und Unzweideutigkeit zu bezeichnen. (Vergleiche die Bemerkungen in Art. 161; und die Nebenartikel zu 132, 145.)

180. In Verbindung mit der in den beiden Figuren 45 angedeuteten Construction mag hier bemerkt werden, dass, wenn ABC irgend ein sphärisches Dreieck ist, und wenn A', B', C' (wie in 175) die positiven Pole seiner drei aufeinanderfolgenden Seiten, BC, CA, AB, sind, dann die Drehung (vergl. 177, 179) um A' von B' nach C', oder die um B' von C' nach A', u. s. w., positiv ist. Der leichteste Weg, die Richtigkeit dieser Behauptung einzusehn, ist es vielleicht, wenn man sich vorstellt, wir machten die Drehung um A von B nach C positiv, wenn sie es nicht schon ist, indem wir zu dem diametral gegenüberliegenden Dreieck auf der Kugel übergehn, wobei die Pole A', B', C' nicht geändert werden. Nehmen wir nun an, dass diese Pole die den entsprechenden Ecken des gegebenen Dreiecks nahen sind, so kommen wir ohne Schwierigkeit zu dem oben aufgestellten Satz; wir haben ihn eigentlich schon bei unserer Construction der Multiplication (und Division) von Versoren durch darstellende Winkel (175, 176) angewandt; und er lässt sich auch anderweitig rechtfertigen, wie vorher, durch die Betrachtung der Einheitstangenten der Fig. 45, bis.

(1.) Es seien α, β, γ irgend drei gegebene Einheitsvectoren, so dass die Drehung um den ersten, vom zweiten zum dritten, im Sinne des Art. 177 positiv ist; und es seien α', β', γ' drei andere Einheitsvectoren, die von jenen durch die Gleichungen,

$$\alpha' = \text{Ax.}\,(\gamma:\beta), \quad \beta' = \text{Ax.}\,(\alpha:\gamma), \quad \gamma' = \text{Ax.}\,(\beta:\alpha),$$

abgeleitet sind; dann ist die Drehung um α', von β' nach γ', auch positiv; und wir erhalten die umgekehrten Formeln,

$$\alpha = \text{Ax.}\,(\gamma':\beta'), \quad \beta = \text{Ax.}\,(\alpha':\gamma'), \quad \gamma = \text{Ax.}\,(\beta':\alpha').$$

(2.) Wenn die Drehung um α von β nach γ als negativ gegeben wäre, und α', β', γ', wieder von diesen drei Vectoren durch dieselben drei Gleichungen, wie vorher, abgeleitet würden, so müssten die Vorzeichen von α, β, γ in den drei letzten (oder reciproken) Formeln geändert werden; aber die Drehung um α', von β' nach γ', würde wieder positiv sein.

Digitized by Google

(3.) Bevor wir diesen Abschnitt schliessen, mag kurz bemerkt werden, dass es bisweilen der Analogie wegen (vergl. Art. 5) angemessen ist, von Transvectorbogen (167) zu sprechen, die, wie wir gesehn haben, ein Product zweier Versoren darstellen, als der Bogen-Summe der beiden aufeinanderfolgenden Vectorbogen, die in demselben Sinne die Factoren darstellen; man sagt dann ebenfalls: der Provector wird zum Vector addirt; aber die Aufeinanderfolge einer solchen Addition von diplanaren Bogen ist jetzt nicht gleichgültig (168), wie es die entsprechende Reihenfolge nach Früherem (7) sein würde, wenn die zu addirenden Vectoren grade Linien gewesen wären.

(4.) Wir können auch gelegentlich, durch eine weitere Ausführung derselben Analogie, von dem Aussenwinkel an der Spitze eines sphärischen Dreiecks, als von der sphärischen Summe der beiden Basiswinkel des Dreiecks, sprechen, wenn man die Summirung in der richtigen Reihenfolge vornimmt (vergl. Fig. 46); man sagt dann, der Winkel, der den Multiplicator darstellt (174), wird (als eine Art von Winkel-Provector) zu dem zweiten Vector-Winkel addirt, der den Multiplicandus darstellt; während das, was wir hier die Summe dieser beiden Winkel genannt haben (und was, in Bezug auf sie, eine Art Transvector-Winkel ist), wie bewiesen worden ist, das Product darstellt.

(5.) Der Begriff einer angularen Transvection wird vielleicht ein wenig klarer, wenn wir (im Sinne von 174, I.) den Mittelpunkt O zum gemeinsamen Scheitel der drei Winkel AOB, BOC, AOC annehmen, die im Allgemeinen in drei verschiedenen Ebnen liegen. Denn wir können uns dann vorstellen, dass ein drehbarer Radius entweder, durch zwei aufeinanderfolgende Winkel-Bewegungen, von OA nach OB, und dann nach OC gebracht wird; oder unmittelbar, durch eine solche Bewegung, aus der ersten in die dritte Lage gebracht wird.

(6.) Endlich, was die durch Fig. 45, bis angedeutete Construction betrifft, in der Tangenten statt der Radien angewandt wurden, so mag hier ausdrücklich bemerkt werden, dass $A'\,B''\,C'$ in dieser Figur irgend ein gegebenes sphärisches Dreieck vorstellen kann, in dem die Drehung um B'' von A' nach

Digitized by Google

C' positiv ist (177); und dass dann, wenn die beiden Factoren, q und q', als die beiden Versoren definirt werden, deren Repräsentanten die inneren Winkel bei C' und A' (im Sinne von 174, II.) sind, die Betrachtungen des Art. 176 beweisen, ohne nothwendigerweise, auch nur in Gedanken, auf irgend ein anderes Dreieck (wie ABC) Bezug zu nehmen, dass der Aussenwinkel bei B'' (in demselben Sinne) der Repräsentant des Products, $q'q$, ist, wie vorher.

Zehnter Abschnitt.

Ueber ein System von drei rechten Versoren, in drei zu einander rechtwinkligen Ebnen; und über die Gesetze der Symbole, i, j, k.

181. Nehmen wir an, dass OI, OJ, OK irgend drei gegebene, coinitiale, und zu einander rechtwinklige Einheitslinien seien; die Drehung um die erste von der zweiten zur dritten sei positiv. Es seien OI', OJ', OK' drei Einheitsvectoren, die zu ihnen bezüglich entgegengesetzt sind, so dass

$$OI' = -OI, \quad OJ' = -OJ, \quad OK' = -OK.$$

Es. mögen die drei neuen Symbole i, j, k ein System (vergl. 172) dreier rechten Versoren bezeichnen, in drei zu einander rechtwinkligen Ebnen, deren Achsen bezüglich die drei gegebenen Linien sind, so dass:

$$\text{Ax. } i = OI, \quad \text{Ax. } j = OJ, \quad \text{Ax. } k = OK,$$

und

$$i = OK : OJ, \quad j = OI : OK, \quad k = OJ : OI,$$

wie Fig. 47 erläutern mag. Wir erhalten dann die weiteren Ausdrücke für dieselben drei Versoren:

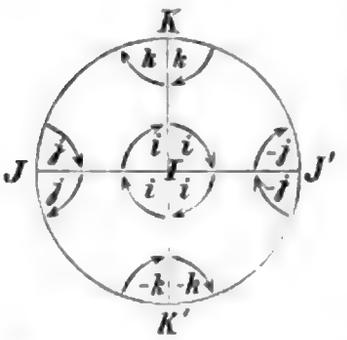
$$i = OJ' : OK = OK' : OJ' = OJ : OK';$$
$$j = OK' : OI = OI' : OK' = OK : OI';$$
$$k = OI' : OJ = OJ' : OI' = OI : OJ';$$

und die drei bezüglich entgegengesetzten Versoren können in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$-i = OJ : OK = OK' : OJ = OJ' : OK' = OK : OJ';$$
$$-j = OK : OI = OI' : OK = OK' : OI' = OI : OK';$$
$$-k = OI : OJ = OJ' : OI = OI' : OJ' = OJ : OI'.$$

Aus der Vergleichung dieser verschiedenen Ausdrücke ergeben sich mehrere wichtige Folgerungen für die Zeichen, die bemerkenswerth genug sind, um hier besonders ausgesprochen zu werden, obwohl einige von ihnen eigentlich schon in den Resultaten früherer Abschnitte enthalten sind.

Fig. 47.



182. Erstens erhalten wir, da

$$i^2 = (OJ' : OK).(OK : OJ) = OJ' : OJ, \text{ u. s. w.},$$

(vergl. 148), die folgenden gleichen Werthe für die Quadrate der neuen Zeichen:

$$\text{I} \ldots i^2 = -1; \quad j^2 = -1; \quad k^2 = -1;$$

wir hätten dies sogleich aus dem Umstande folgern können (154), dass die drei radialen Quotienten (146), die hier mit i, j, k bezeichnet wurden, alle rechte Versoren (181) sind.

Zweitens, da

$$ij = (OJ : OK').(OK' : OI) = OJ : OI, \text{ u. s. w.},$$

erhalten wir die folgenden Werthe für die Producte derselben drei Zeichen, oder Versoren, wenn wir sie zu je zweien und in einer bestimmten Anordnung der Aufeinanderfolge (vergl. 168, 171) nehmen:

$$\text{II} \ldots ij = k; \quad jk = i; \quad ki = j.$$

Und drittens haben wir (vergl. wieder 171), da

$$j.i = (OI : OK).(OK : OJ) = OI : OJ, \text{ u. s. w.},$$

die weiteren und entgegengesetzten Formeln, für die Producte derselben drei rechten Versoren zu je zweien, wenn sie als Factoren in der entgegengesetzten Reihenfolge genommen werden:

$$\text{III} \ldots ji = -k; \quad kj = -i; \quad ik = -j.$$

Während daher das Quadrat jedes der drei rechten Versoren, welche durch die drei neuen Symbole, i, j, k, bezeichnet werden, gleich (154) der negativen Einheit ist, ist das Product je zweier von ihnen entweder dem dritten selbst gleich, oder dem Entgegengesetzten (171) des dritten Versors, je nachdem

Digitized by Google

der Multiplicator dem Multiplicandus in der cyklischen Aufeinanderfolge,

$$i,\ j,\ k,\ i,\ j,\ \ldots$$

vorhergeht oder folgt; die nebenstehende Figur 47, bis, mag zur Hülfe für das Gedächtniss dienen.

(1.) Um diese Multiplicationen von i, j, k mit der Theorie der darstellenden Bogen (162), und der darstellenden Winkel (174), in Verbindung zu setzen, können wir irgend einen der vier Quadranten, JK, KJ', $J'K'$, $K'J$, in Figur 47, oder irgend einen der vier sphärischen rechten Winkel, JIK, KIJ', $J'IK'$, $K'IJ$, welche diese Bogen in ihrem gemeinsamen Pole I umspannen, als Repräsentanten des Versors i ansehn; und Gleiches gilt für j und k, wenn man den Punkt I' einführt, der dem Punkte I gegenüberliegt, und den wir uns auf der Rückseite der Figur denken müssen.

Fig. 47, bis.

(2.) Das Quaddriren von i, oder die Gleichung $i^2 = -1$, kann somit geometrisch construirt werden durch die Verdoppelung (vergl. Art. 148, 154, und Fig. 41, 42) eines Bogens, oder eines Winkels. So können wir uns vorstellen, dass, wenn der Quadrant KJ' zu dem gleichen Bogen JK addirt wird, die Summe der grösste Halbkreis JJ' ist, der (nach 166) einen Inversor (153) darstellt, oder die negative Einheit, wenn man sie als einen Factor betrachtet. Oder wir können den rechten Winkel KIJ' zu dem gleichen Winkel JIK addiren, und so eine Drehung um zwei rechte Winkel um den Pol I, oder um den Mittelpunkt O, erhalten; diese Drehung ist (vergl. (154, 174) gleichbedeutend mit einer Umkehrung der Richtung, oder mit einem Uebergange vom Radius OJ zu dem entgegengesetzten Radius OJ'.

(3.) Die Multiplication von j durch i, oder die Gleichung $ij = k$, kann ebenso durch Bogen construirt werden; denn wenn man $K'J$, als einen Provectorbogen (167), zu IK', als einem Vectorbogen (162), addirt, erhält man IJ, und das ist der Repräsentant von k, dem Transvectorbogen, oder der Bogensumme [180, (3.)]. Oder dieselbe Multiplication kann durch Winkel construirt werden mit Hülfe des sphärischen Dreiecks

IJK, in dem die Basiswinkel bei I und J bezüglich den Multiplicator, i, und den Multiplicandus, j, darstellen und die Drehung um I von J nach K positiv ist; während ihre sphärische Summe [180, (4.)], oder der Aussenwinkel an der Spitze bei K (vergl. 175, 176) dasselbe Product, k, darstellt, wie vorher.

(4.) Die umgekehrte Multiplication von i durch j, oder diejenige von j in* i, kann ebenso construirt oder geometrisch dargestellt werden, entweder durch die Addition des Bogens KI, als eines neuen Provectors, zum Bogen JK als einem neuen Vector, und dieses neue Verfahren ergiebt JI (anstatt IJ) als neuen Transvector; oder mit Hülfe des neuen Dreiecks IJK' (vergl. die Fig. 46, 47), in dem die Drehung um I von J zur neuen Spitze K' negativ ist, so dass der Winkel bei I jetzt den Multiplicandus darstellt, und der resultirende Winkel an dem neuen Pole K' das neue und entgegengesetzte Product, $ji = -k$.

183. Da wir also haben $ji = -ij$ (wie wir hatten $q'q = -qq'$ in 171), so sieht man, dass die Gesetze für die Combination der neuen Symbole i, j, k, nicht in jeder Hinsicht dieselben sind, wie die entsprechenden Gesetze in der Algebra; denn die commutative Eigenschaft der Multiplication, oder die Vertauschbarkeit (169) der Stellen der Factoren ohne Aenderung des Werthes des Productes, findet hier nicht statt, und das kommt (168) daher, dass die zu combinirenden Factoren hier diplanare Versoren (181) sind. Es ist indessen wichtig zu beachten, dass es eine Beziehung giebt, in der die Gesetze von i, j, k mit üblichen, algebraischen Gesetzen übereinstimmen: nämlich in der associativen Eigenschaft der Multiplication; oder in der Eigenschaft, dass die neuen Symbole stets der associativen Formel (vergl. 9),

$$\iota . \varkappa\lambda = \iota\varkappa . \lambda,$$

unterworfen sind, welches von ihnen auch immer für ι, für $\varkappa$, und für λ eingesetzt werden mag; in Folge dieser Gleichheit

* Man sagt, ein Multiplicandus wird durch den Multiplicator multiplicirt; und andererseits, ein Multiplicator wird in den Multiplicandus multiplicirt. Dieser Unterschied ist, wie wir gesehn haben, zwischen den beiden Factoren für Quaternionen nothwendig, obschon er es nicht für die Algebra ist.

Digitized by Google

der Werthe können wir den Punkt in irgend einem solchen Zeichen für ein ternäres Product fortlassen (mögen die Factoren gleich oder ungleich sein), und es einfach schreiben $\iota \varkappa \lambda$. Im Besonderen haben wir also,

$$i.jk = i.i = i^2 = -1; \qquad ij.k = k.k = k^2 = -1;$$

oder kurz,

$$ijk = -1.$$

Wir können daher, nach 182, die folgende wichtige Formel aufstellen,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1; \qquad (A)$$

auf die wir uns gelegentlich, als auf „die Formel A", beziehen werden, und die, wie wir sehn werden, eigentlich alle Gesetze der Symbole ijk enthält, und daher eine genügende symbolische Basis für den ganzen Quaternionencalcül* ist; denn ich werde zeigen, dass jeder Quaternion auf die viergliedrige Form,

$$q = w + ix + jy + kz,$$

gebracht werden kann, in der w, x, y, z ein System von vier Skalaren bilden, während i, j, k dieselben drei rechten Versoren sind, wie vorher.

(1.) Ein direkter Beweis der Gleichung, $ijk = -1$, kann aus den Definitionen der Symbole in Art. 181 abgeleitet werden. In der That brauchen wir nur daran zu erinnern, dass diese Definitionen ergaben, wie wir sahn,

$$i = OJ' : OK, \quad j = OK : OI', \quad k = OI' : OJ;$$

---

* Die Formel (A) nahm ich daher bei der ersten Mittheilung über diesen Gegenstand an die königlich Irische Akademie im Jahre 1843 zur Grundlage des ganzen Systems; und die Buchstaben, i, j, k, waren lange Zeit die einzigen, dem Quaternionencalcül eigenthümlichen Zeichen. Aber ich fand es allmählig nützlich, ausser ihnen einige wenige andere Bezeichnungen (wie K und U, u. s. w.) einzuführen, um Operationen an Quaternionen darzustellen. Ich hielt es auch für unterrichtender, die Grundsätze der Rechnung in einer mehr geometrischen Begründung (oder einer weniger ausschliesslich symbolischen) aufzustellen, als zuerst; und wie ich es später demgemäss in meinem Buche: „Vorlesungen über Quaternionen (Dublin, 1853)" gethan habe und es in diesem Buche wieder unternommen habe, obwohl mit mannigfachen Unterschieden in der Art der Darstellung und in den Anwendungen, die ich erweitert oder fortgelassen habe.

und brauchen nur zu beachten, dass wir, nach der allgemeinen Formel für die Multiplication (107), welche vier Linien auch immer mit α, β, γ, δ bezeichnet werden mögen, stets haben

$$\frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\beta}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\delta}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}\frac{\gamma}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha};$$

oder kurz, wie in der Algebra,

$$\frac{\delta}{\gamma}\frac{\gamma}{\beta}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha},$$

und der Punkt kann fortgelassen werden, da kein Missverständniss zu befürchten ist; so dass,

$$ijk = OJ' : OJ = -1, \text{ wie vorher.}$$

Ebenso haben wir die beiden weiteren ternären Producte:

$$jki = (OK' : OI)\ (OI : OJ') : (OJ' : OK)$$
$$= OK' : OK = -1;$$
$$kij = (OI' : OJ)\ (OJ : OK')\ (OK' : OI) = OI' : OI = -1.$$

(2.) Andrerseits ist,

$$kji = (OJ : OI)\ (OI : OK)\ (OK : OJ) = OJ : OJ = +1;$$

und ebenso,

$$ijk = +1, \text{ und } jik = +1.$$

(3.) Die Gleichungen in 182 ergeben auch die weiteren ternären Producte, in denen ebenfalls das Gesetz für die Association der Factoren gilt:

$$\begin{aligned} &i \,.\, ij = ik = -j = i^2 j = ii \,.\, j, && iij = -j; \\ &i \,.\, ji = i \,.\, -k = -ik = j = ki = ij \,.\, i, && iji = +j; \\ &i \,.\, jj = i \,.\, -1 = -i = kj = ij \,.\, j, && ijj = -i; \end{aligned}$$

und aus ihnen kann man weitere ableiten durch reine cyklische Vertauschung der Buchstaben, in dem Sinne, wie es Fig. 47, bis erläutert.

(4.) Im Allgemeinen gilt das associative Gesetz der Combination, wenn es für irgend drei Zeichen irgend einer gegebenen Art und für irgend eine Art der Combination gilt, wie für die Addition von Linien in Art. 9, oder für die Multiplication von ijk in diesem Artikel, auch für irgend vier (oder mehr) Zeichen derselben Art und Combinationen derselben Art.

Digitized by Google

Zum Beispiel, wenn jeder der vier Buchstaben $\iota, \varkappa, \lambda, \mu$, eines der drei Symbole, i, j, k bezeichnet (aber nicht nothwendig ein und dasselbe), so haben wir die Formel,

$$\iota.\varkappa\lambda\mu = \iota.\varkappa.\lambda\mu = \iota\varkappa.\lambda\mu = \iota\varkappa.\lambda.\mu = \iota\varkappa\lambda.\mu = \iota\varkappa\lambda\mu.$$

(5.) Daher kann irgend ein vielfaches (oder zusammengesetztes) Product der Symbole $i\,j\,k$, die in ihm in irgend einer Weise wiederholt, aber in einer gegebenen Reihenfolge genommen werden mögen, auf eine bestimmte Weise gedeutet werden, wie man auch die Factoren zusammenfassen, oder auf Theilfactoren zurückführen mag, ohne zu commutiren, oder ohne die Stellen der gegebenen Factoren zu ändern. Zum Beispiel, das Symbol $ijkkji$ kann auf jede der beiden folgenden Arten (ausser anderen) gedeutet werden:

$$ij.kk.ji = ij.-ji = i.-j^2.i = ii = -1;$$
$$ijk.kji = -1.1 = -1.$$

184. Die Formel (A) in 183 schliesst ersichtlich die drei Gleichungen (I.) in 182 in sich ein. Um zu zeigen, dass sie auch die sechs anderen Gleichungen, (II.), (III.), des zuletzt erwähnten Artikels einschliesst, können wir anführen, dass sie mit Hülfe des associativen Princips der Multiplication (an welches das Gedächtniss erinnert werden kann durch die Fortlassung des Punktes in dem Symbol ijk) ergiebt,

$$ij = -ij.kk = -ijk.k = +k;$$
$$ji = j.jk = j^2k = -k;$$
$$kj = ij.j = ij^2 = -i;$$
$$jk = -i.ijk = +i;$$
$$ik = i.ij = i^2j = -j;$$
$$ki = -k^2j = -ji^2 = +j.$$

Und dann ist es leicht zu zeigen, ohne irgend welchen Bezug auf die Geometrie, dass, wenn die vorhergehenden Gesetze der Symbole als richtig zugelassen werden, wir auch haben,

$$jki = kij = -1, \qquad kji = jik = ikj = +1;$$

wie wir es auf anderem und geometrischem Wege in früheren Nebenartikeln gezeigt haben. Ich kann hinzufügen, dass der blosse Anblick der Formel (A) genügend ist, um zu zeigen,

dass die drei * Quadratwurzeln der negativen Einheit, die in ihr mit i, j, k bezeichnet wurden, nicht allen üblichen Regeln der Algebra unterworfen sein können; denn die Formel ergiebt, nach dem Anblick,

$$i^2 j^2 k^2 = (-1)^3 = -1 = -(ijk)^2;$$

die Eigenschaft (183), nicht umkehrbar zu sein, für die Multiplication solcher Wurzeln unter einander, tritt so deutlich hervor.

Elfter Abschnitt.

Ueber den Tensor eines Vectors, oder eines Quaternions; und über das Product oder den Quotienten irgend zweier Quaternionen.

185. Nachdem wir uns in den letzten beiden Abschnitten hinreichend der Begriffe eines Vector-Bogens (162) und eines Vector-Winkels (174), (auf die ich schon früher, so in dem ersten Artikel dieses Buches, hingewiesen habe) bedient haben, zur Erläuterung** der Gesetze der Multiplication und Division von Versoren von Quaternionen, so beabsichtige ich jetzt wieder zu demjenigen Gebrauche des Wortes, Vector, zurückzukehren, auf den allein der erste Theil und die acht ersten Abschnitte dieses ersten Kapitels des zweiten Theiles Bezug nahmen; und ich werde daher hinfort wieder, ausschliesslich, unter dem Wort „Vector“ eine grade Linie von bestimmter Richtung verstehn (wie in 1).

* Es ist augenscheinlich, dass $-i, -j, -k$, nach denselben Annahmen auch Werthe des Symbols $\sqrt{-1}$ sind; denn sie sind auch rechte Versoren (153); oder weil $(-q)^2 = q^2$. Allgemeiner (vergl. eine Anmerkung auf Seite 169), wenn x, y, z irgend welche drei Skalare sind, die der Bedingung $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ genügen, so werde ich, auf einer späteren Stufe, beweisen, dass

$$(ix + jy + kz)^2 = -1.$$

** Einer der hauptsächlichsten Vorzüge solcher Vectoren, in Verbindung mit jenen Gesetzen, war der, die Eigenschaft (168) der Multiplication von Versoren nicht umkehrbar zu sein, zu erläutern, indem wir eine entsprechende Eigenschaft bei der Addition von Bogen und Winkeln auf einer Kugel zeigten, die wir nach Analogie mit dem früheren gleichartigen Verfahren an linearen Vectoren (5) benannt hatten. Vergleiche 180, (3.), (4.).

Digitized by Google

Und da ich schon durch Einführung und Bezeichnung (155) des Begriffs des Einheitsvectors, $U\alpha$, der dieselbe Richtung wie die Linie α hat, und den ich vorschlug (156), den Versor des Vectors α zu nennen, die Richtung einer solchen Linie in Betracht gezogen und ausgedrückt habe; so werde ich jetzt die Länge derselben Linie α in Betracht ziehn und ausdrücken, durch Einführung des neuen Namens Tensor, und durch das neue Symbol*, $T\alpha$; das letztere Zeichen wollen wir aussprechen: Tensor des Vectors α, und wollen es dahin definiren, dass es diejenige Zahl (vergl. wieder 155) ist, oder bezeichnet, welche die Länge der Linie α darstellt, wobei wir damit das Verhältniss ausdrücken, in dem es zu einem angenommenen Grundmass, als Einheit (128), steht.

186. Um die beiden Begriffe des Versors und des Tensors eines Vectors enger mit einander zu verbinden, können wir daran erinnern, dass, als wir (in 155) den Buchstaben a als ein augenblickliches Zeichen für die Zahl anwandten, welche die Länge der Linie α ausdrückt, wir die Gleichung hatten, $U\alpha = \alpha : a$, als eine Form für die Definition des Einheitsvectors, den wir mit $U\alpha$ bezeichnet hatten. Wir hätten daher auch die beiden anderen Formen der Gleichung (vergl. 15, 16),

$$\alpha = a \,.\, U\alpha, \qquad a = \alpha : U\alpha,$$

hinschreiben können, um die Abhängigkeit des Vectors, α, und des Skalars, a, von einander und vom, wie wir es genannt hatten (156), Versor, $U\alpha$, auszudrücken. Zum Beispiel, bei der Construction der Fig. 42, bis [vergl. 161, (2.)] können wir die drei Gleichungen hinschreiben,

$$a = OA : OA', \quad b = OB : OB', \quad c = OC : OC',$$

wenn a, b, c in ihnen drei positive Skalare sind, welche die Längen der drei Linien, OA, OB, OC, bezeichnen; und die drei Skalare können dann als Factoren, oder als Coëfficienten (12), angesehn werden, mit denen die drei Einheitsvectoren $U\alpha$, $U\beta$, $U\gamma$, oder OA', OB', OC' (in der erwähnten Figur) bezüglich multiplicirt (15) werden müssen, um sie in die drei anderen Vectoren α, β, γ, oder OA, OB, OC, durch Aenderung ihrer

* Vergleiche die Anmerkung zu Art. 155.

Länge zu verwandeln, ohne irgend welchen Wechsel ihrer Richtungen. Aber solch eine ausschliessliche Operation, nur an der Länge (oder an der Ausdehnung) einer Linie, kann ein Act der Spannung* heissen; ebenso wie eine Operation nur an der Richtung (vergl. 151) ein Act der Drehung heissen kann. Wir haben daher darin einen Grund zur Einführung des Namens, Tensor, den wir auf die positive Zahl anwenden können, welche, wie vorher, die Länge einer Linie darstellt. Und wenn die Bezeichnung $T\alpha$ (für α) für solch einen Tensor angewandt wird, so sehn wir, dass wir allgemein für irgend einen Vector α die Gleichungen (vergleiche wieder 15, 16) schreiben können:

$$U\alpha = \alpha : T\alpha; \quad T\alpha = \alpha : U\alpha; \quad \alpha = T\alpha \,.\, U\alpha = U\alpha \,.\, T\alpha.$$

Zum Beispiel, wenn α ein Einheitsvector ist, so dass $U\alpha = \alpha$ (160), dann ist $T\alpha = 1$; und daher haben wir allgemein, was für ein Vector auch mit α bezeichnet werden mag, stets

$$TU\alpha = 1.$$

Aus demselben Grunde haben wir stets, was für ein Quaternion auch mit q bezeichnet werden mag, die Gleichung (vergl. wieder 160),

$$T(\mathrm{Ax}.q) = 1.$$

(1.) Daher drückt die Gleichung,

$$T\varrho = 1,$$

in der $\varrho = OP$ ist, aus, dass der Ort des variablen Punktes P die Oberfläche der Einheitskugel (128) ist.

(2.) Die Gleichung, $T\varrho = T\alpha$, drückt aus, dass der Ort des Punktes P die Oberfläche der Kugel ist, die durch den Punkt A geht und den Punkt O zum Mittelpunkt hat.

(3.) Andrerseits haben wir für die Kugel, die durch O geht und den Punkt A zum Mittelpunkt hat, die Gleichung,

$$T(\varrho - \alpha) = T\alpha;$$

sie drückt aus, dass die Längen der beiden Linien, AP, AO, gleich sind.

* Vergleiche die Anmerkung zu Art. 156, auf Seite 174.

Digitized by Google

(4.) Allgemeiner, die Gleichung,

$$T(\varrho - \alpha) = T(\beta - \alpha),$$

drückt aus, dass der Ort von P die Kugeloberfläche ist, die durch B geht und A zum Mittelpunkt hat.

(5.) Die Gleichung des Ortes der Punkte in dem Satze* des Apollonius von Perga, 145, (8.), (9.), kann unter einer der beiden folgenden Formen geschrieben werden:

$$T(\varrho - a^2\alpha) = a\,T(\varrho - \alpha);$$
$$T\varrho = a\,T\alpha;$$

ich werde später zeigen, dass man von der einen zur anderen übergehn kann, nach allgemeinen Transformationsregeln, ohne die Geometrie zu Hülfe zu nehmen [vergl. 145, (10.)].

(6.) Die Gleichung,

$$T(\varrho + \alpha) = T(\varrho - \alpha),$$

drückt aus, dass der Ort von P die Ebne durch O, senkrecht zur Linie OA, ist; denn sie drückt aus, dass, wenn $OA' = -OA$, der Punkt P von den beiden Punkten A und A' gleich weit entfernt ist. Sie stellt daher denselben Ort dar, wie die Gleichung,

$$\angle\frac{\varrho}{\alpha} = \frac{\pi}{2},$$

des Art. 132, (1.); oder wie die Gleichung,

$$\frac{\varrho}{\alpha} + K\frac{\varrho}{\alpha} = 0,$$

in Art. 144, (1.); oder wie

$$\left(U\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = -1$$

in Art. 161, (7.); oder wie die einfache geometrische Formel, $\varrho \perp \alpha$ (129). Und wir werden es in der That, nach allgemeinen Regeln unserer Rechenart, möglich finden, irgend eine dieser fünf Formeln in irgend eine andere von ihnen zu verwandeln; oder in die sechste Form,

$$S\frac{\varrho}{\alpha} = 0,$$

---

* Vergleiche die erste Anmerkung auf Seite 166.

Digitized by Google

welche ausdrückt, dass der Skalar-Theil* des Quaternions $\frac{\varrho}{\alpha}$ null ist, und dass daher dieser Quaternion ein rechter Quotient (132) ist.

(7.) Ebenso drückt die Gleichung,

$$T(\varrho - \beta) = T(\varrho - \alpha),$$

aus, dass der Ort von P die Ebne ist, die senkrecht zur Linie AB ist und sie halbirt; denn sie drückt aus, dass P gleich weit von den beiden Punkten A und B entfernt ist.

(8.) Da der Tensor, $T\alpha$, allgemein ein positiver Skalar ist, der aber im Grenzfall mit α verschwinden kann, so haben wir,

$$Tx\alpha = \pm x\, T\alpha, \text{ je nachdem } x > \text{ oder } < 0;$$

also, im Besonderen,

$$T(-\alpha) = T\alpha; \text{ und } T0\,a = T0 = 0;$$

(9.) Dass

$$T(\beta + \alpha) = T\beta + T\alpha,$$

wenn

$$U\beta = U\alpha,$$

aber in keinem anderen Falle (wenn α und β irgend zwei wirkliche Vectoren sind), das ist, wie wir später sehn werden, eine Folge unserer Bezeichnung nach den Regeln unserer Rechenart; inzwischen mag es jedoch auf geometrischem Wege bewiesen werden, indem wir uns vorstellen, dass, während $\alpha = OA$, wie gewöhnlich, $\beta + \alpha = OC$, und daher $\beta = OC - OA = AC$ (4) ist; denn dann sehn wir, dass zwar im Allgemeinen die drei Punkte O, A, C die Ecken eines Dreiecks sind und daher die Länge der Seite OC kleiner ist, als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten OA und AC, dass dagegen die erstere Länge gleich der Summe der beiden letzteren wird, in dem besonderen Falle, wenn das Dreieck dadurch verschwindet, dass der Punkt A auf die begrenzte Linie OC fällt; in diesem Falle haben OA und AC, oder α und β, ein und dieselbe Richtung, wie es die Gleichung $U\alpha = U\beta$ anzeigt.

(10.) Wenn α und β irgend welche wirklichen Vectoren

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 161; und den folgenden Abschnitt dieses Kapitels.

Digitized by Google

sind, und wenn ihre Versoren ungleich sind ($U\alpha$ nicht $= U\beta$), dann ist,

$$T(\beta + \alpha) < T\beta + T\alpha;$$

die Ungleichheit ergiebt sich sofort aus der Betrachtung des vorigen Dreiecks OAC; aber es kann auch, wie wir finden werden, durch Rechnung mit den Zeichen, nach den Regeln für Quaternionen, gefunden werden.

(11.) Wenn $U\beta = -U\alpha$, dann ist $T(\beta + \alpha) = \pm (T\beta - T\alpha)$, je nachdem $T\beta >$ oder $< T\alpha$; aber

$$T(\beta + \alpha) > \pm (T\beta - T\alpha),$$

wenn

$$U\beta \text{ nicht} = -U\alpha.$$

187. Den Quotienten, $U\beta : U\alpha$, der Versoren der beiden Vectoren, α und β, habe ich (in 156) den Versor des Quotienten, oder Quaternions, $q = \beta : \alpha$, genannt; und habe ihn, als solchen, durch das Symbol Uq bezeichnet. In derselben Weise werde ich jetzt den Quotienten, $T\beta : T\alpha$, der Tensoren derselben beiden Vectoren, den Tensor* des Quaternions q, oder $\beta : \alpha$, nennen, und ihn durch das entsprechende Zeichen, Tq, bezeichnen. Und dann können wir, ebenso wie wir den Buchstaben U (in 156) das charakteristische Zeichen für die Operation den Versor zu bilden genannt haben, jetzt von T als von dem charakteristischen Zeichen der (entsprechenden) Operation den Tensor zu bilden sprechen, entweder den eines Vectors α, oder eines Quaternions, q. Wir werden also, allgemein, haben,

$$T(\beta : \alpha) = T\beta : T\alpha,$$

wie wir hatten,

$$U(\beta : \alpha) = U\beta : U\alpha \text{ (156)};$$

und wir können sagen, dass wie der Versor Uq nur von der relativen Richtung (157) abhängt, aber auch umgekehrt ausreichend ist, sie zu bestimmen, so der Tensor Tq von der relativen Länge** (109) abhängt und sie bestimmt; nämlich der relativen Länge derjenigen beiden Vectoren, α und β, deren Quotient (112) der Quaternion q ist.

* Vergleiche die Anmerkung zu Art. 109, auf Seite 141; und die zu Art. 156, auf Seite 174.

** Ich habe in Art. 112 und in den zusätzlichen Erläuterungen zum dritten Abschnitt dieses Kapitels (113—116) gezeigt, dass relative Länge

(1.) Daher drückt die Gleichung $T\frac{\varrho}{\alpha} = 1$, ebenso wie $T\varrho = T\alpha$, die ihr äquivalent ist, aus, dass der Ort von P die Kugeloberfläche mit dem Mittelpunkte O ist, die durch den Punkt A geht.

(2.) Die Gleichung [vergl. 186, (6.)],

$$T\frac{\varrho + \alpha}{\varrho - \alpha} = 1,$$

drückt aus, dass der Ort von P die Ebne ist, die durch den Punkt O geht und senkrecht zur Linie OA ist.

(3.) Weitere Beispiele derselben Art können leicht aus den Nebenartikeln zu 186 abgeleitet werden, indem man die Bezeichnung (187) für den Tensor eines Quotienten, oder Quaternions, auch auf den Tensor eines Vectors (185) ausdehnt.

(4.) $$T(\beta : \alpha) > , = , \text{ oder } < 1,$$

je nachdem

$$T\beta > , = , \text{ oder } < T\alpha.$$

(5.) Der Tensor eines rechten Quotienten (132) ist stets gleich dem Tensor seines Index (133).

(6.) Der Tensor eines Radials (146) ist stets die positive Einheit; so haben wir, allgemein, nach 156,

$$TUq = 1;$$

und im Besonderen, nach 181,

$$Ti = Tj = Tk = 1.$$

---

sowohl, wie relative Richtung, als ein wesentlicher Bestandtheil in den wahren Begriff eines Quaternions eingeht. Demgemäss wurde, in Art. 117, eine Uebereinstimmung der relativen Längen (sowohl, als eine Uebereinstimmung der relativen Richtungen) als eine der Bedingungen für die Gleichheit zwischen irgend zwei Quaternionen, als Quotienten von Vectoren betrachtet, aufgestellt: so dass wir jetzt sagen können, dass die Tensoren (ebenso wie die Versoren) gleicher Quaternionen gleich sind. Vergleiche die erste Anmerkung auf Seite 176 über das dort sogenannte quantitative Element der absoluten oder relativen Länge, das aus α, oder aus q, vermittelst des charakteristischen Zeichens U eliminirt wurde; während das neue charakteristische Zeichen, T, des gegenwärtigen Abschnitts im Gegentheil dazu dient, dies Element allein zu erhalten, und dasjenige zu eliminiren, was im Gegensatz dazu das qualitative Element der absoluten oder relativen Richtung genannt werden kann.

Digitized by Google

(7.) $$T x q = \pm x\, T q,$$

je nachdem

$$x > \text{oder} < 0;$$

so ist, im Besonderen, $T(-q) = Tq$, oder die Tensoren entgegengesetzter Quaternionen sind gleich.

(8.) $Tx = \pm x$, je nachdem $x >$ oder < 0;

also ist der Tensor eines Skalars der Skalar selbst, positiv genommen.

(9.) Daher ist,

$$T\,T\alpha = T\alpha, \quad T\,Tq = Tq;$$

so dass wir, wenn wir vom Gegenstande der Operation T (vergleiche 145, 160) absehn, die symbolische Gleichung,

$$T^2 = T\,T = T,$$

aufstellen können.

(10.) Da der Tensor eines Quaternions allgemein ein positiver Skalar ist, so ist ein solcher Tensor sein eigener Conjugirter (139); sein Winkel ist null (131); und sein Versor (159) ist die positive Einheit; oder in Zeichen,

$$K\,Tq = Tq; \quad \angle\, Tq = 0; \quad U\,Tq = 1.$$

(11.) $$T(1 : q) = T(\alpha : \beta) = T\alpha : T\beta = 1 : Tq;$$

oder in Worten, der Tensor des Reciproken eines Quaternions ist gleich dem Reciproken des Tensors.

(12.) Ferner, da die beiden Linien, OB und OB', in Fig. 36, gleich lang sind, so ergiebt die Definition (137) eines Conjugirten

$$T\,Kq = Tq;$$

oder in Worten, die Tensoren conjugirter Quaternionen sind gleich.

(13.) Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass irgend zwei Quaternionen, die gleiche Tensoren und gleiche Versoren haben, selbst gleich sind; oder in Zeichen, dass

$$q' = q, \text{ wenn } Tq' = Tq, \text{ und } Uq' = Uq.$$

188. Da wir, allgemein, haben,

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta \,.\, U\beta}{T\alpha \,.\, U\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha} \cdot \frac{U\beta}{U\alpha} = \frac{U\beta}{U\alpha} \cdot \frac{T\beta}{T\alpha} \text{ (vergl. 126, 186),}$$

so können wir die beiden folgenden allgemeinen Formeln für

die Zerlegung eines Quaternions in zwei Factoren, von der Tensor- und Versor-Art, aufstellen:

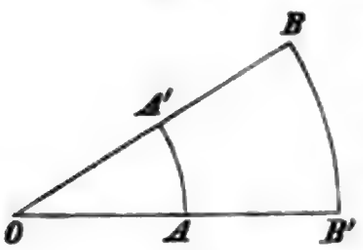
$$\text{I.}\,.\,.\;q = Tq\,.\,Uq; \quad \text{II.}\,.\,.\;q = Uq\,.\,Tq;$$

die völlig analog den Formeln (186) für die entsprechende Zerlegung eines Vectors in Factoren derselben beiden Arten sind, nämlich:

$$\text{I.}'\,.\,.\;\alpha = T\alpha\,.\,U\alpha; \quad \text{II.}'\,.\,.\;\alpha = U\alpha\,.\,T\alpha.$$

Um diese letztere Zerlegung eines Quaternions, q, oder $OB : OA$, in Factoren zu erläutern, können wir uns zwei concentrische, aber entgegengesetzt gerichtete Kreisbogen AA' und BB' denken, die bezüglich in den beiden Linien OB und OA endigen, oder besser auf der längeren der beiden Linien selbst, und auf der Verlängerung der kürzeren von ihnen, wie in der nebenstehenden Figur 48; so dass OA' die Länge von OA hat, aber die Richtung von OB, während OB', im Gegentheil, die Länge von OB hat, aber die Richtung von OA; und wir können daher, mit Benutzung der Definitionen von Versoren und Tensoren von Vectoren (155, 156, 185, 186), schreiben,

Fig. 48.



$$OA' = T\alpha\,.\,U\beta; \quad OB' = T\beta\,.\,U\alpha.$$

Dann ist, nach den Definitionen in 156, 187, des Versors und Tensors eines Quaternions,

$$Uq = U(OB : OA) = OA' : OA = OB : OB';$$
$$Tq = T(OB : OA) = OB' : OA = OB : OA';$$

woraus, nach der allgemeinen Formel der Multiplication von Quotienten (107), folgt,

$$\text{I.}\,.\;q = OB : OA = (OB : OA')\,.\,(OA' : OA) = Tq\,.\,Uq,$$

und

$$\text{II.}\,.\;q = OB : OA = (OB : OB')\,.\,(OB' : OA) = Uq\,.\,Tq,$$

wie vorher.

189. In Worten, wenn wir vom Vector α zum Vector β überzugehn wünschen, oder von der Linie OA zur Linie OB, so können wir nach Belieben entweder 1) damit beginnen, OA nach OA' zu drehn und danach OA' zu OB auszudehnen, wie Fig. 48 erläutern kann; oder 2) damit beginnen, OA

gitized by Google

zu OB' auszudehnen, und dann OB' nach OB zu drehn. Der Act der Multiplication einer Linie α mit einem Quaternion q, wenn man ihn als einen Factor (103) ansieht, der beides, Länge und Richtung (109) beeinflusst, kann somit in zwei verschiedene Theilacte zerlegt werden, nämlich von der Art, die wir Version und Tension genannt haben; und diese beiden Acte können, nach Belieben, in der einen oder anderen Aufeinanderfolge ausgeführt werden. Und obwohl wir, wenn wir nur auf die Längen Rücksicht nehmen, sagen können, dass der Tensor eines Quaternions eine zeichenlose Zahl* ist, die ein geometrisches Verhältniss von Grössen ausdrückt, so sehn wir doch, wenn wir die vorige Construction (Fig. 48) beibehalten, aus jedem der beiden resultirenden Ausdrücke (188) für Tq, dass es eine Eigenschaft giebt, in der man diesen Tensor als einen positiven Skalar behandeln kann, wie wir es zuletzt gethan haben und von jetzt an systematisch thun wollen.

190. Da $TKq = Tq$, nach 187, (12.), und $UKq = 1 : Uq$, nach 158, so können wir, allgemein, für irgend einen Quaternion und seinen Conjugirten die beiden zu einander in Beziehung stehenden Ausdrücke hinschreiben:

$$\text{I.}\ldots\ q = Tq\,.\,Uq; \quad \text{II.}\ldots\ Kq = Tq : Uq;$$

und daraus folgt, durch Multiplication und Division,

$$\text{III.}\ldots\ q.\,Kq = (Tq)^2; \quad \text{IV.}\ldots\ q : Kq = (Uq)^2.$$

Der letzteren Formel sind wir schon vorher begegnet; und wir sahen (161), dass in ihr die Klammern fortgelassen werden können, da $(Uq)^2 = U(q^2)$. Ebenso haben wir auch [vergl. 161, (2.)],

$$(Tq)^2 = T(q^2) = Tq^2,$$

wo die Klammern wieder fortgelassen werden können; oder in Worten, der Tensor des Quadrates eines Quaternions ist stets gleich dem Quadrate des Tensors: wie (ausser auf anderen Wegen) aus dem Anblick der Fig. 42, bis folgt, in der die Längen von OA, OB, OC eine geometrische Progression bilden; daraus folgt,

$$T.\left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = T\frac{OC}{OA} = \frac{T.OC}{T.OA} = \left(\frac{T.OB}{T.OA}\right)^2 = \left(T\frac{OB}{OA}\right)^2.$$

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 141, zu Art. 109.

Zu gleicher Zeit sehn wir wieder, dass das Product qKq zweier conjugirten Quaternionen, das wir [145, (11.)] ihre gemeinsame Norm genannt und mit dem Symbol Nq bezeichnet haben, geometrisch das Quadrat des Quotienten der Längen der beiden Linien darstellt, deren Quotient (wenn sie als Vectoren aufgefasst werden) der Quaternion q selbst ist (112). Wir können daher allgemein* schreiben,

$$\text{V.}\ldots\ qKq = Tq^2 = Nq;\quad \text{VI.}\ldots\ Tq = \sqrt{Nq} = \sqrt{(qKq)}.$$

(1.) Wir haben auch, nach II., die folgenden weiteren allgemeinen Transformationen für den Tensor eines Quaternions:

$$\text{VII.}\ldots\ Tq = Kq\,.\,Uq;\quad \text{VIII.}\ldots\ Tq = Uq\,.\,Kq;$$

ihre geometrischen Bedeutungen könnten leicht aus einer Zeichnung entwickelt werden, aber ihre Gültigkeit ist durch das Vorstehende genugsam bewiesen.

(2.) Auch (vergl. 158),

$$\frac{1}{Uq} = \frac{Kq}{Tq} = K\frac{q}{Tq} = KUq;$$

$$K\frac{1}{Uq} = \frac{q}{Tq} = Uq;$$

(3). Der Reciproke eines Quaternions und der Conjugirte** des Reciproken können jetzt in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\frac{1}{q} = \frac{Kq}{Tq^2} = \frac{Kq}{Nq} = \frac{KUq}{Tq} = \frac{1}{Uq}\cdot\frac{1}{Tq} = \frac{1}{Tq}\cdot\frac{1}{Uq};$$

$$K\frac{1}{q} = \frac{q}{Nq} = \frac{q}{Tq^2} = \frac{Uq}{Tq} = \frac{1}{Kq}.$$

(4.) Wir können auch allgemein schreiben,

$$\text{IX.}\ldots\ Kq = Tq\,.\,KUq = Nq : q.$$

191. Im Allgemeinen seien q und q' irgend zwei Quaternionen, die wir als Multiplicandus und Multiplicator ansehn wollen, und sie mögen auf die Formen $\beta:\alpha$ und $\gamma:\beta$ reducirt worden sein (nach 120); dann kann der Tensor und Versor des dritten Quaternions, $\gamma:\alpha$, der (nach 107) ihr Product qq', ist, in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\text{I.}\ldots\ Tq'q = T(\gamma:\alpha) = T\gamma : T\alpha = (T\gamma : T\beta)\,.\,(T\beta : T\alpha)$$
$$= Tq'\,.\,Tq;$$

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 166.

** Vergleiche Art. 145 und die Anmerkung auf Seite 168.

Digitized by Google

II. . . $Uq'q = U(\gamma : \alpha) = U\gamma : U\alpha = (U\gamma : U\beta).(U\beta : U\alpha)$
$= Uq' . Uq;$

wo $Tq'q$ und $Uq'q$, der Einfachheit wegen, statt $T(q'.q)$ und $U(q'.q)$ geschrieben worden ist. Daher ist, in irgend solcher Multiplication, der Tensor des Productes das Product der Tensoren und der Versor des Productes das Product der Versoren; die Reihenfolge der Factoren wird im letzteren (vergl. 168, u. s. w.) allgemein beibehalten, obwohl sie im ersteren geändert werden kann, da ein Tensor ein Skalar ist. Ebenso haben wir für die Division irgend eines Quaternions q' mit irgend einem anderen q die entsprechenden Formeln:

III. . . $T(q' : q) = Tq' : Tq$; IV. . . $U(q' : q) = Uq' : Uq$;

oder mit Worten, der Tensor des Quotienten irgend zweier Quaternionen ist gleich dem Quotienten der Tensoren; und ebenso ist der Versor des Quotienten gleich dem Quotienten der Versoren. Und da Multiplication und Division von Tensoren nach den Regeln der Algebra ausgeführt werden, oder besser der Arithmetik (denn ein Tensor ist nach dem, was vorhergeht, stets eine positive Zahl), so sehn wir, dass die Schwierigkeit bei der allgemeinen Multiplication und Division von Quaternionen, worin sie auch immer bestehn mag, auf die beiden entsprechenden Operationen an Versoren zurückgeführt ist: und für die letzteren Operationen habe ich geometrische Constructionen im neunten Abschnitt dieses Kapitels angegeben.

(1.) Die beiden Producte, $q'q$ und qq', irgend zweier Quaternionen, deren Factoren in verschiedener Reihenfolge genommen sind, sind gleich oder ungleich, je nachdem diese beiden Factoren complanar oder diplanar sind; denn ich habe schon bewiesen, dass eine solche Gleichheit (169), oder Ungleichheit (168), für den Fall* besteht, dass jeder Tensor gleich der Einheit ist; aber wir haben stets (vergl. 178),

$$Tq'q = Tqq'; \quad \text{und} \quad \angle\, q'q = \angle\, qq'.$$

(2.) Wenn $\angle\, q = \angle\, q' = \frac{\pi}{2}$, dann ist $qq' = Kq'q$ (170); so dass die Producte zweier rechten Quotienten, oder rechten Quaternionen (132), wenn man sie einmal in der einen, das

* Vergleiche die Anmerkungen auf Seite 190 und 193.

Digitized by Google

andere Mal in der entgegengesetzten Reihenfolge nimmt, stets conjugirte Quaternionen sind.

(3.) Wenn $\angle q = \angle q' = \frac{\pi}{2}$, und $\text{Ax. } q' \perp \text{Ax. } q$, dann ist

$$qq' = -q'q;$$

$$\angle qq' = \angle q'q = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{Ax. } q'q \perp \text{Ax. } q, \quad \text{Ax. } q'q \perp \text{Ax. } q' \text{ (171)};$$

so dass das Product zweier rechten Quaternionen in zwei zu einander rechtwinkligen Ebnen, ein dritter ebenfalls rechter Quaternion ist, in einer Ebne senkrecht zu den beiden vorigen; und er wird in den ihm entgegengesetzten verwandelt, wenn die Reihenfolge der Factoren umgekehrt wird, wie wir hatten $ij = k = -ji$ (182).

(4.) Wenn q und q' irgend zwei diplanare Quaternionen sind, so ist die Drehung um Ax. q', von Ax. q zu Ax. $q'q$ im Allgemeinen positiv (177).

(5.) Unter derselben Bedingung ist $q\,(q':q)$ ein Quaternion mit demselben Tensor, und demselben Winkel, wie q', aber seine Achse ist verschieden; und die neue Achse, Ax. $q\,(q':q)$, kann aus der früheren Achse, Ax. q', durch eine conische Drehung in positiver Richtung um Ax. q, durch einen Winkel $= 2 \angle q$ abgeleitet werden [179, (1.)].

(6.) Das Product oder der Quotient zweier complanaren Quaternionen ist im Allgemeinen ein dritter Quaternion, der mit ihnen beiden complanar ist; aber wenn sie beide Skalare, oder beide rechte sind, dann wird das Product oder der Quotient ein Skalar (131).

(7.) Mag nun q und q' complanar oder diplanar sein, wir haben stets wie in der Algebra (vergl. 106, 107, 136) die beiden identischen Gleichungen:

$$\text{V} \ldots (q':q).q = q'; \qquad \text{VI} \ldots (q'.q):q = q'.$$

(8.) Wir haben auch, nach 190, V., und 191, I., die weitere allgemeine Formel:

$$\text{VII} \ldots Nq'q = Nq'.Nq;$$

oder in Worten, die Norm des Productes ist gleich dem Producte der Normen.

192. Es sei $q = \beta:\alpha$, und $q' = \gamma:\beta$, wie vorher; dann ist,

$$1:q'q = 1:(\gamma:\alpha) = \alpha:\gamma = (\alpha:\beta).(\beta:\gamma) = (1:q).(1:q');$$

so dass der Reciproke des Productes irgend zweier Quaternionen gleich dem Producte der Reciproken ist, in umgekehrter Reihenfolge genommen: oder kurz,

$$\text{I.} \ldots Rq'q = Rq \,.\, Rq',$$

wenn R wieder [wie in 161, (3.)] als ein augenblickliches charakteristisches Zeichen für reciproke Werthe benutzt wird. Und da wir dann, nach demselben Nebenartikel, die symbolische Gleichung, $KU = UR$, haben, oder in Worten, dass der Conjugirte des Versors irgend eines Quaternions q gleich (158) dem Versor des Reciproken des Quaternions ist; während der Versor eines Productes gleich (191) dem Product der Versoren ist, so sehn wir, dass

$$KUq'q = URq'q = URq \,.\, URq' = KUq \,.\, KUq'.$$

Aber

$$Kq = Tq \,.\, KUq, \text{ nach 190, IX.;}$$

und

$$Tq'q = Tq' \,.\, Tq = Tq \,.\, Tq',$$

nach 191; und wir kommen daher so zur folgenden weiteren wichtigen und allgemeinen Formel:

$$\text{II.} \ldots Kq'q = Kq \,.\, Kq';$$

oder in Worten, der Conjugirte des Productes irgend zweier Quaternionen ist gleich dem Producte der Conjugirten, wenn sie wieder in umgekehrter Reihenfolge genommen werden.

(1.) Die beiden Resultate, I., II., können für Versoren ($Tq = Tq' = 1$) durch die Betrachtung eines sphärischen Dreiecks ABC (vergl. Fig. 43) erläutert werden; in ihm mögen die Seiten AB und BC (vergl. 167) q und q' darstellen, der Bogen AC stellt dann $q'q$ dar. Dann wird aber der neue Multiplicator $Rq = Kq$ (158) durch BA (162) dargestellt, und der neue Multiplicandus $Rq' = Kq'$ durch CB; folglich wird das neue Product, $Rq \,.\, Rq' = Kq \,.\, Kq'$, durch den entgegengesetzten Bogen CA dargestellt, und ist daher zugleich der Reciproke $Rq'q$, und der Conjugirte $Kq'q$, des vorigen Productes $q'q$.

(2.) Wenn q und q' rechte Quaternionen sind, dann ist $Kq = -q$, $Kq' = -q'$ (nach 144); und die vorige Formel II. wird,

$$Kq'q = qq',$$

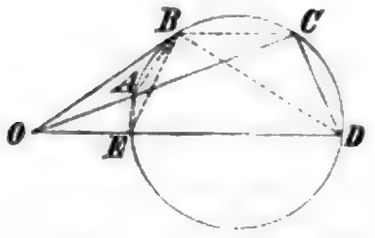
wie in 170.

(3.) Im Allgemeinen kann die Formel II. (von 192) so geschrieben werden,

$$\text{III.} \ldots K\frac{\gamma}{\alpha} = K\frac{\beta}{\alpha}.K\frac{\gamma}{\beta};$$

wo α, β, γ irgend drei Vectoren sind.

Fig. 49.



(4.) Nehmen wir nun an, dass wir, wie in der nebenstehenden Fig. 49, die beiden folgenden Beziehungen der umgekehrten Aehnlichkeit zwischen Dreiecken (118) haben,

$$\Delta AOB \propto' BOC$$
$$\Delta BOE \propto' DOB;$$

und daher (nach 137) die beiden Gleichungen,

$$\frac{\gamma}{\beta} = K\frac{\beta}{\alpha}, \qquad \frac{\beta}{\delta} = K\frac{\varepsilon}{\beta};$$

dann erhalten wir, nach III.,

$$\frac{\gamma}{\delta} = K\frac{\varepsilon}{\alpha}, \text{ oder } \Delta DOC \propto' AOE;$$

so dass die dritte Formel für die umgekehrte Aehnlichkeit eine Folge der beiden anderen ist.

(5.) Wenn dann [vergl. 145, (6.)] irgend zwei Kreise, die entweder in einer Ebne oder im Raume liegen, einander in einem Punkte B berühren; und wenn dann von einem Punkte O, auf der gemeinsamen Tangente BO, zwei Secanten OAC, OED zu diesen beiden Kreisen gezogen werden; so liegen die vier Schnittpunkte A, C, D, E auf einem Kreise; denn, dass sie auf ein und demselben Kreise liegen, ist eine leichte Folgerung (wegen der Gleichheit der Winkel, u. s. w.) aus der letzten umgekehrten Aehnlichkeit.

(6.) Zu demselben Schluss, dass die vier Punkte auf einem Kreise liegen (oder concircular sind u. s. w.), kann man auch anderweitig und zwar auf geometrischen Wege gelangen, aus der Gleichheit der beiden Rechtecke $AO.CO$ und $DO.EO$, von denen jedes gleich dem Quadrate der Tangente OB ist; das mag als eine lehrreiche Verificirung der vorigen Formel III. dienen, und als ein Beispiel der Uebereinstimmung mit den Ergebnissen, zu denen wir durch die Rechnung mit Quaternionen geführt wurden.

(7.) Es mag bemerkt werden, dass die Construction im Allgemeinen drei Kreise ergeben würde, obwohl nur einer in der Figur gezeichnet ist; aber dass die drei Kreise, wenn die

Digitized by Google

beiden Dreiecke ABC und DBE in verschiedenen Ebnen liegen, auf ein und derselben Kugel liegen, und folglich auch die fünf Punkte $ABCDE$.

193. Eine wichtige Anwendung der vorhergehenden allgemeinen Theorie der Multiplication und Division ist die Betrachtung von rechten Quaternionen (132), in Verbindung mit ihren Index-Vectoren, oder Indices (133).

Wir wollen zuerst die Division betrachten und die allgemeine Formel von 106 anwenden; es seien β und γ beide rechtwinklig zu α, und β' und γ' die bezüglichen Indices der beiden rechten Quotienten, $q = \beta : \alpha$, und $q' = \gamma : \alpha$. Wir erhalten dann die beiden Complanaritäten, $\beta' \,|||\, \beta,\ \gamma$, und $\gamma' \,|||\, \beta,\ \gamma$ (vergl. 123), denn die vier Linien $\beta,\ \gamma,\ \beta',\ \gamma'$ sind alle rechtwinklig zu α; und es ist leicht zu sehn, nach Definitionen, die ich schon gegeben habe, dass die vier Linien in ihrer gemeinsamen Ebne eine Proportion von Vectoren bilden, in demselben Sinne, in dem $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ es thun, in dem vierten Abschnitt dieses Kapitels. Wir können daher die Gleichung zwischen Quotienten schreiben,

$$\gamma' : \beta' = \gamma : \beta.$$

In der That haben wir (nach 133, 185, 187) die folgenden Beziehungen zwischen Längen,

$$T\beta' = T\beta : T\alpha, \qquad T\gamma' = T\gamma : T\alpha,$$

und folglich:

$$T(\gamma' : \beta') = T(\gamma : \beta);$$

und die Beziehung zwischen den Richtungen, die durch die Formel,

$$U(\gamma' : \beta') = U(\gamma : \beta), \quad \text{oder} \quad U\gamma' : U\beta' = U\gamma : U\beta,$$

dargestellt wird, wird leicht vermittelst der Gleichungen,

$$\angle(\gamma' : \gamma) = \angle(\beta' : \beta) = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{Ax.}(\gamma' : \gamma) = \text{Ax.}(\beta' : \beta) = U\alpha,$$

erhalten. Wir kommen so zu dem allgemeinen Satze (vergl. wieder 133), dass „der Quotient irgend zweier rechten Quaternionen gleich dem Quotienten ihrer Indices ist.“*

* Wir haben damit einen neuen Punkt der Uebereinstimmung, oder der Verbindung, zwischen rechten Quaternionen und ihren Index-Vectoren, der dazu führt, die schliessliche Annahme zu rechtfertigen, die wir bis

(1.) Zum Beispiel (vergl. 150, 159, 181), die Indices der rechten Versoren i, j, k sind die Achsen dieser drei Versoren, nämlich, die Linien OI, OJ, OK; und wir haben die gleichen Quotienten,

$$j : i = OI : OJ' = k = OJ : OI, \text{ u. s. w..}$$

(2.) Ebenso sind die Indices von $-i$, $-j$, $-k$ gleich OI', OJ', OK'; und es ist

$$i : -j = OJ' : OI' = k = OI : OJ', \text{ u. s. w..}$$

(3.) Im Allgemeinen ist der Quotient irgend zweier rechten Versoren gleich dem Quotienten ihrer Achsen; wie es die Theorie der darstellenden Bogen, und ihrer Pole, leicht erläutert.

194. Was die Multiplication zweier rechten Quaternionen in Verbindung mit ihren Indices betrifft, so mag es hier genügen zu bemerken, dass, nach 106 und 107, das Product $\gamma : \alpha = (\gamma : \beta) . (\beta : \alpha)$ gleich (vergl. 136) dem Quotienten, $(\gamma : \beta) : (\alpha : \beta)$, ist; woraus leicht zu schliessen ist, dass „das Product, $q' q$, irgend zweier rechten Quaternionen gleich dem Quotienten aus dem Index des Multiplicators, q', dividirt durch den Index des Reciproken des Multiplicandus, q, ist."

Es folgt daraus, dass die Ebne, entweder des Productes oder des Quotienten zweier rechten Quaternionen, mit der Ebne ihrer Indices zusammenfällt; und daher auch mit der Ebne ihrer Achsen; denn wir haben, allgemein, nach schon aufgestellten Principien, die Transformation,

$$\text{wenn } \angle q = \frac{\pi}{2},$$

dann ist

$$\text{Index von } q = Tq . \text{Ax. } q.$$

---

jetzt noch nicht gemacht haben, die ersteren gleich den letzteren zu setzen. In der That werden wir bald beweisen, dass der Index der Summe oder der Differenz irgend zweier rechten Quotienten (132) gleich der Summe oder Differenz ihrer Indices ist; und wir werden es in der Folge passend finden, das Product $\beta \alpha$ irgend zweier Vectoren als das Quaternionen-Product (194) zweier rechten Quaternionen zu deuten, deren Indices die beiden Linien sind (133); dann wird die vorher erwähnte Annahme der Gleichheit natürlich erscheinen und sich als nützlich erweisen. (Vergleiche die Anmerkungen auf den Seiten 154 und 174.)

Digitized by Google

Zwölfter Abschnitt.

Ueber die Summe oder Differenz irgend zweier Quaternionen; und über den Skalar, oder Skalar-Theil, eines Quaternions.

195. Die Addition irgend eines gegebenen Quaternions q', der als ein geometrischer Quotient oder Bruch (101) aufgefasst wird, zu irgend einem anderen gegebenen Quaternion q, der ebenfalls als ein Bruch aufgefasst wird, kann stets nach der ersten allgemeinen Formel des Art. 106 ausgeführt werden, wenn die beiden Brüche ein und denselben Nenner haben; und wenn sie ihn nicht schon von vornherein haben, können sie stets durch das Verfahren des Art. 120 auf eine solche Form reducirt werden, dass sie ihn haben. Und da wir früher sahn, dass die Addition irgend zweier Linien eine commutative Operation ist (7, 9), so dass wir stets haben, $\gamma + \beta = \beta + \gamma$, so folgt (nach 106), dass die Addition irgend zweier Quaternionen ebenfalls eine commutative Operation ist, oder in Zeichen, dass

$$\text{I.} \ldots q + q' = q' + q;$$

so dass die Summe irgend zweier* Quaternionen einen Werth hat, der unabhängig von ihrer Aufeinanderfolge ist: und der nach dem, was vorhergeht, als gegeben, oder wenigstens als bekannt, oder als bestimmt, angesehn werden muss, wenn die beiden Summand-Quaternionen gegeben sind. Es ist auch leicht zu sehn, dass der Conjugirte einer solchen Summe gleich der Summe der Conjugirten ist, oder in Zeichen, dass

$$\text{II.} \ldots K(q' + q) = Kq' + Kq.$$

(1.) Die wichtige zuletzt hingeschriebene Formel wird geometrisch anschaulich, wenn man sie unter der folgenden allgemeinen Form darstellt. Es sei $OBDC$ irgend ein Parallelogramm und OA irgend eine gerade Linie, die von einer seiner Ecken aus gezogen ist, aber im Allgemeinen nicht in seiner Ebne liegt. Es mögen die drei weiteren Ecken, B, C, D, [im Sinne von 145, (5.)], in Bezug auf die Linie OA in drei neue Punkte, B', C', D', reflectirt werden; oder es seien die drei Linien OB, OC, OD (im Sinne von 138) in Bezug auf dieselbe Linie

* Wir werden finden, dass sich das Resultat auf den Fall von drei oder mehr Quaternionen ausdehnen lässt; aber für jetzt wollen wir uns mit zweien begnügen.

OA reflectirt; die mithin die drei Verbindungslinien, BB', CC', DD', unter rechten Winkeln schneidet und halbirt, wie es BB' in Fig. 36 thut. Dann kann jede der Linien OB, OC, OD, und daher auch die ganze ebne Figur $OBDC$, so angesehn werden, als ob sie einfach um die Linie OA als Achse, durch eine konische Drehung um zwei rechte Winkel, gedreht worden wäre; und folglich muss die neue Figur $OB'D'C'$, wie die vorige $OBDC$, ein Parallelogramm sein. Somit (vergl. 106, 137) haben wir

$$OD' = OC' + OB', \qquad \delta' = \gamma' + \beta',$$
$$\delta' : \alpha = (\gamma' : \alpha) + (\beta' : \alpha);$$

und die vorige Formel II. ist gerechtfertigt.

(2.) Da die vorige Betrachtung so einfach ist und es unnöthig erscheint, eine neue Zeichnung herzustellen, um sie zu erläutern, so mag der Leser lieber einmal aufgefordert werden, seine Aufmerksamkeit auf die grosse Einfachheit des Ausdrucks zu richten, mit der sich viele wichtige geometrische Begriffe in Bezug auf den Raum von drei Dimensionen, durch unsere Rechenart herstellen lassen; und er mag sie sich für künftige Anwendungen, und zur leichten Verbindung mit anderen Resultaten derselben Art, gegenwärtig halten. Vergleiche die früher gemachten Anmerkungen in 132, (6.); 145, (10.); 161; 179, (3.); 192, (6.); und einige der sogleich folgenden Nebenartikel zu 196, in Betreff der Eigenschaften eines schiefen Kegels mit kreisförmiger Basis.

196. Einer der wichtigsten Fälle von Addition ist der zweier conjugirten Summanden, q und Kq, deren Summe, wie wir (in 140) gesehn haben, stets ein Skalar ist. Ich schlage vor, die Hälfte dieser Summe von jetzt an durch das Symbol,

$$Sq,$$

zu bezeichnen; und also allgemein zu schreiben,

$$\text{I.} \ldots q + Kq = Kq + q = 2\,Sq;$$

oder das neue Symbol Sq durch die Formel,

$$\text{II.} \ldots Sq = \tfrac{1}{2}(q + Kq);$$

oder kurz durch,

$$\text{II.}' \ldots S = \tfrac{1}{2}(1 + K),$$

zu definiren. Aus Gründen, die bald vollständiger einleuchten werden, können wir diese neue Grösse, Sq, auch den Skalar-Theil,

Digitized by Google

oder einfach den Skalar, des Quaternions q nennen; und wir wollen daher den Buchstaben S, in dieser Anwendung, das charakteristische Zeichen für die Operation, den Skalar eines Quaternions zu nehmen, nennen. (Vergl. 132, (6.); 137; 156; 187.) Es folgt daraus, dass nicht nur gleiche Quaternionen, sondern auch conjugirte Quaternionen, gleiche Skalare haben; oder in Zeichen,

$$\text{III.}\ldots\ Sq' = Sq, \quad \text{wenn } q' = q;$$

und

$$\text{IV.}\ldots\ SKq = Sq;$$

oder kurz,

$$\text{IV.}'\ldots\ SK = S.$$

Und da wir gesehn haben, dass $Kq = +q$, wenn q ein Skalar ist (139), dass aber $Kq = -q$, wenn q ein rechter Quotient (144) ist, so finden wir, dass der Skalar eines Skalars (der als ein besonderer Fall eines Quaternions aufgefasst wird, 131) gleich dem Skalar selbst ist, dass aber der Skalar eines rechten Quaternions null ist. Wir können daher jetzt schreiben (vergleiche 160):

$$\text{V.}\ldots\ Sx = x, \quad \text{wenn } x \text{ ein Skalar ist;}$$

$$\text{VI.}\ldots\ SSq = Sq, \qquad S^2 = SS = S;$$

und

$$\text{VII.}\ldots\ Sq = 0, \quad \text{wenn } \angle q = \frac{\pi}{2}.$$

Ferner können wir, da OA' in Fig. 36 mit x multiplicirt wird, wenn OB damit multiplicirt wird, allgemein schreiben,

$$\text{VIII.}\ldots\ Sxq = x\,Sq, \quad \text{wenn } x \text{ irgend ein Skalar ist;}$$

und daher im Besonderen (nach 188),

$$\text{IX.}\ldots\ Sq = S(Tq \,.\, Uq) = Tq \,.\, SUq.$$

Da auch $SKq = Sq$, nach IV., während $KUq = U\frac{1}{q}$, nach 158, so haben wir die allgemeine Gleichung,

$$\text{X.}\ldots\ SUq = SU\frac{1}{q};$$

oder

$$\text{X}'\ldots\ SU\frac{\beta}{\alpha} = SU\frac{\alpha}{\beta};$$

woraus, nach IX., folgt,

$$\text{XI.}\ldots\ Sq = Tq \,.\, SU\frac{1}{q};$$

oder

$$\text{XI}'\ldots\ S\frac{\beta}{\alpha} = T\frac{\beta}{\alpha} \,.\, SU\frac{\alpha}{\beta};$$

und daher auch, nach 190, (V.), da $Tq \cdot T\frac{1}{q} = 1$,

$$\text{XII.}\ldots\quad Sq = Tq^2 \cdot S\frac{1}{q} = Nq \cdot S\frac{1}{q};$$

$$\text{XII}'\ldots\quad S\frac{\beta}{\alpha} = N\frac{\beta}{\alpha} \cdot S\frac{\alpha}{\beta}.$$

Die Ergebnisse von 142, mit der vorigen Definition I. oder II. verbunden, befähigen uns, die vorige Formel VII. zu erweitern und zu schreiben,

$$\text{XIII.}\ldots\quad Sq >, =, \text{ oder } < 0,$$
$$\text{je nachdem } \angle q <, =, \text{ oder } > \tfrac{\pi}{2};$$

und umgekehrt,

$$\text{XIV.}\ldots\quad \angle q <, =, \text{ oder } > \tfrac{\pi}{2},$$
$$\text{je nachdem } Sq >, =, \text{ oder } < 0.$$

In der That, wenn wir die Definition I. mit der Formel von 140 und mit Fig. 36 vergleichen, so sehn wir sogleich, dass wir, da in dieser Figur,

$$S(OB:OA) = OA':OA,$$

ist, allgemein schreiben können,

$$\text{XV.}\ldots\quad Sq = Tq \cdot \cos \angle q;$$

oder

$$\text{XVI.}\ldots\quad SUq = \cos \angle q;$$

Gleichungen, die von grosser Wichtigkeit sind, da sie dazu dienen, Quaternionen mit der Trigonometrie in Verbindung zu setzen; und sie zeigen, dass,

$$\text{XVII.}\ldots\quad \angle q' = \angle q, \quad \text{wenn } SUq' = SUq;$$

der Winkel $\angle q$ wird hierbei wieder (wie in 130) in der Weise gerechnet, dass er nicht ausserhalb der Grenzen 0 und π fällt; und folglich ist auch,

$$\text{XVIII.}\ldots\quad \angle q' = \angle q, \quad \text{wenn } Sq' = Sq, \quad \text{und } Tq' = Tq,$$

und der Winkel eines Quaternions ist somit gegeben, wenn der Skalar und der Tensor des Quaternions gegeben, oder bekannt sind. Endlich kann man, da in derselben Figur 36 (vergl. 15, 103) die Linie,

$$OA' = (OA':OA) \cdot OA = OA \cdot S(OB:OA),$$

sagen, dass sie die Projection von OB auf OA ist, da A' der

Fusspunkt des Lothes ist, das vom Punkte B auf die Linie OA gefällt ist, und wir können daher die weitere allgemeine Formel aufstellen:

XIX. . . $\alpha S\frac{\beta}{\alpha} = S\frac{\beta}{\alpha}.\alpha =$ Projection von β auf α;

dieses Ergebniss wird sich uns sehr nützlich erweisen, bei Untersuchungen über geometrische Orte, und es kann auch so geschrieben werden:

XX. . . Projection von β auf $\alpha = U\alpha\,.\,T\beta\,.\,S\,U\frac{\beta}{\alpha}$;

und ebenso ergeben sich andere Umformungen, welche aus Sätzen ableitbar sind, die wir vorher aufgestellt haben.

Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass wir, wegen des Skalar-Charakters von Sq, allgemein, nach 159 und 187, (8.), die Ausdrücke haben,

XXI. . . $USq = \pm 1$; XXII. . . $TSq = \pm Sq$;

während wir, aus demselben Grunde, stets, nach 139, die Gleichung (vergl. IV.) haben,

XXIII. . . $KSq = Sq$; oder XXIII′. . . $KS = S$;

und, nach 131,

XXIV. . . $\angle\, Sq = 0$, oder $= \pi$, wenn nicht $\angle\, q = \frac{\pi}{2}$;

in diesem letzteren Falle wird $Sq = 0$, nach VII., und daher $\angle\, Sq$ unbestimmt:* USq wird zu gleicher Zeit unbestimmt, nach 159, aber TSq verschwindet, nach 186, 187.

(1.) Wir sehn daher, dass die Gleichung,

$$S\frac{\varrho}{\alpha} = 0,$$

gleichbedeutend mit der Formel $\varrho \perp \alpha$ ist; und dass sie daher dieselbe Ebne als Ort für P bezeichnet, wie die, welche durch irgend eine der anderen vier Gleichungen von 186, (6.) dargestellt wird; oder durch die Gleichung,

$$T\frac{\varrho+\alpha}{\varrho-\alpha} = 1, \qquad 187,\ (2.).$$

(2.) Die Gleichung

$$S\frac{\varrho-\beta}{\alpha} = 0, \quad \text{oder} \quad S\frac{\varrho}{\alpha} = S\frac{\beta}{\alpha},$$

drückt aus, dass $BP \perp OA$ ist; oder dass die Punkte B und

* Vergleiche die erste Anmerkung auf Seite 154, zu Art. 131.

P dieselbe Projection auf OA haben; oder dass der Ort von P die Ebne durch B, senkrecht zur Linie OA, ist.

(3.) Die Gleichung,

$$SU\frac{\varrho}{\alpha} = SU\frac{\beta}{\alpha},$$

drückt aus [vergl. 132, (2.)], dass der Ort von P der eine Mantel eines Umdrehungskegels ist, dessen Spitze O und dessen Achse OA ist, und der durch den Punkt B geht.

(4.) Der andere Mantel desselben Kegels wird durch die Gleichung,

$$SU\frac{\varrho}{\alpha} = -SU\frac{\beta}{\alpha},$$

dargestellt; und beide Mäntel zusammen durch die Gleichung,

$$\left(SU\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = \left(SU\frac{\beta}{\alpha}\right)^2.$$

(5.) Die Gleichung,

$$S\frac{\varrho}{\alpha} = 1, \text{ oder } SU\frac{\varrho}{\alpha} = T\frac{\alpha}{\varrho},$$

drückt aus, dass der Ort von P die Ebne durch A ist, die senkrecht zur Linie OA ist; denn sie drückt aus (vergl. XIX.), dass die Projection von OP auf OA die Linie OA selbst ist; oder dass der Winkel OAP ein rechter ist; oder dass

$$S\frac{\varrho-\alpha}{\alpha} = 0.$$

(6.) Andrerseits drückt die Gleichung,

$$S\frac{\beta}{\varrho} = 1, \text{ oder } SU\frac{\beta}{\varrho} = T\frac{\varrho}{\beta},$$

aus, dass die Projection von OB auf OP die Linie OP selbst ist; oder dass der Winkel OPB ein rechter ist; oder dass der Ort von P die Kugeloberfläche ist, welche die Linie OB zu einem Durchmesser hat.

(7.) Daher stellt das System der beiden Gleichungen,

$$S\frac{\varrho}{\alpha} = 1, \qquad S\frac{\beta}{\varrho} = 1,$$

den Kreis dar, in dem die Kugel (6.), mit dem Durchmesser OB, durch die Ebne (5.) geschnitten wird, deren vom Punkte O auf sie gefälltes Loth OA ist.

(8.) Und daher stellt die neue Gleichung,

$$S\frac{\varrho}{\alpha} \cdot S\frac{\beta}{\varrho} = 1,$$

die erhalten wird, indem man die beiden letzten Gleichungen

Digitized by Google

multiplicirt, den cyklischen* Kegel (oder Kegel zweiter Ordnung, aber im Allgemeinen nicht einen Umdrehungskegel) dar, der auf dem letzten Kreise (7.) als Basis ruht, und den Punkt O zur Spitze hat. In der That, die Gleichung (8.) wird augenscheinlich befriedigt, wenn die beiden Gleichungen (7.) es sind; und daher muss jeder Punkt des Kreisumfanges, der durch die beiden Gleichungen bezeichnet wird, ein Punkt des Ortes sein, der durch die Gleichung (8.) dargestellt wird. Aber die letztere Gleichung bleibt, wenigstens dem Wesen nach, bestehn, wenn ϱ in $x\varrho$ verwandelt wird, wo x irgend ein Skalar ist; der Ort (8.) ist daher eine gewisse Kegelfläche, deren Spitze der Anfangspunkt O ist; und folglich kann sie keine andere als die besondere Kegelfläche, nach beiden Richtungen verlängert, sein, die — wie vorher — auf der gegebenen kreisförmigen Basis (7.) ruht.

(9.) Das System der beiden Gleichungen,

$$S\frac{\varrho}{\alpha}\,.\,S\frac{\beta}{\varrho}=1, \qquad S\frac{\varrho}{\gamma}=1,$$

wo bei dem Hinschreiben der ersten der Punkt ausgelassen werden kann, stellt einen Kegelschnitt dar; nämlich den Schnitt, in dem der Kegel (8.) durch die neue Ebne geschnitten wird, deren Loth, vom Anfangspunkte der Vectoren O auf sie gefällt, OC ist.

(10.) Umgekehrt kann jeder ebne elliptische oder andere Kegelschnitt im Raume, dessen Ebne nicht durch den Anfangspunkt geht, durch ein System zweier Gleichungen von der letzten Form (9.) dargestellt werden; denn der Kegel, der auf irgend einem

* Um historisch zu sprechen, der schiefe Kegel mit kreisförmiger Basis kann der Apollonische Kegel genannt werden, nach dem Apollonius von Perga, in dessen grossem Werke über Kegelschnitte (κωνικων), auf das ich schon in einer Anmerkung auf Seite 166 Bezug genommen habe, die Eigenschaften eines solchen Kegels zuerst sytematisch behandelt worden zu sein scheinen; obwohl der Umdrehungskegel durch Euklid studirt worden ist. Aber die Bezeichnung „cyklischer Kegel" ist kürzer; und es scheint mir natürlicher, in der Geometrie von dem vorher erwähnten schiefen Kegel unter diesem Namen zu sprechen, um deutlich seine Verbindung mit dem Kreise hervorzuheben, als ihn, wie es sonst gewöhnlich geschieht, einen Kegel zweiter Ordnung, oder zweiten Grades zu nennen; obschon auch diese Bezeichnungen ihre Vortheile haben.

Digitized by Google

solchen Kegelschnitt als seiner Basis ruht, und dessen Spitze irgend ein gegebener Punkt O ist, ist bekanntlich ein cyklischer Kegel.

(11.) Die Curve, oder besser das Curvenpaar, in dem ein schiefer, aber cyklischer Kegel (8.) durch eine concentrische Kugel geschnitten wird (das heisst, ein Kegel, der auf einer kreisförmigen Basis ruht, durch eine Kugel, die ihren Mittelpunkt in der Spitze des Kegels hat) hat in neuerer Zeit den Namen sphärischer Kegelschnitt erhalten. Und irgend ein solcher Kegelschnitt kann, in dem vorher angegebenen Sinne, durch das System der beiden Gleichungen,

$$S\frac{\varrho}{\alpha}\ S\frac{\beta}{\varrho} = 1, \quad T\varrho = 1,$$

dargesstellt werden; die Länge des Kugelradius ist hier, der Einfachheit wegen, als die Längeneinheit angenommen. Aber wenn wir schreiben $T\varrho = a$, wo a irgend einen constanten und positiven Skalar bezeichnet, so können wir sofort die letztere Beschränkung fallen lassen, wenn es sich nützlich oder passend erweisen sollte.

(12.) Die Gleichung (8.) kann, nach XII. oder XII′., unter der Form (vergl. 191, VII.):

$$S\frac{\alpha}{\varrho}\ S\frac{\varrho}{\beta} = N\frac{\alpha}{\beta} = \left(T\frac{\alpha}{\beta}\right)^2,$$

oder kurz,

$$S\frac{\beta'}{\varrho}\ S\frac{\varrho}{\alpha'} = 1,$$

geschrieben werden; wenn

$$\alpha' = \beta\, T\frac{\alpha}{\beta} = T\alpha\,.\,U\beta,$$

und

$$\beta' = \alpha\, T\frac{\beta}{\alpha} = T\beta\,.\,U\alpha;$$

so dass α' und β' hier die Linien OA' und OB' des Art. 188, und der Fig. 48, sind.

(13.) Daher wird der Kegel (8.) nicht nur durch die Ebne (5.) in dem Kreise (7.) geschnitten, der auf der Kugel (6.) liegt, sondern auch durch die (im Allgemeinen) neue Ebne, $S\frac{\varrho}{\alpha'} = 1$, in dem (im Allgemeinen) neuen Kreise, in welchem die neue Ebne die (im Allgemeinen) neue Kugel, $S\frac{\beta'}{\varrho} = 1$, schneidet; oder in dem Kreise, der durch das System der beiden Gleichungen,

Digitized by Google

$$S\frac{\varrho}{\alpha'} = 1, \qquad S\frac{\beta'}{\varrho} = 1,$$

dargestellt wird.

(14.) In dem besonderen Falle, wenn $\beta \parallel \alpha$ (15), so dass der Quotient $\beta : \alpha$ ein Skalar ist, der positiv und grösser als die Einheit sein muss, damit die Ebne (5.) die Kugel (6.) wirklich schneiden kann, und damit daher der Kreis (7.) und der Kegel (8.) reell sein können, können wir schreiben,

$$\beta = a^2\alpha, \quad a > 1, \qquad T(\beta : \alpha) = a^2, \qquad \alpha' = \alpha, \quad \beta' = \beta;$$

und der Kreis (13.) fällt mit dem Kreise (7.) zusammen.

(15.) In demselben Falle ist der Kegel ein Rotationskegel; jeder Punkt P seiner kreisförmigen Basis, d. h. des Umfanges derselben, liegt in gleichem Abstande von der Spitze O, nämlich in einer Entfernung $= a\,T\alpha$. Denn in dem angenommenen Falle ergeben die Gleichungen (7.), nach XII.,

$$N\frac{\varrho}{\alpha} = S\frac{\varrho}{\alpha} : S\frac{\alpha}{\varrho} = 1 : S\frac{\alpha}{\varrho} = a^2 : S\frac{\beta}{\varrho} = a^2;$$

oder

$$T\varrho = a\ T\alpha.$$

[Vergleiche 145, (12.), und 186, (5.).]

(16.) Umgekehrt, wenn der Kegel ein Rotationskegel ist, müssen die Gleichungen (7.) zu einem Resultat von der Form,

$$a^2 = N\frac{\varrho}{\alpha} = S\frac{\varrho}{\alpha} : S\frac{\alpha}{\varrho} = S\frac{\beta}{\varrho} : S\frac{\alpha}{\varrho},$$

oder [vergl. (2.)],

$$S\frac{\beta - a^2\alpha}{\varrho} = 0,$$

führen; und das kann nur stattfinden, wenn die Linie $\beta - a^2\alpha$ verschwindet, oder wenn wir haben $\beta = a^2\alpha$, wie in (14.); denn sonst würden wir haben, nach XIV., $\varrho \perp \beta - a^2\alpha$, und alle Punkte der Basis würden dann in einer Ebne liegen, die durch die Spitze O geht, und das wäre für einen wirklichen Kegel widersinnig.

(17.) Nehmen wir nun an, dass β nicht $\parallel \alpha$ ist, und daher nicht $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, wie in (14.), noch auch $\alpha' \parallel \alpha$, $\beta' \parallel \beta$, so sehn wir, dass der Kegel (8.) nicht ein Rotationskegel oder, wie er oft genannt worden ist, ein grader Kegel ist; sondern dass er im Gegentheil ein schiefer Kegel ist, obwohl er noch cyklisch ist. Und wir sehn, dass ein solcher Kegel in zwei

Digitized by Google

verschiedenen Reihen* von Kreisschnitten durch Ebnen geschnitten wird, die parallel zu den beiden verschiedenen und zu einander nicht parallelen Ebnen (5.) und (13.) sind; oder zu zwei neuen Ebnen, welche durch die Spitze O gehn und von Chasles die beiden cyklischen Ebnen des Kegels genannt worden sind, nämlich die beiden folgenden Ebnen,

$$S\frac{\varrho}{\alpha} = 0, \qquad S\frac{\varrho}{\beta} = 0;$$

während die beiden Linien, OA und OB, die von der Spitze ausgehn, und bezüglich senkrecht zu diesen beiden Ebnen sind, die beiden cyklischen Normalen genannt werden können.

(18.) Von den beiden Linien α und β sahn wir, dass die zweite ein Durchmesser der Kugel (6.) ist, die man dem Kegel (8.) umschrieben nennen kann, wenn man diesen Kegel als über dem Kreise (7.) als Basis errichtet denkt; die zweite cyklische Ebne (17.) ist daher die Tangentialebne durch die Spitze des Kegels an die erste umschriebene Kugel (6.).

(19.) Die Kugel (13.) kann gleichfalls dem Kegel umschrieben genannt werden, wenn der letztere als auf dem neuen Kreise (13.) ruhend angesehn wird, oder als ob er in diesem Kreise als seiner neuen Basis endigte; und der Durchmesser dieser neuen Kugel ist die Linie OB', oder β', die nach (12.) die Richtung der Linie α hat, oder der ersten cyklischen Normalen (17.); so dass [vergl. (18.)] die erste cyklische Ebne die Tangentialebne von der Spitze zur zweiten umschriebenen Kugel (13.) ist.

(20.) Irgend eine andere Kugel durch die Spitze, welche die erste cyklische Ebne berührt, und deren Durchmesser von der Spitze aus daher gleich $= b'\beta'$ ist, wo b' irgend ein Skalar-Coëfficient ist, wird durch die Gleichung,

$$S\frac{b'\beta'}{\varrho} = 1, \quad \text{oder} \quad S\frac{\beta'}{\varrho} = \frac{1}{b'},$$

* Diese beiden Reihen von halb-entgegengesetzten (oder antiparallelen) aber kreisförmigen Schnitten eines cyklischen Kegels scheinen zuerst von Apollonius entdeckt worden zu sein; siehe den fünften Abschnitt seines ersten Buches, in dem er sagt, *καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑπεναντία* (Seite 22 in Halley's Ausgabe.)

Digitized by Google

dargestellt; sie schneidet den Kegel daher in einem Kreise, dessen Ebne [nach (12.)] die Gleichung hat,

$$S\frac{\varrho}{\alpha'} = b', \quad \text{oder} \quad S\frac{\varrho}{b'\alpha'} = 1,$$

so dass das Loth von der Spitze $b'\alpha' \,||\, \beta$ [vergl. (5.)] ist; und folglich die Schnittebne von Kugel und Kegel parallel zur zweiten cyklischen Ebne (17.) ist.

(21.) Ebenso schneidet irgend eine Kugel, wie zum Beispiel,

$$S\frac{b\beta}{\varrho} = 1, \quad \text{wo } b \text{ irgend ein Skalar ist,}$$

welche die zweite cyklische Ebne in der Spitze berührt, den Kegel (8.) in einem Kreise, dessen Ebne die Gleichung,

$$S\frac{\varrho}{b\alpha} = 1,$$

hat, und die daher der ersten cyklischen Ebne parallel ist.

(22.) Die Gleichung des Kegels (nach IX., X., XVI.) kann auch so geschrieben werden:

$$SU\frac{\varrho}{\alpha} \cdot SU\frac{\beta}{\varrho} = T\frac{\alpha}{\beta};$$

oder,

$$\cos\angle\frac{\varrho}{\alpha} \cdot \cos\angle\frac{\varrho}{\beta} = T\frac{\alpha}{\beta};$$

sie drückt daher aus, dass das Product der Cosinus der Neigungen irgend einer variablen Seite (ϱ) eines schiefen cyklischen Kegels zu zwei festen Linien (α und β), nämlich zu den beiden cyklischen Normalen (17.), constant ist; oder dass das Product des Sinus der Neigungen derselben variablen Seite (oder des Strahls ϱ) des Kegels zu zwei festen Ebnen, nämlich zu den beiden cyklischen Ebnen, ebenfalls eine constante Grösse ist.

(23.) Die beiden grössten Kreise, in denen die concentrische Kugel $T\varrho = 1$ durch die beiden cyklischen Ebnen geschnitten wird, sind von Chasles die beiden cyklischen Bogen des sphärischen Kegelschnitts (11.) genannt worden, in denen die Kugel durch den Kegelschnitt geschnitten wird. Es folgt daraus [nach (22.)], dass das Product der Sinus der Bogen-Lothe, die von irgend einem Punkte P eines gegebenen sphärischen Kegelschnitts auf seine beiden cyklischen Bogen gefällt werden, constant ist.

(24.) Diese Eigenschaften der cyklischen Kegel, und der

sphärischen Kegelschnitte, sind hier nicht als neue ausgesprochen; aber sie sind wichtig genug und sind hier mit genügender Leichtigkeit abgeleitet worden, um zu zeigen, dass wir bereits im Besitze einer Rechenmethode sind, die ihre eigenen Transformationsregeln (vergl. 145, (10.), u. s. w.) hat, durch welche eine Fassung eines geometrischen Satzes, oder Problems, oder einer Construction, in die verschiedensten anderen Formen übergeführt werden kann, und von denen einige klarer, einfacher und eleganter sein können als die zuerst vorgeschlagene.

197. Es seien α, β, γ irgend drei coinitiale Vectoren, OA, u. s. w., und es sei $OD = \delta = \gamma + \beta$, so dass $OBDC$ ein Parallelogramm (6) ist; wenn wir dann schreiben,

$$\beta : \alpha = q, \qquad \gamma : \alpha = q',$$

und

$$\delta : \alpha = q'' = q' + q \text{ (106)},$$

und annehmen, dass B', C', D' die Fusspunkte der Lothe sind, die von den Punkten B, C, D auf die Linie OA gefällt worden sind, so erhalten wir, nach 196, XIX., die Ausdrücke:

$$(OB') = \beta' = \alpha Sq, \quad \gamma' = \alpha Sq', \quad \delta' = \alpha Sq'' = \alpha S(q' + q).$$

Aber es ist auch $OB = CD$, und daher $OB' = C'D'$, gleichartige Projectionen gleicher Linien sind gleich; daher (vergl. 11) muss die Summe der Projectionen der Linien β, γ gleich der Projection der Summe sein, oder in Zeichen,

$$OD' = OC' + OB', \quad \delta' = \gamma' + \beta', \quad \delta' : \alpha = (\gamma' : \alpha) + (\beta' : \alpha).$$

Daher haben wir allgemein für irgend zwei Quaternionen, q und q', die Formel:

$$\text{I.} \ldots \quad S(q' + q) = Sq' + Sq;$$

oder in Worten, der Skalar der Summe ist gleich der Summe der Skalare. Dies Ergebniss ist leicht auf den Fall von irgend drei oder mehr Quaternionen, und ihre bezügliche Skalaren, auszudehnen; so können wir, wenn q'' irgend ein dritter beliebiger Quaternion ist, schreiben,

$$S\{q'' + (q' + q)\} = Sq'' + S(q' + q) = Sq'' + (Sq' + Sq);$$

wo, wegen des Skalar-Charakters der Summanden, die letzten Klammern fortgelassen werden können. Wir können daher allgemein schreiben,

$$\text{II.} \ldots \quad S\Sigma q = \Sigma Sq, \text{ oder kurz, } S\Sigma = \Sigma S;$$

wo Σ als ein Zeichen für die Summation gebraucht wird: und wir können sagen, dass die Operation, den Skalar eines Quaternions zu nehmen, eine distributive Operation (vergl. 13) ist. Was die allgemeine Subtraction irgend eines Quaternions von irgend einem anderen betrifft, so hat es keine Schwierigkeit, sie, nach der Methode des Art. 120, auf die zweite allgemeine Formel von 106 zurückzuführen; und es ist leicht zu beweisen, dass der Skalar der Differenz stets gleich der Differenz der Skalare ist. In Zeichen,

$$\text{III.}\ldots\ S(q' - q) = Sq' - Sq;$$

oder kurz,

$$\text{IV.}\ldots\ S\Delta q = \Delta Sq, \qquad S\Delta = \Delta S;$$

wo Δ als das charakteristische Zeichen für die Operation benutzt wird, eine Differenz zu bilden, indem man einen Quaternion, oder einen Skalar, von einem anderen abzieht. Beispiele sind uns schon in 196, (2.), (5.), (16.) begegnet.

(1.) Es ist bis jetzt nicht bewiesen (vergl. 195) worden, dass die Addition irgend einer Anzahl von Quaternionen, $q, q', q'', \ldots$, eine associative und eine commutative Operation (vergl. 9) ist. Aber wir sehn schon, dass der Skalar der Summe irgend einer solchen Reihe von Quaternionen einen Werth hat, der unabhängig von ihrer Anordnung und von der Art sie in Gruppen zusammenzufassen ist.

(2.) Wenn die Summanden alle rechte Quaternionen (132) sind, so verschwindet der Skalar einer jeden, nach 196, VII., im Besonderen; daher verschwindet auch der Skalar ihrer Summe, und die Summe ist folglich selbst, nach 196, XIV., ein rechter Quaternion; dies Resultat ist leicht zu verificiren. In der That, wenn $\beta \perp \alpha$ und $\gamma \perp \alpha$, dann ist $\gamma + \beta \perp \alpha$, denn α ist dann senkrecht zur Ebne von β und γ; daher ist, nach 106, die Summe irgend zweier rechten Quaternionen ein rechter Quaternion, und daher ist es auch die Summe irgend einer Anzahl solcher Quaternionen.

(3.) Was für zwei Quaternionen q und q' auch immer sein mögen, wir haben stets, wie in der Algebra, die beiden Identitäten [vergl. 191, (7.)]:

$$\text{V.}\ldots\ (q' - q) + q = q'; \qquad \text{VI.}\ldots\ (q' + q) - q = q'.$$

198. Ohne jetzt schon auf die allgemeine Theorie der

Skalare von Producten oder Quotienten von Quaternionen einzugehn,können wir doch hier bemerken, dass da nach 196, XV., der Skalar eines Quaternions nur von dem Tensor und dem Winkel abhängt, und von der Achse unabhängig ist, wir nach Belieben allgemein [vergl. 173, 178, und 191, (1.), (5.)] schreiben können,

$$\text{I.}\ldots Sqq' = Sq'q; \qquad \text{II.}\ldots S.q(q':q) = Sq';$$

die beiden Producte, qq' und $q'q$, haben also stets gleiche Skalare, obwohl sie, wie wir sahn, ungleiche Achsen haben, in dem allgemeinen Falle, wenn sie diplanar (168, 191) sind. Es mag auch bemerkt werden, dass wir, in Folge dessen, was in 193 in Betreff des Quotienten gezeigt wurde, und in 194 in Betreff des Productes, irgend zweier rechten Quaternionen (132), in Verbindung mit ihren Indices (133), jetzt für irgend zwei solche Quaternionen die Formeln aufstellen können:

$$\text{III.}\ldots S(q':q) = S(Iq':Iq) = T(q':q).\cos\angle(\text{Ax.}\,q':\text{Ax.}\,q);$$

$$\text{IV.}\ldots Sq'q = S(q'.q) = S\left(Iq':I\frac{1}{q}\right) = -Tq'q.\cos\angle(\text{Ax.}\,q':\text{Ax.}\,q);$$

wo das neue Symbol Iq gebraucht wird, als eine augenblickliche Abkürzung, um den Index des Quaternions q zu bezeichnen, der hier wie vorher als ein rechter angenommen ist. Unter derselben Annahme haben wir daher auch die anderen und kürzeren Formeln,

$$\text{V.}\ldots SU(q':q) = +\cos\angle(\text{Ax.}\,q':\text{Ax.}\,q);$$

$$\text{VI.}\ldots SUq'q = -\cos\angle(\text{Ax.}\,q':\text{Ax.}\,q);$$

die, nach 196, XVI., als Ausdruck dafür gedeutet werden können, dass unter derselben Bedingung der Rechtwinkligkeit von q und q',

$$\text{VII.}\ldots \angle(q':q) = \angle(\text{Ax.}\,q':\text{Ax.}\,q);$$

$$\text{VIII.}\ldots \angle q'q = \pi - \angle(\text{Ax.}\,q':\text{Ax.}\,q).$$

In Worten, der Winkel des Quotienten zweier rechten Quaternionen ist gleich dem Winkel ihrer Achsen; aber der Winkel des Productes zweier solchen Quaternionen ist gleich dem Supplement der Winkel ihrer Achsen. Es hat keine Schwierigkeit, diese Resultate auf anderem Wege zu beweisen, durch Constructionen wie die, welche in Art. 193 angewandt wurden; oder sie zu erläutern durch die Betrachtung gleichschenkliger Drei-

Digitized by Google

ecke mit Quadranten, die auf der Oberfläche einer Kugel liegen.

199. Ein anderer wichtiger Fall des Skalars eines Productes ist der Fall des Skalars vom Quadrate eines Quaternions. Wenn man auf Art. 149, und auf die Figur 42 Bezug nimmt, so sehn wir, dass wir, während wir stets haben $T(q^2) = (Tq)^2$, wie in 190, und $U(q^2) = U(q)^2$, wie in 161, auch haben,

I. . . $\angle (q)^2 = 2 \angle q$, und $\mathrm{Ax.}\,(q^2) = \mathrm{Ax.}\,q$, wenn $\angle q < \frac{\pi}{2}$;

aber, nach den angenommenen Definitionen von $\angle q$ (130), und von $\mathrm{Ax.}\,q$ (127, 128), ist

II. . . $\angle (q^2) = 2(\pi - \angle q)$, $\mathrm{Ax.}\,(q^2) = -\mathrm{Ax.}\,q$, wenn $\angle q > \frac{\pi}{2}$.

In jedem Falle können wir, indessen, nach 196, XVI., schreiben,

III. . . $SU(q^2) = \cos \angle (q^2) = \cos 2 \angle q$;

eine Formel, die auch statt hat, wenn $\angle q$ null ist, oder $\frac{\pi}{2}$, oder π, und die ergiebt,

IV. . . $SU(q^2) = 2(SUq)^2 - 1$.

Daher kann allgemein der Skalar von q^2 auf eine der beiden folgenden Formen gebracht werden:

V. . . $S(q^2) = Tq^2 . \cos 2 \angle q$; VI. . . $S(q^2) = 2(Sq)^2 - Tq^2$;

wir würden hierbei die Parenthesen nicht auslassen dürfen, ohne irgend eine Uebereinkunft vorher getroffen zu haben; und einfach zu schreiben Sq^2, ohne erst zu entscheiden, ob wir unter diesem letzteren Symbole den Skalar des Quadrates, oder das Quadrat des Skalars von q verstehn wollen; denn diese beiden Dinge sind im Allgemeinen nicht gleich. Da indessen das letztere von ihnen viel öfter vorkommt als das erstere, so scheint es passend, dieses als dasjenige zu bezeichnen, welches unter Sq^2 verstanden wird, während das andere gelegentlich mit einem Punkte geschrieben werden kann, als $S.\,q^2$; und dann können wir, nach dieser Uebereinkunft in Betreff der Bezeichnung*, schreiben:

* Ebenso wie es in der Differentialrechnung üblich ist, dx^2 anstatt $(dx)^2$ zu schreiben; während statt $d(x^2)$ zuweilen $d\,.\,x^2$ geschrieben wird.

$$\text{VII.}\ldots Sq^2 = (Sq)^2; \qquad \text{VIII.}\ldots S.q^2 = S(q^2).$$

Aber das Quadrat des Conjugirten irgend eines Quaternions ist, wie wir leicht sehn, der Conjugirte des Quadrates; so dass wir allgemein (vergl. 190, II.) die Formel haben:

$$\text{IX.}\ldots Kq^2 = K(q^2) = (Kq)^2 = Tq^2 : Uq^2.$$

(1.) Von einem Quaternion, wie von einem positiven Skalar, kann man im Allgemeinen sagen, er habe zwei entgegengesetzte Quadratwurzeln; denn die Quadrate entgegengesetzter Quaternionen sind stets gleich [vergl. (3.)]. Aber von diesen beiden Wurzeln ist die hauptsächlichste (oder einfachere), und diejenige, die wir durch das Symbol $\sqrt{q}$, oder $\sqrt{q}$, bezeichnen und mit Hervorhebung die Quadratwurzel von q nennen wollen, diejenige, die einen spitzen und nicht einen stumpfen Winkel hat. Wir werden daher allgemein schreiben,

$$\text{X.}\ldots \angle \sqrt{q} = \tfrac{1}{2} \angle q; \qquad \text{Ax.}\sqrt{q} = \text{Ax.}q;$$

mit dem Vorbehalt, dass die gemeinsame Achse von q und $\sqrt{q}$ (nach 131, 149) eine unbestimmte Einheitslinie wird, wenn $\angle q = 0$, oder $= \pi$ ist.

(2.) Daher ist,

$$\text{XI.}\ldots S\sqrt{q} > 0, \text{ wenn } \angle q < \pi;$$

während der Skalar der Quadratwurzel eines Quaternions, nach VI., in folgender Weise transformirt werden kann:

$$\text{XII.}\ldots S\sqrt{q} = \sqrt{\{\tfrac{1}{2}(Tq + Sq)\}};$$

eine Formel, die auch an der Grenze statt hat, wenn $\angle q = \pi$.

(3.) Der Satz* (1.), dass bei Quaternionen, wie in der Algebra, die Gleichung,

$$\text{XIII.}\ldots (-q)^2 = q^2,$$

Aber wie d^2x ein zweites Differential bezeichnet, so scheint es nicht erlaubt, das Quadrat von Sq durch das Symbol S^2q zu bezeichnen, das nur SSq, oder Sq, bezeichnet, wie in 196, VI.; der zweite Skalar [wie der zweite Tensor, 187, (9.), oder der zweite Versor, 160], ist gleich dem ersten. Indessen jeder Rechner wird hierbei seiner eigenen Entscheidung folgen; und die Anwendung der Bezeichnung S^2q für $(Sq)^2$, wie $\cos^2 x$ oft für $(\cos x)^2$ geschrieben wird, mag mitunter dadurch begründet sein, dass man Raum ersparen will.

* Vergleiche die erste Anmerkung auf Seite 208.

Digitized by Google

eine Identität ist, kann erläutert werden, wenn man sich vorstellt, dass in Fig. 42 ein Punkt B' durch die Gleichung $OB' = BO$ bestimmt wird; denn dann haben wir (vergl. Fig. 33, bis),

$$(-q)^2 = \left(\frac{OB'}{OA}\right)^2 = \frac{OC}{OA} = q^2, \quad \text{da } \Delta AOB' \propto B'OC.$$

200. Eine andere nützliche Verbindung zwischen Skalaren und Tensoren (oder Normen) von Quaternionen kann in folgender Weise abgeleitet werden. In irgend einem ebnen Dreieck AOB haben* wir die Beziehung,

$$(T.AB)^2 = (T.OA)^2 - 2(T.OA).(T.OB).\cos AOB + (T.OB)^2;$$

in der die Symbole $T.OA$, u. s. w. (nach 185, 186), die Längen der Seiten OA, u. s. w., bezeichnen; aber wenn wir wieder schreiben $q = OB : OA$, so haben wir $q - 1 = AB : OA$; dividiren wir daher mit $(T.OA)^2$, so wird die Formel (nach 196, u. s. w.),

I. . . $T(q-1)^2 = 1 - 2\,Tq\,.\,SUq + Tq^2 = Tq^2 - 2\,Sq + 1$;

oder

II. . . $N(q-1) = Nq - 2\,Sq + 1.$

Doch q ist hier ein vollkommen allgemeiner Quaternion; wir können daher sein Zeichen ändern, und schreiben,

III. . . $T(1+q)^2 = 1 + 2\,Sq + Tq^2$;

IV. . . $N(1+q) = 1 + 2\,Sq + Nq.$

Und da es (nach 106, 107) leicht zu beweisen ist, dass

V. . . $\left(\frac{q'}{q} + 1\right)q = q' + q,$

was für zwei Quaternionen q und q' auch sein mögen, während

VI. . . $S\frac{q'}{q}\,.\,Nq = S.q'\,Kq = S.q\,Kq',$

so schliessen wir leicht auf die weitere allgemeine Formel,

VII. . . $N(q'+q) = Nq' + 2\,S.q\,Kq' + Nq$;

sie ergiebt, wenn x irgend ein Skalar ist,

VIII. . . $N(q+x) = Nq + 2x\,Sq + x^2.$

* Nach dem zweiten Buche des Euklid, oder nach der ebnen Trigonometrie.

(1.) Wir sind jetzt vorbereitet, nach den Transformationsregeln* einige andere Uebergänge aus einer Art des Ausdrucks in die andere auszuführen, von der Art, auf die wir in früheren Nebenartikeln hingedeutet haben und die wir zum Theil durch Beispiele erläutert haben. Nehmen wir, zum Beispiel, die Formel,

$$T\frac{\varrho+\alpha}{\varrho-\alpha}=1, \quad \text{von 187, (2.);}$$

oder die gleichbedeutende Formel,

$$T(\varrho+\alpha)=T(\varrho-\alpha), \text{ von 186, (6.);}$$

von der wir sahn, dass sie aus geometrischen Gründen einen bestimmten Ort darstellt, nämlich die Ebne durch O, die senkrecht zur Linie OA ist; und daher denselben Ort, wie den, der durch die Gleichung,

$$S\frac{\varrho}{\alpha}=0, \quad \text{von 196, (1.),}$$

dargestellt wird. Um nun von den ersteren Gleichungen zu der letzteren durch Rechnung überzugehn, haben wir nur den Quotienten $\varrho:\alpha$ mit q zu bezeichnen, und zu beachten, dass die erste oder zweite Form, wie ich sie eben erst angeführt habe, dann wird,

$$T(q+1)=T(q-1); \quad \text{oder} \quad N(q+1)=N(q-1);$$

oder endlich, nach II. und IV.,

$$Sq=0,$$

und das giebt die dritte Form der Gleichung, wie verlangt wurde.

(2.) Umgekehrt, von $S\frac{\varrho}{\alpha}=0$, können wir, nach denselben allgemeinen Formeln II. und IV., zu der Gleichung $N\left(\frac{\varrho}{\alpha}-1\right)=N\left(\frac{\varrho}{\alpha}+1\right)$, oder nach I. und III. zu $T\left(\frac{\varrho}{\alpha}-1\right)=T\left(\frac{\varrho}{\alpha}+1\right)$, oder zu $T(\varrho-\alpha)=T(\varrho+\alpha)$, oder zu $T\frac{\varrho+\alpha}{\varrho-\alpha}=1$, wie vorher, zurückkehren; und allgemein,

* Vergleiche 145, (10.); und verschiedene der folgenden Nebenartikel.

Digitized by Google

$Sq = 0$, giebt $T(q-1) = T(q+1)$, oder $T\frac{q+1}{q-1} = 1$;

und diese letztere Gleichung umfasst, wie wir gesehn haben, die erstere.

(3.) Wenn wir ferner den Apollonischen Ort, 145, (8.), (9.), nehmen und die erste der beiden Formen 186, (5.) seiner Gleichung anwenden, nämlich,

$$T(\varrho - a^2\alpha) = a\,T(\varrho - \alpha),$$

wo a ein gegebener positiver Skalar ist, der von der Einheit verschieden ist, so können wir sie schreiben als

$T(q - a^2) = a\,T(q-1)$, oder als $N(q-a^2) = a^2 N(q-1)$;

oder nach VIII.,

$$Nq - 2a^2 Sq + a^4 = a^2(Nq - 2Sq + 1);$$

oder, wenn man $-2a^2 Sq$ fortlässt, die Glieder umstellt und mit $a^2 - 1$ dividirt,

$$Nq = a^2;\ \text{oder}\ N\varrho = a^2 N\alpha;\ \text{oder}\ T\varrho = a\,T\alpha;$$

und diese letztere ist die zweite Form 186, (5.), und sie ist somit von der ersten nur durch Rechnung abgeleitet, ohne irgend welchen unmittelbaren Hinweis auf die Geometrie, oder die Construction irgend einer Zeichnung.

(4.) Umgekehrt, wenn wir die Gleichung,

$$N\frac{\varrho}{\alpha} = a^2,\ \text{von 145, (12.),}$$

nehmen, von der wir sahn, dass sie denselben Ort darstellt, wenn man ihn als eine sphärische Oberfläche mit dem Mittelpunkt O ansieht, deren einer Radius $a\alpha$ ist, und sie schreiben $Nq = a^2$, so können wir durch Rechnung zu der Form,

$N(q-a^2) = a^2 N(q-1)$, oder $T(q-a^2) = a\,T(q-1)$,

oder endlich,

$$T(\varrho - a^2\alpha) = a\,T(\varrho - \alpha),\ \text{wie in 186, (5.),}$$

zurückkehren; die erste Form dieses Nebenartikels ist somit von der zweiten abgeleitet, nämlich von $T\varrho = a\,T\alpha$, oder von $T\frac{\varrho}{\alpha} = a$.

(5.) Die Absicht der vorigen Bemerkungen ist bei weitem nicht, die Aufmerksamkeit von der geometrischen Deutung der

verschiedenen Formen des Ausdrucks abzulenken und von den allgemeinen Regeln der Transformation, die sich somit von selbst beim Rechnen mit Quaternionen darbieten; im Gegentheil, der Hauptzweck dieses Kapitels ist, eine feste geometrische Grundlage für alle solche Formen und Regeln aufzustellen. Aber wenn eine solche Grundlage einmal gelegt ist, ist es, wie wir sehn, nicht nothwendig, bei einem weiteren Ausbau beständig zu ihrer Prüfung zurückzukehren. Dass jede der beiden Formen, in 186, (5.), die andere enthält, kann wie vorher durch Rechnung bewiesen werden; aber es ist interessant zu fragen, was die Bedeutung des Resultates ist: und wenn wir sie zu deuten suchten, würden wir von Neuem zum Satze vom Orte des Apollonius gelangen.

(6.) Das Ergebniss (4.) der Rechnung, dass

$$N(q - a^2) = a^2 N(q - 1), \quad \text{wenn } Nq = a^2,$$

kann, in der Form einer Identität, in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\text{IX.} \ldots N(q - Nq) = Nq \,.\, N(q - 1);$$

in der q irgend ein Quaternion sein kann.

(7.) Oder, nach 191, VII., da wir bald sehn werden, dass

$$q(q - 1) = q^2 - q, \text{ wie in der Algebra,}$$

können wir sie in Form der weiteren Identität schreiben:

$$\text{X.} \ldots N(q - Nq) = N(q^2 - q).$$

(8.) Wenn $T(q - 1) = 1$, dann ist $S\frac{1}{q} = \frac{1}{2}$; und umgekehrt, die erste Gleichung folgt aus der letzteren; denn jede kann auf die Form (vergl. 196, XII.),

$$Nq = 2\,Sq,$$

gebracht werden.

(9.) Wenn daher $T(\varrho - \alpha) = T\alpha$, dann ist $S\frac{2\alpha}{\varrho} = 1$, und umgekehrt. In der That drückt jede dieser beiden Gleichungen [vergl. 196, (6.)] aus, dass der Ort von P die Kugel ist, welche durch O geht und ihren Mittelpunkt in A hat; oder die $OB = 2\alpha$ zu einem ihrer Durchmesser hat.

Digitized by Google

(10.) Wenn wir in (8.) q in $q + 1$ verwandeln, so finden wir, dass wenn $Tq = 1$ ist, dann $S\frac{q-1}{q+1} = 0$ ist, und umgekehrt.

(11.) Wenn daher $T\varrho = T\alpha$ ist, dann ist $S\frac{\varrho-\alpha}{\varrho+\alpha} = 0$, und umgekehrt; denn (nach 106) ist,

$$\frac{\varrho-\alpha}{\varrho+\alpha} = \frac{\varrho-\alpha}{\alpha} : \frac{\varrho+\alpha}{\alpha} = \left(\frac{\varrho}{\alpha} - 1\right) : \left(\frac{\varrho}{\alpha} + 1\right).$$

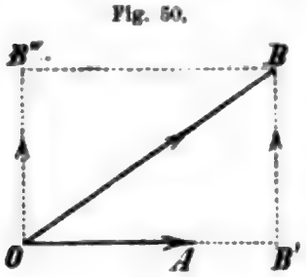
(12.) Jede der beiden Gleichungen (11.) drückt aus, dass der Ort von P die Kugel ist, die durch den Punkt A geht und O zum Mittelpunkt hat; und der Beweis für ihre Richtigkeit ist die Erkenntniss des elementaren geometrischen Satzes durch Quaternionen, dass der Winkel in einem Halbkreis ein rechter Winkel ist.

Dreizehnter Abschnitt.

Ueber den rechten Theil (oder vector Theil) eines Quaternions; und über die distributive Eigenschaft der Multiplication von Quaternionen.

201. Ein gegebener Vector OB kann stets auf einem, aber nur auf einem Wege, in zwei Vectorcomponenten zerlegt werden, deren Summe (6) er ist; und von denen der eine, wie OB' in Fig. 50, parallel (15) einem anderen gegebenen Vector OA ist, während der andere, wie OB'' in derselben Figur, senkrecht zur gegebenen Linie OA ist; nämlich dadurch, dass man das Loth BB' auf OA fällt, und $OB'' = B'B$ zieht, so dass $OB'BB''$ ein Rechteck wird. Mit anderen Worten, wenn α und β irgend zwei gegebene, wirkliche und coinitiale Vectoren sind, so ist es stets möglich aus ihnen, auf einem bestimmten Wege, zwei andere coinitiale Vectoren, β' und β'', abzuleiten, die indessen nicht beide wirklich (1) zu sein brauchen; und die (vergl. 6, 15, 129) den Bedingungen genügen sollen,

Fig. 50.



$$\beta = \beta' + \beta'' = \beta'' + \beta',$$
$$\beta' \parallel \alpha, \qquad \beta'' \perp \alpha;$$

β' verschwindet, wenn $\beta \perp \alpha$ ist; und β'' wird null, wenn $\beta \parallel \alpha$; aber beide sind eine, wie wir es nennen können, bestimmte Vector-Function von α und β. Und von diesen beiden Functionen ist augenscheinlich β' die orthographische Projection von β auf die Linie α; und β'' die entsprechende Projection von β auf die Ebne, die durch O geht und senkrecht zu α ist.

202. Daher ist es leicht zu folgern, dass es stets einen, aber nur einen Weg giebt, einen gegebenen Quaternion,

$$q = OB : OA = \beta : \alpha,$$

in zwei Theile oder Summanden (195) zu zerlegen, von denen der eine, wie in 196, ein Skalar ist, während der andere ein rechter Quotient (132) ist. Von diesen beiden Theilen haben wir den ersteren schon früher (196) den Skalar-Theil genannt, oder einfach den Skalar des Quaternions, und haben ihn durch das Symbol Sq bezeichnet; so dass wir, mit Rücksicht auf die vorige Figur 50, haben,

$$\text{I.} \ldots \quad Sq = S(OB : OA) = OB' : OA;$$

oder

$$S(\beta : \alpha) = \beta' : \alpha.$$

Und ich schlage jetzt vor, den zweiten Theil den rechten Theil* desselben Quaternions zu nennen, und ihn durch das neue Symbol

$$Vq$$

zu bezeichnen; wir würden also, in Verbindung mit derselben Figur, schreiben können,

$$\text{II.} \ldots \quad Vq = V(OB : OA) = OB'' : OA;$$

oder

$$V(\beta : \alpha) = \beta'' : \alpha.$$

Das System der Bezeichnungen, die unserer Rechenart eigenthümlich sind, ist damit völlig gegeben; und wir erhalten somit die folgende allgemeine Formel der Zerlegung eines Quaternions in zwei Summanden (vergl. 188), von der skalar und rechten Art:

---

* Ich werde den rechten Theil, Vq, auch den Vector-Theil, oder einfach den Vector des Quaternions nennen; denn es wird sich als möglich und nützlich erweisen, diesen Theil mit seinem Index-Vector (133) zu identificiren. Vergleiche die Anmerkung auf Seite 154, 174, 223.

Digitized by Google

$$\text{III.}\ldots\ q = Sq + Vq = Vq + Sq,$$

oder kurz und symbolisch,

$$\text{IV.}\ldots\ 1 = S + V = V + S.$$

(1.) In Beziehung auf dieselbe Figur 50 können wir auch schreiben,

$$V(OB:OA) = B'B:OA,$$

denn, nach der Construction ist,

$$B'B = OB''.$$

(2.) Ebenso haben wir, nach Fig. 36, die Gleichung,

$$V(OB:OA) = A'B:OA.$$

(3.) Unter den vorigen Bedingungen ist,

$$V(\beta':\alpha) = 0, \quad \text{und} \quad S(\beta'':\alpha) = 0.$$

(4.) Im Allgemeinen ist einleuchtend, dass

$$\text{V.}\ldots\ q = 0, \quad \text{wenn} \quad Sq = 0, \text{ und } Vq = 0;$$

und umgekehrt.

(5.) Allgemeiner,

$$\text{VI.}\ldots\ q' = q, \quad \text{wenn} \quad Sq' = Sq, \quad \text{und} \quad Vq' = Vq;$$

und umgekehrt.

(6.) Auch ist

$$\text{VII.}\ldots\ Vq = 0, \quad \text{wenn} \quad \angle\, q = 0, \text{ oder } = \pi;$$

oder

$$\text{VIII.}\ldots\ V(\beta:\alpha) = 0, \quad \text{wenn} \quad \beta \,||\, \alpha;$$

der rechte Theil eines Skalars ist null.

(7.) Andererseits ist,

$$\text{IX.}\ldots\ Vq = q, \quad \text{wenn} \quad \angle\, q = \frac{\pi}{2};$$

ein rechter Quaternion ist sein eigner rechter Theil.

203. Wir hatten früher (196, XIX.) eine Formel, die jetzt so geschrieben werden kann,

$$\text{I.}\ldots\ OB' = S(OB:OA).OA,$$

oder

$$\beta'' = S\frac{\beta}{\alpha}.\alpha,$$

um die Projection von OB auf OA, oder die des Vectors β auf α auszudrücken; und wir haben augenscheinlich, nach der Definition des neuen Symbols Vq, die analoge Formel,

$$\text{II.}\ldots\ OB'' = V(OB:OA).OA,$$

oder

$$\beta'' = V\frac{\beta}{\alpha}.\alpha,$$

um die Projection von β auf die Ebne durch O auszudrücken, die senkrecht zu α ist; und die in verschiedenen früheren Nebenartikeln [vergl. 186, (6.) und 196, (1.)] in Betracht gezogen worden ist. Es folgt (nach 186, u. s. w.), dass

III. . . $T\beta'' = TV\frac{\beta}{\alpha} . T\alpha$

= dem senkrechten Abstande von B von OA;

dieses Loth wird hier allein mit Rücksicht auf seine Länge in Betracht gezogen, wie es das charakteristische Zeichen T des Tensors anzeigt. Es ist zu beachten, dass wir, da der Factor, $V\frac{\beta}{\alpha}$, in der vorigen Formel II. für die Projection β'' nicht ein Skalar ist, diesen Factor als einen Multiplicator schreiben müssen, und nicht als einen Multiplicandus; obwohl uns erlaubt wäre, in Folge einer allgemeinen Uebereinkunft (15), in Betreff der Multiplication von Vectoren und Skalaren, die andere Projection β' unter der Form zu schreiben,

$$\text{I.}' \ldots \beta' = \alpha S\frac{\beta}{\alpha} \quad (196, \text{ XIX.}).$$

(1.) Die Gleichung,

$$V\frac{\varrho}{\alpha} = 0,$$

drückt aus, dass der Ort von P die unendliche grade Linie OA ist.

(2.) Die Gleichung,

$$V\frac{\varrho-\beta}{\alpha} = 0, \quad \text{oder} \quad V\frac{\varrho}{\alpha} = V\frac{\beta}{\alpha},$$

drückt aus, dass der Ort von P die unendliche grade Linie BB'', in Fig. 50, ist, die durch den Punkt B, parallel zur Linie OA, gezogen ist.

(3.) Die Gleichung,

$$S\frac{\varrho-\beta}{\alpha} = 0, \quad \text{oder} \quad S\frac{\varrho}{\alpha} = S\frac{\beta}{\alpha}, \text{ in 196, (2.),}$$

drückt, wie wir sahn, aus, dass der Ort von P die Ebne durch B, senkrecht zur Linie OA, ist; wenn wir sie daher mit der vorigen Gleichung (2.) combiniren, so drückt sie aus, dass der Punkt P auf dem Durchschnitt der beiden zuletzt erwähnten Orte liegt; oder, dass er mit dem Punkte B zusammenfällt.

(4.) Wir können daher auf diese Lage des Punktes P

Digitized by Google

schliessen, mögen wir nun die beiden ersten, oder die beiden letzten vorigen Formen (2.), (3.) nehmen, nämlich,

$$V\frac{\varrho-\beta}{\alpha}=0, \qquad S\frac{\varrho-\beta}{\alpha}=0,$$

oder

$$V\frac{\varrho}{\alpha}=V\frac{\beta}{\alpha}, \qquad S\frac{\varrho}{\alpha}=S\frac{\beta}{\alpha};$$

in dem ersten Falle schliessen wir, nach 202, V., dass $\frac{\varrho-\beta}{\alpha}=0$, und daraus, nach 142, dass $\varrho-\beta=0$ ist; und im zweiten Falle schliessen wir, nach 202, VI., dass $\frac{\varrho}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha}$; so dass wir in jedem Falle (vergl. 104), oder als eine Folgerung aus jedem System, die Gleichheit $\varrho=\beta$, oder $OP=OB$, erhalten; oder endlich (vergl. 20) die Coincidenz, $P=B$.

(5.) Die Gleichung,

$$TV\frac{\varrho}{\alpha}=TV\frac{\beta}{\alpha},$$

drückt aus, dass der Ort des Punktes P die cylindrische Rotationsfläche ist, die durch den Punkt B geht und die Linie OA zur Achse hat; denn sie drückt, nach III., aus, dass die senkrechten Abstände von P und B von dieser letzteren Linie gleich sind.

(6.) Das System der beiden Gleichungen,

$$TV\frac{\varrho}{\alpha}=TV\frac{\beta}{\alpha}, \qquad S\frac{\varrho}{\gamma}=0,$$

drückt aus, dass der Ort von P der (im Allgemeinen) elliptische Schnitt des Cylinders (5.) ist, der durch die Ebne durch O, gemacht wird, die senkrecht zur Linie OC ist.

(7.) Wenn wir eine analoge Zerlegung von ϱ vornehmen, indem wir annehmen, dass

$$\varrho=\varrho'+\varrho'', \qquad \varrho' \parallel \alpha, \qquad \varrho'' \perp \alpha,$$

so können wir die Gleichungen der drei gradlinigen oder ebnen Orte, (1.), (2.), (3.), kurz so schreiben:

$$\varrho''=0; \qquad \varrho''=\beta''; \qquad \varrho'=\beta';$$

während die Combination der beiden letzten von ihnen ergiebt $\varrho=\beta$, wie in (4.).

(8.) Die Gleichung des cylindrischen Ortes, (5.), nimmt zu gleicher Zeit die Form,

$$T\varrho''=T\beta'',$$

an; die letztere Gleichung drückt aus, dass die Projection P'' des Punktes P, auf die Fbne durch O senkrecht zu OA, irgendwo auf den Umfang eines Kreises fällt, dessen Mittelpunkt O und dessen Radius OB'' ist; und dieser Kreis kann daher als die Basis des rechten Cylinders in dem eben erwähnten Nebenartikel angesehn werden.

204. Aus dem blossen Umstande, dass Vq stets ein rechter Quotient (132) ist, und daher UVq ein rechter Versor (153), dessen Ebne (119) und dessen Achse (127) mit derjenigen von q zusammenfallen, ergeben sich leicht einige allgemeine Folgerungen. So haben wir allgemein, nach schon aufgestellten Sätzen, die Beziehungen:

$$\text{I.}\ldots \angle Vq = \tfrac{\pi}{2}; \quad \text{II.}\ldots \text{Ax. } Vq = \text{Ax. } UVq = \text{Ax. } q;$$

$$\text{III.}\ldots K\,Vq = -\,Vq, \quad \text{oder} \quad KV = -\,V \quad (144);$$

$$\text{IV.}\ldots S\,Vq = 0, \quad \text{oder} \quad SV = 0 \quad (196, \text{VII.});$$

$$\text{V.}\ldots (UVq)^2 = -\,1 \ (153, 159);$$

und daher,

$$\text{VI.}\ldots (Vq)^2 = -\,(T\,Vq)^2 = -\,N\,Vq^*,$$

da wir, nach der allgemeinen Zerlegung (188) eines Quaternions in Factoren, haben,

$$\text{VII.}\ldots Vq = T\,Vq \,.\, U\,Vq.$$

Wir haben auch (vergl. 196, VI.),

$$\text{VIII.}\ldots V\,Sq = 0, \quad \text{oder} \quad V\,S = 0 \quad (202, \text{VII.});$$

$$\text{IX.}\ldots VVq = Vq, \quad \text{oder} \quad V^2 = VV = V \quad (202, \text{IX.});$$

und

$$\text{X.}\ldots V\,Kq = -\,Vq, \text{ oder } VK = -\,V,$$

denn conjugirte Quaternionen haben entgegengesetzte rechte Theile, nach den Definitionen in 137, 202, und nach der Construction der Fig. 36. Aus demselben Grunde haben wir die weitere allgemeine Formel,

$$\text{XI.}\ldots Kq = Sq - Vq, \text{ oder } K = S - V;$$

aber wir hatten,

$$q = Sq + Vq, \quad \text{oder} \quad 1 = S + V, \text{ nach 202, III., IV.;}$$

daher ist nicht nur, durch Addition,

---

* Vergleiche die Anmerkung zu Seite 168.

Digitized by Google

$q + Kq = 2\,Sq$, oder $1 + K = 2\,S$, wie in 196, I., sondern auch, durch Subtraction,

XII. . . $q - Kq = 2\,Vq$, oder $1 - K = 2\,V$;

daher kann die Charakteristik, V, für die Operation den rechten Theil eines Quaternions (vergl. 132, (6.); 137; 156; 187; 196) zu nehmen, durch eine der beiden folgenden symbolischen Gleichungen definirt werden:

XIII. . . $V = 1 - S$ (202, IV.);

XIV. . . $V = \frac{1}{2}(1 - K)$;

die erstere verbindet sie mit der Charakteristik S und die zweite mit der Charakteristik K; während die Abhängigkeit des K von S und V durch die vorige Formel XI. ausgedrückt ist; und die Abhängigkeit des S von K durch 196, II′. Wenn ferner die Linie OB, in Fig. 50, mit irgend einem skalar Coëfficienten multiplicirt (15) wird, so wird das Loth BB' offenbar ebenfalls damit multiplicirt; daher ist, allgemein,

XV. . . $Vxq = x\,Vq$, wenn x irgend ein Skalar ist;

und daher, nach 188, 191,

XVI. . . $Vq = Tq\,.\,VUq$, und XVII. . . $TVq = Tq\,.\,TVUq$

Aber die Betrachtung des rechtwinkligen Dreiecks, $OB'B$, in derselben Figur zeigt, dass

XVIII. . . $TVq = Tq\,.\sin\,\angle\,q$,

denn wir haben, nach 202, II.,

$$TVq = T(OB'' : OA) = T.\,OB'' : T.\,OA,$$

und

$$T.\,OB'' = T.\,OB\,.\sin\,AOB;$$

wir kommen somit zu folgender allgemeinen und nützlichen Formel, die von Neuem die Quaternionen mit der Trigonometrie verknüpft:

XIX. . . $TVUq = \sin\,\angle\,q$;

indem wir sie mit der Formel,

$SUq = \cos\,\angle\,q$ (196, XVI.),

combiniren, kommen wir zu der allgemeinen Relation:

XX. . . $(SUq)^2 + (TVUq)^2 = 1$;

die auch (nach XVII., und nach 196, IX.) so geschrieben werden kann:

$$\text{XXI.}\ldots (Sq)^2 + (TVq)^2 = (Tq)^2;$$

sie hätte auch unmittelbar, ohne Sinus und Cosinus, abgeleitet werden können, und zwar aus dem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenusenquadrat gleich der Summe der Kathetenquadrate ist, unter der Form,

$$(T.OB')^2 + (T.B'B)^2 = (T.OB)^2.$$

Dieselbe wichtige Beziehung kann auf verschiedenen anderen Wegen ausgedrückt werden; zum Beispiel können wir schreiben,

$$\text{XXII.}\ldots Nq = Tq^2 = Sq^2 - Vq^2,$$

wobei als abkürzende Bezeichnung (vergl. 199, VII., VIII.) angenommen ist, dass

$$\text{XXIII.}\ldots Vq^2 = (Vq)^2, \text{ aber dass } \text{XXIV.}\ldots V.q^2 = V(q^2);$$

der Sinn dieses letzten Symbols bleibt noch zu prüfen. Und da wir, nach der Definition einer Norm, und nach den Eigenschaften von Sq und Vq, schreiben können,

$$\text{XXV.}\ldots NSq = Sq^2, \text{ aber } \text{XXVI.}\ldots NVq = -Vq^2;$$

so können wir auch schreiben,

$$\text{XXVII.}\ldots Nq = N(Sq + Vq) = NSq + NVq;$$

ein Resultat, das in der That in der Formel 200, VIII., enthalten ist, da diese Gleichung allgemein ergiebt,

$$\text{XXVIII.}\ldots N(q + x) = Nq + Nx, \text{ wenn } \angle q = \tfrac{\pi}{2};$$

x ist, wie gewöhnlich, irgend ein Skalar. Es mag hinzugefügt werden, dass, da wir (nach 106, 143) wie in der Algebra die Identität haben,

$$\text{XXIX.}\ldots -(q' + q) = -q' - q,$$

der Entgegengesetzte der Summe irgend zweier Quaternionen somit gleich der Summe der Entgegengesetzten ist, wir (nach XI.) die weitere allgemeine Formel aufstellen können:

$$\text{XXX.}\ldots -Kq = Vq - Sq;$$

der Entgegengesetzte des Conjugirten irgend eines Quaternions q hat somit denselben rechten Theil wie der Quaternion, aber einen entgegengesetzten skalar Theil.

(1.) Aus der letzten Formel kann gefolgert werden, dass, wenn

$$q' = -Kq, \text{ dann } Vq' = +Vq, \text{ aber } Sq' = -Sq;$$

und dass daher,

$$Tq' = Tq, \text{ und Ax. } q' = \text{Ax. } q, \text{ aber } \angle q' = \pi - \angle q;$$

die beiden letzten Beziehungen hätten auch aus 138 und 143, ohne Einführung der Charakteristiken S und V, abgeleitet werden können.

(2.) Die Gleichung,

$$\left(V\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = \left(V\frac{\beta}{\alpha}\right)^2,$$

oder (nach XXVI.),

$$NV\frac{\varrho}{\alpha} = NV\frac{\beta}{\alpha},$$

ebenso wie die Gleichung in 203, (5.), drückt aus, dass der Ort von P der grade Cylinder, oder Rotationscylinder, ist, dessen Achse OA ist und der durch den Punkt B geht.

(3.) Das System der beiden Gleichungen,

$$\left(V\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = \left(V\frac{\beta}{\alpha}\right)^2, \qquad S\frac{\varrho}{\gamma} = 0,$$

wie das entsprechende System in 203, (6.), stellt im Allgemeinen einen elliptischen Schnitt desselben graden Cylinders dar; aber wenn zufällig $\gamma \parallel \alpha$, dann wird der Schnitt kreisförmig.

(4.) Das System der beiden Gleichungen,

$$S\frac{\varrho}{\alpha} = x, \quad \left(V\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = x^2 - 1,$$

$$\text{mit } x > -1,\ x < 1,$$

stellt den Kreis* dar, in dem der Umdrehungscylinder, dessen Achse OA und dessen Radius $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}T\alpha$ ist, senkrecht durch eine Ebne, in einer Entfernung $= \pm x\,T\alpha$ von O, geschnitten wird; der Vector des Mittelpunkts dieses Kreisschnittes ist $x\,\alpha$.

(5.) Während der Skalar x (algebraisch) von -1 auf 0 anwächst, und dann auf $+1$, wächst der mit ihm in Verbindung stehende Skalar $\sqrt{(1-x^2)}$ zuerst von 0 auf 1 an, und dann nimmt er von 1 nach 0 ab; der Radius des Kreises (4.) erweitert sich zugleich von 0 bis zu einem Maximum $= T\alpha$, und

* Mit dem Worte „Kreis" ist auf diesen Seiten gewöhnlich ein Umfang gemeint, und nicht eine Fläche; und ebenso bezeichnen die Worte „Kugel", „Cylinder", „Kegel" u. s. w., hier gewöhnlich Oberflächen, und nicht Volumina.

nimmt dann wieder bis zu Null ab; während die Lage des Mittelpunktes des Kreises sich stetig in einer constanten Richtung ändert, von einem ersten Grenzpunkte A', wenn $OA' = -\alpha$, bis zum Punkte A, als zweiter Grenze.

(6.) Der Ort aller solcher Kreise ist die Kugel, deren einer Durchmesser AA' ist und deren Mittelpunkt daher O ist; nämlich die Kugel, die schon durch die Gleichung $T\varrho = T\alpha$ in 186, (2.) dargestellt wurde; oder durch $T\frac{\varrho}{\alpha} = 1$, in 187, (1.); oder durch,

$$S\frac{\varrho-\alpha}{\varrho+\alpha} = 0, \quad \text{in 200, (11.);}$$

die sich aber jetzt von selbst unter der neuen Form,

$$\left(S\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 - \left(V\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = 1,$$

darstellt, und die man erhält, wenn man x aus den beiden vorigen Gleichungen (4.) eliminirt.

(7.) Es ist indessen leicht, von der letzten Form zur zweiten, und von da zur ersten, oder zur dritten nach schon aufgestellten Rechnungsregeln, oder nach den allgemeinen Beziehungen zwischen den gebrauchten Symbolen, zurückzukehren. In der That kann die letzte Gleichung (6.), nach XXII., unter der Form,

$$N\frac{\varrho}{\alpha} = 1,$$

geschrieben werden; woraus sich ergiebt,

$$T\frac{\varrho}{\alpha} = 1, \quad \text{nach 190, VI.;}$$

und daher auch $T\varrho = T\alpha$, nach 187, und $S\frac{\varrho-\alpha}{\varrho+\alpha} = 0$, nach 200, (11.).

(8.) Umgekehrt hätte man schon aus der ersten Definition und Eigenschaft einer Norm ersehn können, wie sie in 145, (11.) aufgestellt wurde, dass die Kugel durch A mit dem Mittelpunkt O [vergl. 145, (12.)] sich durch die Gleichung $N\frac{\varrho}{\alpha} = 1$ darstellen lässt; und daher, nach XXII., unter der vorigen Form (6.); wenn wir in ihr x zur Bezeichnung des variablen Skalars $S\frac{\varrho}{\alpha}$ schreiben, wie in der ersten der beiden Gleich-

Digitized by Google

ungen (4.), so erhalten wir wieder die zweite dieser beiden Gleichungen: und so hätten wir wieder dazu geführt werden können, wie in (6.), die fragliche Kugel als den Ort eines variablen Kreises anzusehn, der (wie vorher) der Durchschnitt eines variablen Cylinders und einer variablen Ebne ist, welche senkrecht zu seiner Achse ist.

(9.) Die Gleichung derselben Kugel kann auch, nach XXVII., in folgender Form geschrieben werden,

$$N\left(S\frac{\varrho}{\alpha}+V\frac{\varrho}{\alpha}\right)=1;\quad \text{oder}\quad T\left(S\frac{\varrho}{\alpha}+V\frac{\varrho}{\alpha}\right)=1.$$

(10.) Wenn wir uns in jeder variablen Ebne, die durch die erste Gleichung (4.) dargestellt wird, den Radius des Kreises, oder des variablen Cylinders, mit irgend einem constanten und positiven Skalar, a, multiplicirt denken, dann gehn wir damit, während der Mittelpunkt des Kreises und die Achse des Cylinders ungeändert bleiben, zu einem neuen System von Kreisen über, das durch das neue System von Gleichungen,

$$S\frac{\varrho}{\alpha}=x,\qquad \left(V\frac{\varrho}{a\alpha}\right)^2=x^2-1,$$

dargestellt wird.

(11.) Der Ort dieser neuen Kreise ist augenscheinlich ein Umdrehungssphäroid; der Mittelpunkt der neuen Oberfläche ist der Mittelpunkt O, und die Achse derselben Oberfläche ist der Durchmesser AA' der zuletzt betrachteten Kugel; diese Kugel ist dem Sphäroid daher entweder eingeschrieben oder umschrieben, je nachdem die Constante $a >$ oder < 1 ist; denn die Radien der neuen Kreise sind im ersteren Falle grösser, im letzteren Falle dagegen kleiner, als die Radien der vorigen Kreise; oder weil der Radius des Aequators des Sphäroids $= a\,T\alpha$ ist, während der Radius der Kugel $= T\alpha$ ist.

(12.) Die Gleichungen der beiden coaxialen Umdrehungscylinder, die beziehungsweise die Kugel und das Sphäroid umhüllen (oder ihnen umschrieben sind), sind:

$$\left(V\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2=-1;\quad \left(V\frac{\varrho}{a\alpha}\right)^2=-1;$$

oder

$$NV\frac{\varrho}{\alpha}=1,\quad NV\frac{\varrho}{\alpha}=a^2;$$

oder,

$$T V \frac{\varrho}{\alpha} = 1, \quad T V \frac{\varrho}{\alpha} = a.$$

(13.) Das System der beiden Gleichungen,

$$S \frac{\varrho}{\alpha} = x, \qquad \left(V \frac{\varrho}{\beta} \right)^2 = x^2 - 1,$$

in Verbindung mit:

$$\beta \text{ nicht } \| \alpha,$$

stellt [vergl. (3.)] eine variable Ellipse dar, wenn darin der Skalar x wieder als eine Variable behandelt wird.

(14.) Das Resultat der Elimination von x aus den beiden letzten Gleichungen, nämlich die neue Gleichung,

$$\left(S \frac{\varrho}{\alpha} \right)^2 - \left(V \frac{\varrho}{\beta} \right)^2 = 1;$$

oder

$$N S \frac{\varrho}{\alpha} + N V \frac{\varrho}{\beta} = 1, \quad \text{nach XXV., XXVI.;}$$

oder

$$N \left(S \frac{\varrho}{\alpha} + V \frac{\varrho}{\beta} \right) = 1, \quad \text{nach XXVII.;}$$

oder endlich,

$$T \left(S \frac{\varrho}{\alpha} + V \frac{\varrho}{\beta} \right) = 1, \quad \text{nach 190, VI.,}$$

stellt den Ort aller solcher Ellipsen (13.) dar, und ist daher, wie sich somit ergiebt, die passende Darstellung des allgemeinen Ellipsoids (mit drei ungleichen Achsen) durch Quaternionen; diese berühmte Oberfläche wird hier auf ihren Mittelpunkt, als auf den Anfangspunkt O der Vectoren ihrer Punkte bezogen; und die sechs skalar (oder algebraischen) Constanten, welche in die übliche algebraische Gleichung eines solchen, auf seinen Mittelpunkt als Coordinatenanfangspunkt bezogenen Ellipsoids (in Coordinaten) eingehn, sind hier virtuel in den beiden unabhängigen Vectoren, α und β, enthalten, die seine beiden Vector-Constanten* genannt werden können.

(15.) Die Gleichung [vergl. (12.)],

* Wir werden indessen finden, dass andere Paare von Vector-Constanten für das Central-Ellipsoid gelegentlich mit Vortheil gebraucht werden können.

Digitized by Google

$$\left(V\frac{\varrho}{\beta}\right)^2 = -1, \quad \text{oder} \quad NV\frac{\varrho}{\beta} = 1,$$

oder

$$TV\frac{\varrho}{\beta} = 1,$$

stellt einen Umdrehungscylinder dar, der dem Ellipsoid umschrieben ist, und es in einer Ellipse berührt, die dem Werthe $x = 0$, in (13.) entspricht; so dass die Ebne der Berührungsellipse durch die Gleichung,

$$S\frac{\varrho}{\alpha} = 0,$$

dargestellt wird; die Normale dieser Ebne [vergl. 196, (17.)] ist somit der Vector α, oder OA; während die Achse des eben erwähnten umhüllenden Cylinders β, oder OB, ist.

(16.) Indem wir vorläufig eine weitere Discussion der vorigen Quaternionengleichung des Ellipsoids (14.) aufschieben, können wir hier bemerken, dass wir allgemein, nach XXII., die beiden folgenden nützlichen Transformationen für die Quadrate, des Skalars Sq, und des rechten Theils Vq, irgend eines Quaternions q haben:

$$\text{XXXI.} \ldots \quad Sq^2 = Tq^2 + Vq^2;$$
$$\text{XXXII.} \ldots \quad Vq^2 = Sq^2 - Tq^2.$$

(17.) Wenn wir uns, bei Gelegenheit, kurz auf sie und die mit ihnen verbundene Formel XXII. beziehn, so mag es etwas bequemer sein, zu schreiben,

$(S)^2 = (T)^2 + (V)^2$, $(V)^2 = (S)^2 - (T)^2$, $(T)^2 = (S)^2 - (V)^2$,

ferner $S^2 = T^2 + V^2$, u. s. w.; denn die letzten Formen der Bezeichnung, S^2, u. s. w., habe ich schon anderweitig interpretirt, nach Analogie mit der bekannten Functional-Bezeichnung, oder Bezeichnung des Rechnens mit Functionen, oder mit Operationen (vergl. 187, (9.); 196, VI.; und 204, IX.).

(18.) In Verfolg derselben Analogie kann irgend ein Skalar durch das allgemeine Symbol,

$$V^{-1}0,$$

bezeichnet werden; denn Skalare sind die einzigen Quaternionen, deren rechte Theile verschwinden.

(19.) Ebenso kann, allgemein, ein rechter Quaternion durch das Symbol,

$$S^{-1}0,$$

bezeichnet werden; und da das den rechten Theil irgend eines Quaternions (vergl. 204, I.) einschliesst, so können wir die allgemeine symbolische Transformation eines Quaternions:

$$q = V^{-1}0 + S^{-1}0$$

aufstellen.

(20.) In dieser Form der Bezeichnung würden wir allgemein, wenigstens für reelle* Quaternionen, die Ungleichheiten,

$$(V^{-1}0)^2 > 0, \quad (S^{-1}0)^2 < 0,$$

erhalten; so dass ein (geometrisch reeller) Quaternion allgemein von der Form ist:

Quadratwurzel aus einer positiven Grösse, plus Quadratwurzel aus einer negativen Grösse.

(21.) Die Gleichungen 196, XVI. und 204, XIX. ergeben, als ein neues Band zwischen Quaternionen und der Trigonometrie, die Formel:

$$\text{XXXIII.} \ldots \tan \angle q = TVUq : SUq = TVq : Sq.$$

(22.) Es mag nicht ganz in Uebereinstimmung mit der Theorie des Functions- (oder Operations-) Zeichens sein, auf das wir kurz vorher hingewiesen haben, aber wir werden es in der Praxis angemessen finden, unter der einen oder anderen abgekürzten Form* zu schreiben:

$$\text{XXXIV.} \ldots \tan \angle q = \frac{TV}{S} . q;$$

oder

$$\text{XXXIV.}' \ldots \tan \angle q = (TV : S) q;$$

sie bieten den Vortheil, dass man die Wiederholung des Zeichens des Quaternions vermeidet, wenn das Symbol vielleicht ein zusammengesetzter Ausdruck ist, und nicht, wie hier, ein einzelner Buchstabe, q.

(23.) Die Transformation 194, für den Index eines rechten Quotienten, ergiebt allgemein, nach II., für irgend einen Quaternionen q, die Formeln:

$$\text{XXXV.} \ldots IVq = TVq \,.\, \text{Ax.}\, q;$$

$$\text{XXXVI.} \ldots IUVq = \text{Ax.}\, q;$$

---

* Vergleiche Art. 149; und die Anmerkungen auf Seite 112 und 172.

** Vergleiche die Anmerkung zu Art. 199.

Digitized by Google

so dass wir allgemein die symbolische* Gleichung,

$$\text{XXXVI.'}\ldots IUV = \text{Ax.}$$

aufstellen können.

(24.) Und da, Ax. $(1 : Vq) = -$ Ax. Vq, nach 135, und daher $= -$ Ax. q, nach II., so können wir auch, nach XXXV., schreiben,

$$\text{XXXV.'}\ldots I(1 : Vq) = -\text{Ax.}\, q : TVq.$$

205. Wenn irgend ein Parallelogramm $OBDC$ (vergl. 197) auf eine Ebne durch O projicirt wird, die senkrecht zu OA ist, dann ist die projicirte Figur $OB''D''C''$ (vergl. 11) wieder ein Parallelogramm; so dass,

$$OD'' = OC'' + OB'' \text{ (6)},$$

ist, oder

$$\delta'' = \gamma'' + \beta'';$$

und daher, nach 106,

$$\delta'' : \alpha = (\gamma'' : \alpha) + (\beta'' : \alpha).$$

Daher haben wir, nach 120, 202, für irgend zwei Quaternionen, q und q', die allgemeine Formel,

$$\text{I.}\ldots\ V(q' + q) = Vq' + Vq;$$

mit ihr ist es leicht, die andere zu verbinden,

$$\text{II.}\ldots\ V(q' - q) = Vq' - Vq.$$

Daher ist auch, für irgend drei Quaternionen, q, q', q'',

$$V\{q'' + (q' + q)\} = Vq'' + V(q' + q) = Vq'' + (Vq' + Vq);$$

und ähnliches gilt für irgend eine grössere Anzahl von Summanden: so dass wir allgemein (vergl. 197, II.) schreiben können,

$$\text{III.}\ldots\ V\Sigma q = \Sigma Vq,$$

oder kurz,

$$\text{III.'}\ldots\ V\Sigma = \Sigma V;$$

* Auf einer späteren Stufe werden wir es möglich (vergl. die Anmerkung auf Seite 223, u. s. w.) finden, allgemein zu schreiben,

$$IVq = Vq,$$
$$IUVq = UVq;$$

und dann (vergl. die Anmerkung auf Seite 153 zu Art. 129) nehmen die vorigen Gleichungen, XXXVI., XXXVI.', die kürzeren Formen an:

$$\text{Ax.}\, q = UVq; \qquad \text{Ax.} = UV.$$

während die Formel II. (vergl. 197, IV.) ebenso in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$\text{IV}\ldots\ V\Delta q = \Delta V q,$$

oder

$$\text{IV}'\ldots\ V\Delta = \Delta V;$$

die Aufeinanderfolge der addirten Glieder und die Art, sie in Gruppen zusammenzufassen, in III., nehmen wir bis jetzt als unverändert an, obwohl wir diese beiden Beschränkungen bald beseitigen werden. Wir schliessen daher, dass die Charakteristik V für die Operation den rechten Theil (202, 204) eines Quaternions zu bilden, ebenso wie die Charakteristik S, den Skalar (196, 197) zu nehmen, und die Charakteristik K den Conjugirten (137, 195*) zu nehmen, ein distributives Symbol ist, oder dass sie eine distributive Operation darstellt; während die Charakteristiken, Ax., $\angle$, N, U, T, für die Operationen bezüglich die Achse (128, 129), den Winkel (130), die Norm [145, (11.)], den Versor (156) und den Tensor (187) zu bilden, somit nicht distributive Symbole (vergl. 186, (10.), und 200, VII.) sind; oder nicht an einem Ganzen (oder einer Summe) operiren, indem sie an seinen Theilen (oder Summanden) operiren.

(1.) Wir können jetzt die symbolische Gleichung, $K^2 = 1$ (145), unter der Form (vergl. 196, VI.; 202, IV.; und 204, IV. VIII. IX. XI.):

$$\text{V}\ldots\ K^2 = (S - V)^2 = S^2 - SV - VS + V^2 = S + V = 1$$

wiedererhalten.

(2.) Ebenso können wir jeden der Ausdrücke für S^2, V^2 aus dem andern unter den Formen (vergl. wieder 202, IV.):

$$\text{VI}\ldots\ S^2 = (1 - V)^2 = 1 - 2V + V^2 = 1 - V = S,$$

wie in 196, VI.,

$$\text{VII}\ldots\ V^2 = (1 - S)^2 = 1 - 2S + S^2 = 1 - S = V,$$

wie in 204, IX.,

wiedererhalten; oder auch (vergl. 196, II.', und 204, XIV.) aus den Ausdrücken für S und V in den Gliedern mit K:

---

* In der That ist bis jetzt [vergl. 195, (1.)] nur bewiesen worden, dass $K\Sigma q = \Sigma Kq$, für den Fall von zwei Summanden; aber wir werden dies Resultat bald weiter ausdehnen.

Digitized by Google

VIII. . . $S^2 = \frac{1}{4}(1+K)^2 = \frac{1}{4}(1+2K+K^2) = \frac{1}{2}(1+K) = S$;

IX. . . $V^2 = \frac{1}{4}(1-K)^2 = \frac{1}{4}(1-2K+K^2) = \frac{1}{2}(1-K) = V$.

(3.) Ebenso ist,

X. . . $SV = \frac{1}{4}(1+K)(1-K) = \frac{1}{4}(1-K^2) = 0$,

wie in 204, IV.;

und

XI. . . $VS = \frac{1}{4}(1-K)(1+K) = \frac{1}{4}(1-K^2) = 0$,

wie in 204, VIII.

206. Was die Addition (oder Subtraction) solcher rechten Theile, Vq, Vq', betrifft, oder allgemein die irgend zweier rechten Quaternionen (132), so können wir sie mit der Addition (oder Subtraction) ihrer Indices (133) in folgender Weise verknüpfen. Es sei $OBDC$ wieder irgend ein Parallelogramm (197, 205), aber es sei jetzt OA ein Einheitsvector (129), der senkrecht zur Ebne desselben ist; so dass

$$T\alpha = 1, \angle(\beta:\alpha) = \angle(\gamma:\alpha) = \angle(\delta:\alpha) = \frac{\pi}{2}, \quad \delta = \gamma + \beta.$$

Es sei $OB'D'C'$ ein anderes Parallelogramm in derselben Ebne, das aus dem vorigen durch eine positive Drehung um einen rechten Winkel, um OA als Achse, erhalten worden ist; so dass

$$\angle(\beta':\beta) = \angle(\gamma':\gamma) = (\delta':\delta) = \frac{\pi}{2};$$

$$\text{Ax.}(\beta':\beta) = \text{Ax.}(\gamma':\gamma) = \text{Ax.}(\delta':\delta) = \alpha.$$

Dann können die drei rechten Quotienten, $\beta:\alpha$, $\gamma:\alpha$, und $\delta:\alpha$ irgend zwei rechte Quaternionen, q, q', darstellen, und deren Summe, $q'+q$, die gleichfalls stets [nach 197, (2.)] ein rechter Quaternion ist; und die Indices dieser drei rechten Quotienten sind (vergl. 133, 193) die drei Linien β', γ', δ', so dass wir, unter den vorigen Constructionsbedingungen, schreiben können,

$$\beta' = I(\beta:\alpha), \quad \gamma' = I(\gamma:\alpha), \quad \delta' = I(\delta:\alpha).$$

Aber der dritte Index ist (in Folge des zweiten Parallelogramms) die Summe der beiden vorigen Indices, oder in Zeichen, $\delta' = \gamma' + \beta'$; wir können daher schreiben,

I. . . $I(q'+q) = Iq' + Iq$, wenn $\angle q = \angle q' = \frac{\pi}{2}$;

oder in Worten, der Index der Summe* irgend zweier rechten Quaternionen ist gleich der Summe ihrer Indices. Daher haben

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 223.

wir allgemein für irgend zwei Quaternionen, q und q', die Formel,

$$\text{II.}\ldots\ I\,V(q'+q) = I\,Vq' + I\,Vq,$$

denn Vq, Vq' sind stets rechte Quotienten (202, 204), und $V(q'+q)$ ist stets ihre Summe (205, I.); so dass der Index des rechten Theils der Summe irgend zweier Quaternionen die Summe der Indices der rechten Theile ist. Ebenso macht es keine Schwierigkeit zu beweisen, dass

$$\text{III.}\ldots\ I(q'-q) = Iq' - Iq, \quad \text{wenn} \quad \angle q' = \angle q = \tfrac{\pi}{2};$$

und allgemein, dass

$$\text{IV.}\ldots\ I\,V(q'-q) = I\,Vq' - I\,Vq;$$

der Index der Differenz irgend zweier rechten Quotienten, oder der rechten Theile irgend zweier Quaternionen, ist somit gleich der Differenz der Indices*. Wir können daher die Addition oder Subtraction irgend zweier solchen Quotienten, oder Theile, auf die Addition oder Subtraction ihrer Indices zurückführen; ein rechter Quaternion ist stets (nach 133) bestimmt, wenn sein Index gegeben, oder bekannt, ist.

207. Wir sehn daher, dass ebenso wie die Multiplication irgend zweier Quaternionen (in 191) erstens auf die arithmetische Operation, ihre Tensoren zu multipliciren, und zweitens auf die geometrische Operation, ihre Versoren zu multipliciren, zurückgeführt wurde, eine geometrische Operation, die durch eine gewisse Zusammensetzung von Drehungen construirt und (auf einem der beiden verschiedenen, aber mit einander in Verbindung stehenden Wege, 167, 175) durch die Seiten oder Winkel eines sphärischen Dreiecks dargestellt wurde; so die Addition irgend zweier Quaternionen (nach 197, I., und 206, II.) erstens auf die algebraische Addition ihrer Skalar-Theile, die man als zwei positive oder negative Zahlen (16) betrachten kann, zurückgeführt werden kann; und zweitens auf die geometrische Addition der Indices ihrer rechten Theile, die man als gewisse Vectoren (1) ansehn kann. Diese letztere Addition von Linien wird nach der Regel des Parallelogramms (6.)** gebildet.

* Vergleiche wieder die Anmerkung auf Seite 223.

** Ich beabsichtige in diesen Anmerkungen nicht oft auf die geschichtliche Seite des Gegenstandes einzugehn; aber es sollte ausdrück-

Digitized by Google

Ebenso sahn wir (in 191), dass sich die allgemeine Division von Quaternionen auf eine arithmetische Division der Tensoren und eine geometrische Division der Versoren zurückführen lässt, und ebenso können wir jetzt (nach 197, III., und 206, IV.) allgemein die Subtraction von Quaternionen erstens auf eine algebraische Subtraction der Skalare, und zweitens auf eine geometrische Subtraction der Vectoren zurückführen; diese letztere Operation wird wieder durch ein Parallelogramm construirt, oder auch durch ein ebnes Dreieck (vergl. Art. 4, und Fig. 2). Und da die Summe irgend einer gegebenen Reihe von Vectoren, wie wir früher sahn, einen Werth (9) hat, der unabhängig von ihrer Anordnung ist, und von der Art, sie in Gruppen zusammenzufassen, so können wir jetzt folgern, dass die Summe irgend einer Anzahl gegebener Quaternionen ebenfalls einen Werth [vergl. 197, (1.)] hat, der unabhängig von der Anordnung und von der Gruppirung der Summanden ist; oder mit anderen Worten, dass die allgemeine Addition von Quaternionen eine commutative* und eine associative Operation ist.

(1.) Die Formel,

$$V\Sigma q = \Sigma Vq, \text{ in 205, III.,}$$

findet auch, wie wir sehn, für irgend eine Anzahl von Quaternionen statt, unabhängig von der Anordnung der Glieder in jeder der beiden Summen, und von der Art, in der sie zusammengefasst werden können.

(2.) Wir können von Neuem schliessen, dass

$$K(q' + q) = Kq' + Kq, \text{ wie in 195, II.,}$$

---

lich ausgesprochen werden, dass die berühmte Regel, die wir die geometrische Addition grader Linien nennen können, und die man als ein Analogon zur Zusammensetzung von Bewegungen (oder von Kräften) ansehn kann, sich schon bei verschiedenen Schriftstellern vor der Erfindung der Quaternionen findet; wenngleich die in dem gegenwärtigen und einem früheren Werke angewandte Methode, sie, nach algebraischen Analogien, aus dem Symbol $B - A$ (1) für die Linie AB abzuleiten möglicherweise nicht vorher benutzt worden ist. Der Leser mag die Anmerkungen zur Vorrede von des Verfassers Werk „Vorlesungen über Quaternionen" (Dublin 1853) vergleichen.

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 225.

unter der Form der Gleichung oder Identität,

$$S(q' + q) - V(q' + q) = (Sq' - Vq') + (Sq - Vq).$$

(3.) Allgemeiner kann man auf demselben Wege beweisen, dass

$$K\Sigma q = \Sigma Kq, \quad \text{oder kurz,} \quad K\Sigma = \Sigma K,$$

wie gross auch immer die Anzahl der Summanden sein mag.

208. Was den Quotienten oder das Product der rechten Theile, Vq und Vq', irgend zweier Quaternionen betrifft, so seien t und t' die Tensoren der beiden Theile, und x möge den Winkel ihrer Indices, oder ihrer Achsen, bezeichnen, oder die gegenseitige Neigung der Achsen, oder der Ebnen*, der beiden Quaternionen q und q' selbst, so dass (nach 204, XVIII.),

$$t = TVq = Tq \cdot \sin \angle q, \qquad t' = TVq' = Tq' \cdot \sin \angle q',$$

und

$$x = \angle (IVq' : IVq) = \angle (\mathrm{Ax}.q' : \mathrm{Ax}.q).$$

Dann ist, nach 193, 194, und nach 204, XXXV., XXXV.',

I. . . $Vq' : Vq = IVq' : IVq = + (TVq' : TVq) . (\mathrm{Ax}\, q' : \mathrm{Ax}.\, q)$;

II. . . $Vq' . Vq = IVq' : I\frac{1}{Vq}$

$= -(TVq' . TVq) . (\mathrm{Ax}.q' : \mathrm{Ax}.q)$;

und daher (vergl. 198), mit Benutzung der vorher gleichzeitig vorgeschlagenen Abkürzungen,

III. . . $S(Vq' : Vq) = t'\, t^{-1} \cos x$;
IV. . . $SU(Vq' : Vq) = + \cos x$;
V. . . $S(Vq' . Vq) = - t'\, t \cos x$;
VI. . . $SU(Vq' . Vq) = - \cos x$;
VII. . . $\angle (Vq' : Vq) = x$;
VIII. . . $\angle (Vq' . Vq) = \pi - x$.

Wir haben auch allgemein (vergl. 204, XVIII., XIX.),

IX. . . $TV(Vq' : Vq) = t'\, t^{-1} \sin x$;
X. . . $TVU(Vq' : Vq) = \sin x$;
XI. . . $TV(Vq' . Vq) = t'\, t \sin x$;
XII. . . $TVU(Vq' . Vq) = \sin x$;

und im Besonderen,

XIII. . . $V(Vq' : Vq) = 0$, und XIV. . . $V(Vq' . Vq) = 0$,

wenn $q' \parallel q$ (123);

Digitized by Google

da (vergl. 191, (6.), und 204, VI.) der Quotient oder das Product der rechten Theile zweier complanaren Quaternionen (die wir hier beide als Nicht-Skalare (108) annehmen, so dass t und t' beide > 0 sind) zu einem Skalar (131) wird, der in folgender Weise ausgedrückt werden kann,

XV. . . $Vq' : Vq = + t' t^{-1}$, und XVI. . . $Vq' . Vq = - t' t$,
wenn $x = 0$;

aber

XVII. . . $Vq' : Vq = - t' t^{-1}$, und XVIII. . . $Vq' . Vq = + t' t$,
wenn $x = \pi$;

der erste Fall ist der zusammenfallender, der zweite der entgegengesetzter Achsen. Wenn wir, in dem allgemeineren Falle von Diplanarität (119) mit δ die Einheitslinie bezeichnen, die senkrecht zu ihren beiden Achsen und daher ihren beiden Ebnen* gemeinsam ist, oder in der sich diese beiden Ebnen schneiden, und die so gerichtet ist, dass die Drehung um sie von Ax. q zu Ax. q' positiv (vergl. 127, 128) ist, so ergeben die vorigen Formeln I., II. leicht,

XIX. . . $\mathrm{Ax.}(Vq' : Vq) = + \delta$;
XX. . . $\mathrm{Ax.}(Vq' . Vq) = - \delta$;

und daher können (nach IX., XI., und nach 204, XXXV.) die Indices der rechten Theile des Quotienten und Products der rechten Theile irgend zweier diplanaren Quaternionen, wie folgt, ausgedrückt werden:

XXI. . . $I\,V(Vq' : Vq) = + \delta . t' t^{-1} \sin x$;
XXII. . . $I\,V(Vq' . Vq) = - \delta . t' t \sin x$.

(1.) Es sei ABC irgend ein Dreieck auf der Einheitskugel (128), dessen sphärische Winkel und Ecken durch dieselben Buchstaben, nämlich durch A, B, C bezeichnet werden mögen, während die Seiten wie gewöhnlich mit a, b, c bezeichnet werden sollen; und es möge angenommen werden, dass die Drehung (vergl. 177) um A von C nach B, und daher um B

* Beide Ebnen machen folglich mit einander, im Allgemeinen, zwei ungleiche Winkel, die sich zu 180^0 ergänzen; aber wir nehmen hier an, dass sie von einander unterschieden sind, indem wir auf die eine Seite jeder Ebne Rücksicht nehmen, als verschieden von der entgegengesetzten Seite; und das kann man dadurch leicht thun (111.), dass man die Achsen, wie vorher, in Betracht zieht.

von A nach C, u. s. w., positiv ist, wie in Fig. 43. Schreibt man dann, wie wir es oft gethan haben,

$$q = \beta : \alpha, \quad \text{und} \quad q' = \gamma : \beta,$$

wo

$$\alpha = OA, \text{ u. s. w.},$$

so erhalten wir leicht die folgenden Ausdrücke für die drei Skalare t, t', x und für den Vector δ:

$$t = \sin c; \quad t' = \sin a; \quad x = \pi - B; \quad \delta = -\beta.$$

(2.) In der That haben wir hier,

$$Tq = Tq' = 1, \quad \angle q = c, \quad \angle q' = a;$$

woraus sich t und t' grade so ergeben. Auch wenn A', B', C' (wie in 175) die positiven Pole der drei aufeinanderfolgenden Seiten BC, CA, AB des gegebenen Dreiecks sind, und daher die Punkte A, B, C die negativen Pole [vergl. 180, (2.)] der neuen Bogen $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, dann ist

$$\text{Ax.}\, q = OC', \qquad \text{Ax.}\, q' = OA';$$

aber x und δ sind die Winkel und die Achse des Quotienten der beiden Achsen, oder des Quaternions, der durch den Bogen $C'A'$ dargestellt (162) wird; daher ist x, wie oben ausgesprochen wurde, das Supplement des Winkels B, und δ ist nach dem Punkte auf der Kugel hin gerichtet, der dem Punkte B diametral gegenüberliegt.

(3.) Daher haben wir, nach III., V., VII., VIII., IX., XI., für irgend ein Dreieck ABC auf der Einheitskugel, in der $\alpha = OA$, u. s. w. ist, die Formeln:

$$\text{XXIII.} \ldots \quad S\left(V\frac{\gamma}{\beta} : V\frac{\beta}{\alpha}\right) = -\sin a \operatorname{cosec} c \cos B;$$

$$\text{XXIV.} \ldots \quad S\left(V\frac{\gamma}{\beta} \,.\, V\frac{\beta}{\alpha}\right) = +\sin a \sin c \cos B;$$

$$\text{XXV.} \ldots \quad \angle\left(V\frac{\gamma}{\beta} : V\frac{\beta}{\alpha}\right) = \pi - B;$$

$$\text{XXVI.} \ldots \quad \angle\left(V\frac{\gamma}{\beta} \,.\, V\frac{\beta}{\alpha}\right) = B;$$

$$\text{XXVII.} \ldots \quad TV\left(V\frac{\gamma}{\beta} : V\frac{\beta}{\alpha}\right) = +\sin a \operatorname{cosec} c \sin B;$$

$$\text{XXVIII.} \ldots \quad TV\left(V\frac{\gamma}{\beta} \,.\, V\frac{\beta}{\alpha}\right) = +\sin a \sin c \sin B.$$

Digitized by Google

(4.) Auch ist, wenn die Drehung um B von A nach C wieder positiv ist, nach XIX., XX., XXI., XXII.,

$$\text{XXIX.}\ldots \text{Ax.}\left(V\frac{\gamma}{\beta} : V\frac{\beta}{\alpha}\right) = -\beta;$$

$$\text{XXX.}\ldots \text{Ax.}\left(V\frac{\gamma}{\beta} \,.\, V\frac{\beta}{\alpha}\right) = +\beta;$$

$$\text{XXXI.}\ldots \quad IV\left(V\frac{\gamma}{\beta} : V\frac{\beta}{\alpha}\right) = -\beta \sin a \operatorname{cosec} c \sin B;$$

$$\text{XXXII.}\ldots IV\left(V\frac{\gamma}{\beta} \,.\, V\frac{\beta}{\alpha}\right) = +\beta \sin a \sin c \sin B.$$

(5.) Wenn andrerseits die Drehung um B von A nach C negativ wäre, so hätten wir, wenn wir in diesem Falle $\alpha_1 = -\alpha$, $\beta_1 = -\beta$, $\gamma_1 = -\gamma$ schrieben, ein neues und entgegengesetztes Dreieck $A_1\ B_1\ C_1$, in dem die Drehung um B_1 von A_1 nach C_1 positiv wäre, aber der Winkel bei B_1 an Grösse dem bei B gleich; so dass wir, wenn wir wie üblich alle Winkel eines sphärischen Dreiecks als positiv annehmen, haben würden $B_1 = B$, und ebenso $c_1 = c$, und $a_1 = a$; und daher, nach XXXI., zum Beispiel,

$$IV\left(V\frac{\gamma_1}{\beta_1} : V\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) = -\beta_1 \sin a_1 \operatorname{cosec} c_1 \sin B_1,$$

oder

$$IV\left(V\frac{\gamma}{\beta} : V\frac{\beta}{\alpha}\right) = +\beta \sin a \operatorname{cosec} c \sin B;$$

die vier Formeln von (4.) würden daher noch bestehn bleiben, vorausgesetzt, dass wir für die neue Richtung der Drehung in dem gegebenen Dreieck das Vorzeichen von β in jedem zweiten Gliede änderten.

(6.) Wenn wir allgemein $IVq : Sq$ in $(IV : S)q$ abkürzen, wie $TVq : Sq$ in 204, XXXIV.′, in $(TV : S)q$ abgekürzt wurde, so haben wir, nach (5.) und nach XXIV., XXXII., die weitere allgemeine Formel für irgend drei Einheitsvectoren, α, β, γ, von denen wir wieder annehmen wollen, dass sie in den Ecken eines sphärischen Dreiecks ABC endigen:

$$\text{XXXIII.}\ldots (IV : S)\left(V\frac{\gamma}{\beta} \,.\, V\frac{\beta}{\alpha}\right) = \pm\beta \tan B;$$

das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem die Drehung um B von A nach C, oder die um β von α nach γ, die vielleicht durch das Symbol $\alpha\hat{\beta}\gamma$ bezeichnet werden könnte,

und die an Grösse dem sphärischen Winkel B gleich ist, positiv oder negativ ist.

209. Wenn die Ebnen irgend dreier Quaternionen q, q', q'', die alle durch den Anfangspunkt O (119) gehn sollen, eine gemeinsame Linie enthalten, so können die drei Quaternionen collineare * Quaternionen genannt werden; und da dann die Achse eines jeden senkrecht zu dieser Linie ist, so folgt, dass die Achsen collinearer Quaternionen complanar sind; während umgekehrt die Complanarität der Achsen die Collinearität der Quaternionen beweist, denn das Loth zur Ebne der Achsen ist eine Linie, die den Ebnen der Quaternionen gemeinsam ist.

(1.) Complanare Quaternionen sind stets collinear; aber der umgekehrte Satz gilt nicht, collineare Quaternionen sind nicht nothwendig complanar.

(2.) Collineare Quaternionen, als Brüche (101) aufgefasst, können stets auf einen gemeinsamen Nenner (120) reducirt werden; und umgekehrt, wenn drei oder mehr Quaternionen auf eine solche Form gebracht werden können, dass sie Brüche mit einem gemeinsamen Nenner ε werden, dann müssen die Quaternionen collinear sein; denn die Linie ε ist dann allen ihren Ebnen gemeinsam.

(3.) Irgend welche zwei Quaternionen sind mit irgend einem Skalar collinear; denn die Ebne eines Skalars ist unbestimmt** (131).

(4.) Daher sind die skalar und rechten Theile, Sq, Sq', Vq, Vq', irgend zweier Quaternionen stets mit einander collinear.

(5.) Die Conjugirten collinearer Quaternionen sind selbst collinear.

210. Es seien q, q', q'' irgend drei collineare Quaternionen, und es bezeichne α eine ihren Ebnen gemeinsame Linie. Dann können wir drei andere Linien β, γ, δ so bestimmen (vergl. 120), dass

$$q = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad q' = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad q'' = \frac{\alpha}{\delta};$$

* Quaternionen, deren Ebnen ein und derselben Linie parallel sind, können ebenfalls collinear genannt werden. Vergleiche die zweite Anmerkung auf Seite 147.

** Vergleiche die Anmerkung auf Seite 149.

Digitized by Google

und können dann schliessen, dass (wie in der Algebra)

$$\text{I.}\ldots (q' + q)q'' = q'q'' + qq'',$$

denn, nach 106, 107, ist

$$\left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\right)\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\gamma+\beta}{\alpha}\cdot\frac{\alpha}{\delta} = \frac{\gamma+\beta}{\delta} = \frac{\gamma}{\delta} + \frac{\beta}{\delta} = \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\alpha}{\delta} + \frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha}{\delta}.$$

Ebenso kann man, wenigstens unter derselben Bedingung der Collinearität*, beweisen, dass

$$\text{II.}\ldots (q' - q)q'' = q'q'' - qq''.$$

Operirt man mit der Charakteristik K an den beiden Gleichungen und beachtet 192, II., und 195, II., so findet man, dass

$$\text{III.}\ldots Kq''.(Kq' + Kq) = Kq''.Kq' + Kq''.Kq;$$
$$\text{IV.}\ldots Kq''.(Kq' - Kq) = Kq''.Kq' - Kq''.Kq;$$

wo [nach 209, (5.)] die drei Conjugirten beliebiger collinearer Quaternionen, Kq, Kq', Kq'', irgend drei collineare Quaternionen darstellen können. Wir haben daher, mit demselben Grad von Allgemeinheit wie vorher,

$$\text{V.}\ldots\ q''(q' + q) = q''q' + q''q;$$
$$\text{VI.}\ldots\ q''(q' - q) = q''q' - q''q.$$

Wenn dann q, q', q'', q''' irgend vier collineare Quaternionen sind, so können wir die Formel (die wieder mit der Algebra übereinstimmt) aufstellen:

$$\text{VII.}\ldots (q''' + q'')(q' + q) = q'''q' + q''q' + q'''q + q''q;$$

und ähnlich für irgend eine grössere Anzahl; so dass wir kurz schreiben können,

$$\text{VIII.}\ldots \Sigma q'.\Sigma q = \Sigma q'q,$$

wo

$$\Sigma q = q_1 + q_2 + \ldots + q_m,$$
$$\Sigma q' = q'_1 + q'_2 + \ldots + q'_n,$$

und

$$\Sigma q'q = q'_1q_1 + \ldots q'_1q_m + q'_2q_1 + \ldots + q'_nq_m;$$

m und n sind irgend welche positiven ganzen Zahlen. In Worten (vergl. 13), die Multiplication collinearer** Quaternionen ist eine doppelt distributive Operation.

---

* Wir werden indessen bald sehn, dass diese Bedingung unnöthig ist.

** Diese distributive Eigenschaft der Multiplication werden wir bald (vergleiche die letzte Anmerkung) auf den allgemeineren Fall ausdehnen, wenn die Quaternionen nicht collinear sind.

(1.) Daher haben wir, nach 209, (4.), und 202, III., die allgemeine Transformation für das Product irgend zweier Quaternionen:

$$\text{IX.}\ldots\ q'q = Sq'.Sq + Vq'.Sq + Sq'.Vq + Vq'.Vq.$$

(2.) Daher haben wir auch, für das Quadrat irgend eines Quaternions, die Transformation (vergl. 126; 199, VII.; und 204, XXIII.):

$$\text{X.}\ldots\ q^2 = Sq^2 + 2\,Sq.Vq + Vq^2.$$

(3.) Trennt man die skalar und rechten Theile des letzten Ausdrucks, so findet man die weiteren allgemeinen Formeln:

$$\text{XI.}\ldots\ S.q^2 = Sq^2 + Vq^2;\quad \text{XII.}\ldots\ V.q^2 = 2\,Sq.Vq;$$

und danach haben wir, wenn man mit Tq^2 dividirt,

$$\text{XIII.}\ldots\ SU(q^2) = (SUq)^2 + (VUq)^2;$$
$$\text{XIV.}\ldots\ VU(q^2) = 2\,SUq.VUq.$$

(4.) Nimmt man an, dass in IX. $q' = Kq$, und daher $Sq' = Sq$, $Vq' = -Vq$, und stellt die beiden conjugirten und daher complanaren Factoren [vergl. 191, (1.)] um, so erhalten wir die allgemeine Transformation für eine Norm, oder für das Quadrat eines Tensors (vergl. 190, V.; 202, III., und 204, XI.):

$$\text{XV.}\ldots\ Tq^2 = Nq = qKq = (Sq + Vq)(Sq - Vq)$$
$$= Sq^2 - Vq^2;$$

sie hat sich in der That schon von selbst vorher (in 204, XXII.) ergeben, aber wir haben sie hier auf einem neuen Wege erhalten, und ohne irgend welche Anwendung von Sinus oder Cosinus, oder auch nur des bekannten Satzes über das Quadrat der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks.

(5.) Eliminirt man Vq^2, nach XV., aus XI., und dividirt durch Tq^2, so finden wir, dass

$$\text{XVI.}\ldots\ S.q^2 = 2\,Sq^2 - Tq^2;$$
$$\text{XVII.}\ldots\ SU(q^2) = 2\,(SUq)^2 - 1;$$

und das stimmt mit 199, VI. und IV., überein, wurde aber hier erhalten, ohne die bekannte Formel für den Cosinus des Doppelten eines Winkels irgendwie zu benutzen.

Digitized by Google

(6.) Nimmt man die skalar und rechten Theile des Ausdrucks IX., so erhalten wir die weiteren allgemeinen Ausdrücke,

$$\text{XVIII.}\ldots\ Sq'q = Sq' \,.\, Sq + S(Vq' \,.\, Vq);$$
$$\text{XIX.}\ldots\ Vq'q = Vq' \,.\, Sq + Vq \,.\, Sq' + V(Vq' \,.\, Vq).$$

(7.) Wenn wir, in VII., annehmen, dass $q'' = Kq$, $q''' = Kq'$, und die beiden complanaren (weil conjugirten) Factoren, $q' + q$ und $K(q' + q)$, vertauschen [vergl. (4.)], so erhalten wir den folgenden allgemeinen Ausdruck für die Norm einer Summe:

$$(q' + q)\, K(q' + q) = q'\, Kq' + q Kq' + q'\, Kq + q\, Kq;$$

oder kurz,

$$\text{XX.}\ldots\ N(q' + q) = Nq' + 2\, S \,.\, q Kq' + Nq,$$

wie in 200, VII.; denn

$$q'\, Kq = K \,.\, q\, Kq',$$

nach 192, II., und

$$(1 + K) \,.\, Kq' = 2\, S \,.\, q\, Kq',$$

nach 196, II.′

(8.) Wenn man q' in x in XX. verwandelt, oder das Product von $q + x$ und $Kq + x$ bildet, wo x irgend ein Skalar ist, so findet man, dass

$$\text{XXI.}\ldots\ N(q + x) = Nq + 2x\, Sq + x^2,$$

wie in 200, VIII., und daraus, im besonderen Falle,

$$\text{XXI.}'\ldots\ N(q - 1) = Nq - 2\, Sq + 1,$$

wie in 200, II.

(9.) Setzt man $\beta : \alpha$ statt q, und multiplicirt mit dem Quadrat von $T\alpha$, so erhält man für irgend zwei Vectoren, α und β, die Formel,

$$\text{XXII.}\ldots\ T(\beta - \alpha)^2 = T\beta^2 - 2\, T\beta \,.\, T\alpha \,.\, SU\frac{\beta}{\alpha} + T\alpha^2,$$

in der $T\alpha^2$ bedeutet* $(T\alpha)^2$; denn (nach 190, und nach 196, IX.),

* Bis jetzt ist uns nicht gestattet, das Symbol $T\alpha^2$ auch als Bezeichnung für $T(\alpha^2)$ zu deuten; denn wir haben bis jetzt noch keine Deutung für das Quadrat eines Vectors festgesetzt, oder allgemein für das Product zweier Vectoren. Im dritten Theile der Elemente werde ich zeigen, dass ein solches Quadrat oder Product als ein Quaternion gedeutet werden kann; und dann werden wir finden (vergl. 190), dass

$$T(\alpha^2) = (T\alpha)^2 = T\alpha^2,$$

was für ein Vector α auch sein mag.

Digitized by Google

$$N\left(\frac{\beta}{\alpha} - 1\right) = N\frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \left(\frac{T(\beta - \alpha)}{T\alpha}\right)^2,$$

und

$$S\frac{\beta}{\alpha} = \frac{T\beta}{T\alpha} S U\frac{\beta}{\alpha}.$$

(10.) In irgend einem ebnen Dreieck ABC, dessen Seitenlängen, wie üblich, mit a, b, c bezeichnet werden mögen, nehme man die Ecke C als Anfangspunkt O der Vectoren; dann ist:

$$\alpha = CA, \quad \beta = CB, \quad \beta - \alpha = AB,$$
$$T\alpha = b, \quad T\beta = a, \quad T(\beta - \alpha) = c,$$
$$S U\frac{\beta}{\alpha} = \cos C;$$

daher erhalten wir, aus XXII., die Grundformel der ebnen Trigonometrie wieder, unter der Form,

$$\text{XXIII.} \ldots \quad c^2 = a^2 - 2ab\cos C + b^2.$$

(11.) Es ist von Wichtigkeit, zu beachten, dass wir hier keinen Zirkelschluss gemacht haben; denn obwohl wir, in Art. 200, mit Rücksicht auf den Leser, eine vorläufige Kenntniss der zuletzt hingeschriebenen Formel annahmen, um schneller zu gewissen Anwendungen zu gelangen, so haben wir doch jetzt in den letzten Folgerungen aus der distributiven Eigenschaft VIII. der Multiplication (wenigstens) collinearer Quaternionen Nichts auf die Ergebnisse jenes vorigen Artikels gegründet; und wir haben keinen Gebrauch von irgend welchen Eigenschaften schiefwinkliger Dreiecke, oder auch nur rechtwinkliger, gemacht, denn der Satz über das Quadrat der Hypotenuse ist eigentlich in (4.) von Neuem bewiesen worden; und es ist für unser Schlussverfahren nicht nothwendig, irgend welche Eigenschaften der trigonometrischen Functionen zu kennen, ausser der blossen Definition eines Cosinus, als eines gewissen Projectionsfactors, aus der die Formel 196, XVI. abgeleitet wurde, und die uns berechtigt, $\cos C$ in der letzten Gleichung (10.) zu schreiben. Die geometrischen Beispiele in den Nebenartikeln zu 200 können daher wieder durchgelesen und ihre Richtigkeit von Neuem eingesehn werden, ohne dass irgend welche Berufung auch nur auf die ebne Trigonometrie jetzt angenommen worden wäre.

(12.) Die Formel XV. ergiebt $Sq^2 = Tq^2 + Vq^2$, wie in

Digitized by Google

204, XXXI.; und wir wissen, dass Vq^2, da es im Allgemeinen das Quadrat eines rechten Quaternions ist, gleich einem negativen Skalar (vergl. 204, VI.) ist, so dass

XXIV. . . $Vq^2 < 0$, wenn nicht $\angle q = 0$, oder $= \pi$;

in jedem dieser beiden Fälle ist $Vq = 0$, nach 202, (6.), und daher verschwindet sein Quadrat; daher ist

$$\text{XXV. . . } Sq^2 < Tq^2, \qquad (SUq)^2 < 1,$$

in jedem andern Falle.

(13.) Es hätte somit auf diesem Wege bewiesen werden können, ohne irgend welche Benutzung der Transformation $SUq = \cos \angle q$ (196, XVI.), dass wir (für irgend einen reellen Quaternion q) die Ungleichheiten haben,

$$\text{XXVI. . . } SUq < +1, \qquad SUq > -1,$$

und

$$Sq < +Tq, \qquad Sq > -Tq,$$

wenn nicht zufällig $\angle q = 0$, oder $= \pi$ ist; denn dann ist $SUq = +1$, und $Sq = +Tq$ im ersten Falle; während $SUq = -1$, und $Sq = -Tq$ im zweiten Falle ist.

(14.) Da $Tq^2 = Nq$, und $Tq \,.\, Tq' = T.q\,Kq' = T.q'\,Kq = Nq \,.\, T(q' : q)$, während $S.q\,Kq' = S.q'Kq = Nq \,.\, S(q' : q)$, so ergiebt die Formel XX., nach XXVI.,

$$\text{XXVII. . . } (Tq' + Tq)^2 - T(q' + q)^2 = 2(T - S)\,q\,Kq' = 2\,Nq \,.\, (T - S)(q' : q) > 0,$$

wenn wir die abgekürzte Bezeichnung,

$$\text{XXVIII. . . } Tq - Sq = (T - S)q,$$

annehmen und voraussetzen, dass der Quotient $q' : q$ kein positiver Skalar ist; daher ist,

XXIX. . . $Tq' + Tq > T(q' + q)$, wenn nicht $q' = xq$ und $x > 0$;

in diesem Ausnahmefalle wird jedes Glied der letzten Ungleichheit $= (1 + x)\,Tq$.

(15.) Schreibt man $q = \beta : \alpha$, $q' = \gamma : \alpha$, und multiplicirt mit $T\alpha$, so wird die Formel XXIX.,

XXX. . . $T\gamma + T\beta > T(\gamma + \beta)$, wenn nicht $\gamma = x\beta$, $x > 0$;

in diesem letzteren Falle, aber in keinem anderen, haben wir $U\gamma = U\beta$ (155). Wir kommen daher von Neuem zu den Ergebnissen von 186, (9.), (10.), aber ohne dass wir nöthig gehabt hätten, irgend ein Dreieck in Betracht zu ziehn, wie wir es in jenen vorigen Nebenartikeln gethan haben.

(16.) Andrerseits haben wir, mit einer entsprechenden abkürzenden Bezeichnung, nach XXVI.,

XXXI. . . $Tq + Sq = (T + S)q > 0$, wenn nicht $\angle q = \pi$;

es ist auch, nach XX., u. s. w.

XXXII. . . $T(q' + q)^2 - (Tq' - Tq)^2 = 2(T+S)qKq$
$= 2Nq \,.\, (T+S)(q' : q)$;

daher ist,

XXXIII. . . $T(q' + q) > \pm(Tq' - Tq)$, wenn nicht $q' = -xq$, $x > 0$;

wo das eine oder das andere Zeichen genommen werden kann.

(17.) Und daher ist, im Sinne von (15.), für irgend zwei Vectoren β, γ,

XXXIV. . . $T(\gamma + \beta) > \pm(T\gamma - T\beta)$, wenn nicht $U\gamma = -U\beta$,

welches Vorzeichen auch immer genommen werden mag; dagegen ist aber,

XXXV. . . $T(\gamma + \beta) = \pm(T\gamma - T\beta)$, wenn $U\gamma = -U\beta$,

und das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $T\gamma$ $>$ oder $<$ $T\beta$; und das stimmt alles mit dem überein, was wir in 186, (11.) nur aus geometrischen Betrachtungen erschlossen, in Verbindung mit der Definition von $T\alpha$. In der That, wenn wir $\beta = OB$, $\gamma = OC$, und $-\gamma = OC'$ machen, dann wird OBC' im Allgemeinen ein ebnes Dreieck, in dem die Länge der Seite BC' den Unterschied der Längen der beiden anderen Seiten übertrifft; aber wenn zufällig die Richtungen der beiden Linien OB, OC' zusammenfallen, oder mit anderen Worten, wenn die Linien OB, OC entgegengesetzte Richtungen haben, dann wird die Differenz der Längen dieser beiden Linien gleich der Länge der Linie BC'.

(18.) Bei den Darstellungen von q und q' durch zwei Seiten

Digitized by Google

eines sphärischen Dreiecks ABC, die in 208, (1.) angegeben wurden, haben wir die Werthe,

$$Sq = \cos c, \quad Sq' = \cos a, \quad Sq'q = S(\gamma : \alpha) = \cos b;$$

die Gleichung XVIII. ergiebt daher, nach 208, XXIV., die Grundformel der sphärischen Trigonometrie [vergl. (10.)] wie folgt:

XXXVI. . . $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$.

(19.) Um mit Beziehung auf dasselbe sphärische Dreieck die mit ihr verbundene Gleichung XIX. oder XIX′. zu deuten, wollen wir jetzt annehmen, wie in 208, (5.), dass die Drehung um B von C nach A positiv ist, so dass B und B' auf derselben Seite des Bogens CA liegen, wenn B' wieder, wie in 208, (2.), der positive Pol des Bogens ist. Schreibt man dann, $\alpha' = OA'$, u. s. w., so haben wir

$$IVq = \gamma' \sin c; \quad IVq' = \alpha' \sin a; \quad IVq'q = -\beta' \sin b;$$

und

$$IV(Vq'.Vq) = -\beta \sin a \sin c \sin B \text{ [vergl. 208, (5.)]},$$

und die vorigen Werthe (18.) für Sq und Sq'; somit wird die Formel XIX′., nach Umstellung der beiden zuletzt hingeschriebenen Glieder:

XXXVII. . . $\beta \sin a \sin c \sin B = \alpha' \sin a \cos c + \beta' \sin b + \gamma' \sin c \cos a$.

(20.) Es sei $\varrho = OP$ irgend ein Einheitsvector; dividirt man dann jedes Glied der letzten Gleichung mit ϱ und nimmt den Skalar eines jeden der vier Quotienten, so haben wir, nach 196, XVI., die neue Gleichung:

XXXVIII. . . $\sin a \sin c \sin B \cos PB = \sin a \cos c \cos PA' + \sin b \cos PB' + \sin c \cos a \cos PC'$;

wo a, b, c wie gewöhnlich die Seiten des sphärischen Dreiecks ABC sind, und A', B', C' wieder, wie in 208, (2.), die positiven Pole dieser Seiten; P ist dagegen ein beliebiger Punkt auf der Oberfläche der Kugel. Ferner sind $\cos PA'$, $\cos PB'$, $\cos PC'$ augenscheinlich die Sinus der Bogenlothe, die von diesem Punkte auf die Seiten gefällt sind; sie sind positiv, wenn P, in Bezug auf sie, auf denselben Halbkugeln liegt, wie die gegenüber liegenden Ecken des Dreiecks, und negativ im

entgegengesetzten Falle; so dass cos AA', u. s. w., positiv, und die Sinus der drei Höhen des Dreiecks sind.

(21.) Wenn wir P an die Stelle von B setzen, so verschwinden zwei von diesen Lothen, und die letzte Formel wird, nach 208, XXVIII.,

$$\text{XXXIX.}\ldots \sin b \cos BB' = \sin a \sin c \sin B = TV\left(V\frac{\gamma}{\beta} \cdot V\frac{\beta}{\alpha}\right);$$

das ist also der quaternion Ausdruck für das Product des Sinus der Seite CA, multiplicirt mit dem Sinus des Lothes, das von der gegenüber liegenden Ecke B auf die Seite gefällt ist.

(22.) Setzt man P an die Stelle von A, dividirt mit sin a cos c und vertauscht dann B und C, so erhalten wir die weitere Grundformel der sphärischen Trigonometrie,

$$\text{XL.}\ldots \cos AA' = \sin c \sin B = \sin b \sin C;$$

und wir sehn, dass sie in der Deutung der quaternion Gleichung XIX., oder XIX′., enthalten ist, ebenso, wie wir in (18.) sahn, dass die Formel XXXVI. die Deutung der mit ihr verbundenen Gleichung XVIII. war.

(23.) Wenn man dem Punkte P andere Lagen giebt, kann man andere Formeln der sphärischen Trigonometrie aus der vorigen Gleichung XXXVIII. ableiten. Wenn wir so annehmen, dass P mit B' zusammenfällt und beachten, dass (in dem Supplementdreieck*),

$$B'C' = \pi - A, \quad C'A' = \pi - B, \quad A'B' = \pi - C,$$

ist, während

$$\cos BB' = \sin a \sin C = \sin c \sin A, \quad \text{nach XL.},$$

so können wir leicht die Formel ableiten,

$$\text{XLI.}\ldots \sin a \sin c \sin A \sin B \sin C = \sin B - \cos c \cos C \sin A - \cos a \cos A \sin C;$$

sie stimmt, wie leicht ersichtlich, in der Grenzebne, mit der elementaren Relation,

$$A + B + C = \pi.$$

* Wir setzen hier keine vorläufige Kenntniss der sphärischen Trigonometrie im eigentlichen Sinne voraus; die supplementaren Beziehungen zweier Polardreiecke zu einander bilden besser einen Theil, und zwar einen sehr elementaren, der sphärischen Geometrie.

Digitized by Go

(24.) Ferner wird die allgemeine Gleichung, wenn wir P an Stelle von A' setzen,

XLII. . . $\sin a \cos c = \sin b \cos C + \sin c \cos a \cos B$;

und es lässt sich verificiren, dass in der Grenzebne,

$$a = b \cos C + c \cos B.$$

Aber wir können hier nicht bei solchen Ableitungen oder Verificationen verweilen; doch schien es mir von Werth, darauf aufmerksam zu machen, dass die ganze sphärische Trigonometrie in dieser Weise aus der Grundgleichung der Multiplication von Quaternionen (107) entwickelt werden kann, wenn man an dieser Gleichung mit den beiden Characteristiken S und V operirt und die Resultate in der vorigen Weise deutet.

211. Ich werde in Folgendem zunächst beweisen, dass die distributive Formel I. des letzten Artikels auch statt hat, wenn die drei Quaternionen q, q', q'', die in ihr auftreten, rechte sind, ohne dass sie jetzt nothwendig collinear zu sein brauchen; in diesem Falle werden ihre Reciproken (135), und ihre Summen [197, (2.)] auch rechte sein. Es sei also

$$\angle q = \angle q' = \angle q'' = \frac{\pi}{2}, \qquad qq_1 = 1;$$

und daher

$$\angle q_1 = \angle (q'' + q') = \frac{\pi}{2}.$$

Wir haben dann, nach 106, 194, 206,

$$\begin{aligned}(q'' + q')\, q &= I(q'' + q') : Iq_1 \\ &= (Iq'' : Iq_1) + (Iq' : Iq_1) = q''q + q'q;\end{aligned}$$

und damit ist die fragliche distributive Eigenschaft bewiesen.

(1.) Nimmt man die Conjugirten wie in 210, so ist danach leicht zu schliessen, dass die zweite distributive Formel, 210, V., für irgend drei rechte Quaternionen statt hat; oder dass

$$q''(q'' + q') = qq'' + qq', \text{ wenn } \angle q = \angle q' = \angle q'' = \frac{\pi}{2}.$$

(2.) Für drei beliebige Quaternionen haben wir daher die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}(Vq'' + Vq').\, Vq &= Vq''.\, Vq + Vq'.\, Vq; \\ Vq.(Vq'' + Vq') &= Vq.\, Vq'' + Vq.\, Vq'.\end{aligned}$$

(3.) Wenn die Quaternionen q, q', q'' wieder ganz beliebige sind, so haben wir, nach 210, IX.,

$$\begin{aligned}(q''+q')q &= (Sq''+Sq').Sq+(Vq''+Vq').Sq+Vq''.(Sq''+Sq')\\ &\quad +(Vq''+Vq').Vq\\ &= (Sq''.Sq+Vq''.Sq+Vq.Sq''+Vq''.Vq)+(Sq'.Sq\\ &\quad +Vq'.Sq+Vq.Sq'+Vq'.Vq)\\ &= q''q+q'q;\end{aligned}$$

so dass die Formel 210, I., und daher auch (durch die Conjugirten) die Formel 210, V., allgemein gültig ist.

212. Die allgemeine* Multiplication von Quaternionen ist daher (vergl. 13, 210) eine doppelt distributive Operation, so dass wir die Formel (vergl. 210, VIII.),

$$\text{I.}\ldots \Sigma q'.\Sigma q = \Sigma q'q,$$

allgemein auf Quaternionen ausdehnen können, wie viele Summanden auch unter jedem Summenzeichen enthalten sein mögen, und mögen sie collinear (209), oder rechte (211) sein, oder nicht.

(1.) Daher haben wir jetzt, als eine Erweiterung von 210, XX.,

$$\text{II.}\ldots N\Sigma q = \Sigma Nq + 2\Sigma Sq\,Kq';$$

wo sich das zweite Summenzeichen auf alle möglichen binären Combinationen der Quaternionen $q, q'\ldots$ erstreckt.

(2.) Und als eine Erweiterung von 210, XXIX. haben wir die Ungleichheit,

$$\text{III.}\ldots \Sigma Tq > T\Sigma q,$$

wenn nicht a l l e die Quaternionen $q, q'\ldots$ in skalaren und positiven Verhältnissen zu einander stehn; denn in diesem Falle werden die beiden Glieder der Ungleichheit gleich; in jedem andern Falle ist die Summe der Tensoren irgend einer Reihe von Quaternionen grösser als der Tensor der Summe.

(3.) Im Allgemeinen ist, als eine Erweiterung von 210, XXVII.,

$$\text{IV.}\ldots (\Sigma Tq)^2-(T\Sigma q)^2 = 2\Sigma(T-S)q\,Kq'.$$

* Vergleiche die Anmerkungen auf Seite 269.

Digitized by Google

(4.) Die Formeln 210, XVIII., XIX., gestatten leicht entsprechende Erweiterungen.

(5.) Wir haben auch (vergl. 168) die allgemeine Gleichung,

$$\text{V.}\ldots\ (\Sigma q)^2 - \Sigma(q^2) = \Sigma(qq' + q'q);$$

in ihr ist, nach 210, IX.,

$$\text{VI.}\ldots\ qq' + q'q = 2[Sq\,.\,Sq' + Vq\,.\,Sq' + Vq'\,.\,Sq + S(Vq'\,.\,Vq)];$$

denn, nach 208, haben wir allgemein

$$\text{VII.}\ldots\ V(Vq'\,.\,Vq) = -\,V(Vq\,.\,Vq');$$

oder

$$\text{VIII.}\ldots\ Vq'q = -\,Vqq', \quad \text{wenn } \angle q = \angle q' = \frac{\pi}{2}.$$

[Vergl. 191, (2.) und 204, X.]

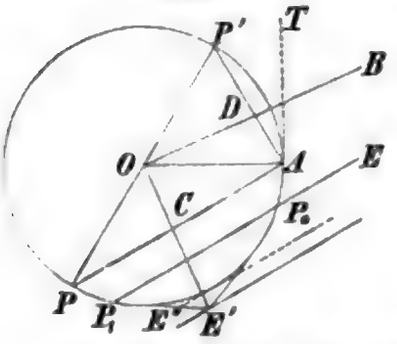
213. Ausser dem Vortheil, den die Quaternionenrechnung aus der allgemeinen Aufstellung (212) des distributiven Princips, oder der distributiven Eigenschaft der Multiplication zieht, insofern sie dadurch mit der Algebra in Uebereinstimmung gebracht wird, in Verfahren, die beständig vorkommen, erweist sich dieser Grundsatz oder diese Eigenschaft auch von grosser Wichtigkeit bei den Anwendungen dieser Rechnung auf die Geometrie; und besonders in Fragen, welche die (reellen oder idealen*) Durchschnitte grader Linien mit Kugeln, oder andern Oberflächen zweiter Ordnung, betreffen, wobei Berührungen (reelle oder ideale) als Grenzfälle solcher Durchschnitte eingeschlossen sind. Die folgenden Beispiele mögen dazu dienen, einige Anschauung davon zu geben, wie sich das allgemeine distributive Princip auf solche Fragen anwenden lässt; in einigen von ihnen würde auch das weniger allgemeine Princip (210), in Betreff der Multiplication collinearer Quaternionen (209), genügend sein. Und zuerst wollen wir als Beispiel die Sehnen einer Kugel nehmen, die von einem auf ihrer Oberfläche gegebenen Punkte aus gezogen sind.

(1.) Von einem Punkte A einer Kugel mit dem Mittelpunkt O soll eine Sehne AP gezogen werden, die einer

* Vergleiche die Anmerkungen auf Seite 112, 113, u. s. w.

gegebenen Linie OB parallel ist; oder vollständiger, es soll der Vector, $\varrho = OP$, des Endpunktes der so gezogenen Sehne als eine Function der beiden gegebenen Vectoren, $\alpha = OA$ und $\beta = OB$, bestimmt werden; oder besser als eine Function von α und $U\beta$, da augenscheinlich die Länge der Linie β das Ergebniss der Construction nicht beeinflussen kann; die Figur 51 mag als Erläuterung dienen.

Fig. 51.



(2.) Da $AP \parallel OB$, oder $\varrho - \alpha \parallel \beta$, so können wir damit anfangen, den Ausdruck hinzuschreiben,

$$\varrho = \alpha + x\beta \quad (15),$$

der als eine Form der Gleichung der graden Linie AP betrachtet werden mag (vergl. 23, 99); und in dem der skalar Coëfficient x noch so bestimmt werden muss, dass er der Gleichung der Kugel,

$$T\varrho = T\alpha \quad [186, (2.)],$$

genügt. In Kürze, wir suchen der Gleichung,

$$T(\alpha + x\beta) = T\alpha,$$

durch einen Skalar x zu genügen, der (im Allgemeinen) von Null verschieden sein wird; und wollen dann diesen Skalar in den Ausdruck $\varrho = \alpha + x\beta$ einsetzen, um den gesuchten Vector ϱ zu bestimmen.

(3.) Zu diesem Zwecke ist es ein leichtverständliches Verfahren, nachdem man beide Seiten mit $T\beta$ dividirt hat, zu quadriren und die Formel 210, XXI. anzuwenden, die uns schon vorher, wie in 200, VIII., begegnet ist, aber dort nicht als eine Folge der distributiven Eigenschaft der Multiplication. In dieser Weise werden wir zu einer quadratischen Gleichung geführt, die sich durch x dividiren lässt und dann ergiebt,

$$x = -2S\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \varrho = \alpha - 2\beta S\frac{\alpha}{\beta};$$

das Problem (1.) ist somit gelöst, und es lässt sich verificiren, dass β wieder durch $U\beta$ ersetzt werden kann in dem resultirenden Ausdruck für ϱ.

Digitized by Google

(4.) Als eine reine Uebung im Rechnen können wir das letzte Verfahren (3.) abändern, indem wir die letzte Gleichung (2.) mit $T\alpha$ dividiren, anstatt mit $T\beta$, und dann wie vorher vorgehn. Dies letztere Verfahren ergiebt,

$$1 = N\left(1 + x\frac{\beta}{\alpha}\right) = 1 + 2x\,S\frac{\beta}{\alpha} + x^2 N\frac{\beta}{\alpha};$$

und daher,

$x = -2\,S\frac{\beta}{\alpha} : N\frac{\beta}{\alpha} = -2\,S\frac{\alpha}{\beta}$ (nach 196, XII.'), wie vorher.

(5.) Im Allgemeinen ist, nach 196, II.',

$$1 - 2S = -K;$$

folglich, nach (3.),

$$\frac{\varrho}{\beta} = -K\frac{\alpha}{\beta};$$

und endlich,

$$\varrho = -K\frac{\alpha}{\beta}.\beta;$$

ein neuer Ausdruck für ϱ, in dem es nicht allgemein erlaubt ist, wie es in (3.) der Fall war, den Vector β als Multiplicator* zu behandeln, anstatt als Multiplicandus.

(6.) Es ist jetzt leicht zu sehn, dass der zweiten Gleichung in (2.) genügt ist; denn der Ausdruck (5.) für ϱ ergiebt (nach 186, 187, u. s. w.),

$$T\varrho = T\frac{\alpha}{\beta}\,.\,T\beta = T\alpha,$$

wie gefordert wird.

(7.) Um die Lösung (3.) zu deuten, sei C in Fig. 51 der Mittelpunkt der Sehne AP, und D der Fusspunkt des Lothes, das von A auf OB gefällt ist; dann ergiebt der Ausdruck (3.) für ϱ, nach 196, XIX.,

$$CA = \tfrac{1}{2}(\alpha - \varrho) = \beta\,S\frac{\alpha}{\beta} = OD;$$

und demnach ist $OCAD$ ein Parallelogramm.

(8.) Um den Ausdruck (5.) zu deuten, der ergiebt,

$$\frac{-\varrho}{\beta} = K\frac{\alpha}{\beta},$$

oder

$$\frac{OP'}{OB} = K\frac{OA}{OB},$$

wenn

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 204.

Digitized by Google

$$OP' = PO,$$

haben wir nur zu beachten (vergl. 138), dass der Winkel AOP' im Innern, oder der Supplementwinkel AOP aussen, durch die unbegrenzte grade Linie OB (siehe wieder Fig. 51) halbirt wird.

(9.) Umgekehrt, die geometrischen Betrachtungen, die uns in (7.) und (8.) dazu gedient haben, die beiden Formen der Lösung (3.), (5.) zu deuten oder zu verificiren, hätten auch angewendet werden können, diese beiden Formen abzuleiten, wenn wir nicht gesehn hätten, wie sie durch Rechnungsregeln aus den vorgeschlagenen Bedingungen der Aufgabe zu erhalten wären. (Vergl. 145, (10.), u. s. w.).

(10.) Es ist, nach der Natur der Frage, augenscheinlich, dass α aus β und ϱ genau abzuleiten sein muss durch dieselben Verfahren, wie diejenigen sind, die uns dazu gedient haben, ϱ aus β und α abzuleiten. Demnach ergiebt die Form (3.) von ϱ,

$$S\frac{\varrho}{\beta} = -S\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \alpha = \varrho + 2\beta S\frac{\alpha}{\beta} = \varrho - 2\beta S\frac{\varrho}{\beta};$$

und die Form (5.) ergiebt,

$$K\frac{\varrho}{\beta} = -\frac{\alpha}{\beta}, \qquad \alpha = -K\frac{\varrho}{\beta}.\beta.$$

Und da die erste Form aus der zweiten wieder erhalten werden kann, so sehn wir, dass uns jede wieder zu dem Parallelismus $\varrho - \alpha \parallel \beta$ (2.) zurückführt.

(11.) Die Lösung (3.) für x zeigt, dass

$$x = 0, \quad \varrho = \alpha, \quad P = A,$$

wenn

$$S(\alpha : \beta) = 0,$$

oder wenn

$$\beta \perp \alpha.$$

Und die geometrische Bedeutung dieses Resultats ist leicht verständlich; nämlich dass eine grade Linie, die von dem Endpunkt eines Radius OA einer Kugel aus so gezogen ist, dass sie senkrecht zu diesem Radius ist, die Kugel, (streng genommen) nicht schneidet, sondern sie berührt; ihr zweiter Schnittpunkt mit der Oberfläche fällt in diesem Falle, als Grenzfall, mit dem ersten zusammen.

(12.) Daher können wir folgern, dass die Ebne, welche durch die Gleichung,

Digitized by Google

$$S\frac{\varrho-\alpha}{\alpha}=0, \quad \text{oder} \quad S\frac{\varrho}{\alpha}=1,$$

dargestellt wird, die Tangentialebne [vergl. 196, (5.)] zu der hier betrachteten Kugel, im Punkte A, ist.

(13.) Da β durch irgend einen ihm parallelen Vector ersetzt werden kann, so können wir ihn durch $\gamma-\alpha$ ersetzen, wenn $\gamma=OC$ der Vector irgend eines gegebenen Punktes C auf der Sehne AP ist, entweder des Mittelpunktes (wie in Fig. 51), oder eines anderen. Wir können daher schreiben, nach (3.) und (5.),

$$\varrho=\alpha-2(\gamma-\alpha)\,S\frac{\alpha}{\gamma-\alpha}=-K\frac{\alpha}{\gamma-\alpha}\,.(\gamma-\alpha).$$

214. In den Beispielen des vorhergehenden Artikels war keine Gelegenheit gegeben, auf imaginäre Wurzeln einer Gleichung zu kommen, oder auf ideale Durchschnitte einer Linie und einer Oberfläche. Um jetzt einen Fall zu geben, in dem solche imaginäre Durchschnitte vorkommen können, wollen wir dazu übergehn, die Frage zu behandeln, eine Secante zu einer Kugel in einer gegebenen Richtung von einem gegebenen äusseren Punkte aus zu ziehn; die vorige Figur 51 möge uns wieder zur Erläuterung dienen.

(1.) Wir wollen also annehmen, dass ε der Vector irgend eines gegebenen Punktes E sei, durch den eine Sehne oder Secante EP_0P_1 parallel zu derselben gegebenen Linie β gezogen werden soll, wie vorher. Wir haben jetzt, wenn $\varrho_0=OP_0$,

$$\varrho_0=\varepsilon+x_0\beta,$$
$$T\alpha=T\varrho_0=T(\varepsilon+x_0\beta),$$
$$x_0^2+2x_0S\frac{\varepsilon}{\beta}+N\frac{\varepsilon}{\beta}-N\frac{\alpha}{\beta}=0,$$
$$x_0=-S\frac{\varepsilon}{\beta}\mp\sqrt{\left\{\left(T\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(V\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^2\right\}},$$

wo x_0 ein neuer Skalar ist; und ähnlich ist, wenn, $\varrho_1=OP_1$,

$$\varrho_1=\varepsilon+x_1\beta,$$
$$x_1=-S\frac{\varepsilon}{\beta}\pm\sqrt{\left\{\left(T\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(V\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^2\right\}},$$

durch Transformationen,* die einem Jeden leicht einfallen

* Es scheint mir auf der gegenwärtigen Stufe nicht mehr nothwendig, durch so viele Hinweise auf frühere Artikel oder Nebenartikel dem Leser zu Hülfe zu kommen, wie ich sie bis jetzt zu geben für nütz-

werden, der die früheren Artikel mit Aufmerksamkeit gelesen hat. Und die Punkte P_0, P_1 werden beide reell, oder beide imaginär sein, je nachdem die Grösse unter dem Wurzelzeichen positiv oder negativ ist; das heisst, je nachdem wir die eine oder die andere der beiden folgenden Ungleichheiten haben,

$$T\frac{\alpha}{\beta} > \text{ oder } < TV\frac{\varepsilon}{\beta}.$$

(2.) Die Gleichung [vergl. 203, (5.)],

$$TV\frac{\varrho}{\beta} = T\frac{\alpha}{\beta},$$

oder

$$\left(T\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(V\frac{\varrho}{\beta}\right)^2 = 0,$$

stellt einen Umdrehungscylinder dar, dessen Achse OB ist, und dessen Basis einen Radius gleich $T\alpha$ hat. Wenn E ein Punkt der Oberfläche des Cylinders ist, verschwindet die Grösse unter dem Wurzelzeichen in (1.), und die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung, x_0, x_1 werden gleich. In diesem Falle berührt dann die Linie durch E, welche zu OB parallel ist, die gegebene Kugel; und das ist ja auch anderweitig geometrisch einleuchtend, da der Cylinder die Kugel umhüllt [vergl. 204, (12.)], und die Linie eine seiner Erzeugenden ist. Wenn E im Innern des Cylinders liegt, so sind die Durchschnittspunkte P_0, P_1 reell; aber wenn E ausserhalb seiner Oberfläche liegt, dann sind diese Durchschnitte ideal, oder imaginär.

(3.) Wenn wir, in dem letzteren Falle, zur Abkürzung setzen,

$$s = -S\frac{\varepsilon}{\beta}, \text{ und } t = \sqrt{\left\{\left(TV\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^2 - \left(T\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right\}},$$

wo s und t also zwei gegebene und reelle Skalare sind, so können wir schreiben,

$$x_0 = s - t\sqrt{-1}; \qquad x_1 = s + t\sqrt{-1};$$

$\sqrt{-1}$ ist hier das bekannte und gewöhnliche imaginäre Zeichen der Algebra, und ist hier mit keinerlei Art geometrischer Be-

lich hielt; doch mögen sie immerhin noch von Zeit zu Zeit gegeben werden.

Digitized by Google

deutung* behaftet. Wir drücken somit allein die Thatsache der Berechnung aus, dass (bei der vorigen Bedeutung der Zeichen α, β, ε, s und t) die Formel $T\alpha = T(\varepsilon + x\beta)$, (1.), wenn sie nach den Regeln für Quaternionen behandelt wird, zu der quadratischen Gleichung,

$$(x - s)^2 + t^2 = 0,$$

führt, die keine reellen Wurzeln hat; der Grund ist der, dass die grade Linie durch E, in diesem Falle, ganz ausserhalb der Kugel liegt, und sie daher reell überhaupt nicht schneidet; obwohl wir, um der Verallgemeinerung der Sprache willen, übereinkommen können zu sagen, wie üblich, die Linie schneide die Kugel in zwei imaginären Punkten.

(4.) Wir müssen indessen dann, der Folgerichtigkeit des symbolischen Ausdrucks wegen, diese beiden idealen Punkte so ansehn, als ob sie bestimmte, aber imaginäre Vectoren haben, nämlich die beiden folgenden:

$$\varrho_0 = \varepsilon + s\beta - t\beta\sqrt{-1}, \qquad \varrho_1 = \varepsilon + s\beta + t\beta\sqrt{-1};$$

es ist leicht zu beweisen, dass in ihnen 1) der reelle Theil $\varepsilon + s\beta$ der Vector ε' des Fusspunktes E' des Lothes ist, das vom Mittelpunkt O auf die Linie durch E gefällt ist, welche wie vorher parallel zu OB gezogen ist; und dass 2) der reelle Tensor $tT\beta$ des Coëfficienten von $\sqrt{-1}$ in dem imaginären Theil jedes Ausdrucks die Länge einer Tangente $E'E''$ an die Kugel darstellt, die von dem äusseren Punkte, oder dem Fusspunkte, E'' gezogen ist.

(5.) In der That, wenn wir schreiben,

$$OE' = \varepsilon' = \varepsilon + s\beta,$$

so haben wir

$$E'E = \varepsilon - \varepsilon' = -s\beta = \beta S\frac{\varepsilon}{\beta} = \text{der Projection von } OE \text{ auf } OB;$$

und das beweist die erste Behauptung (4.), mögen die Punkte P_0, P_1 reell oder imaginär sein. Und da

$$\left(T\frac{\varepsilon'}{\beta}\right)^2 = N\frac{\varepsilon'}{\beta} = N\left(\frac{\varepsilon}{\beta} + s\right) = N\frac{\varepsilon}{\beta} + 2sS\frac{\varepsilon}{\beta} + s^2$$
$$= \left(T\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^2 = \left(TV\frac{\varepsilon}{\beta}\right)^2 = t^2 + \left(T\frac{\alpha}{\beta}\right)^2,$$

* Vergleiche wieder die Anmerkungen zu Seite 112, 113, und Art. 149.

so haben wir, für den Fall imaginärer Durchschnitte,

$$t T\beta = \sqrt{(T\varepsilon'^2 - T\alpha^2)} = T.E'E'',$$

und die zweite Behauptung (4.) ist gerechtfertigt.

(6.) Ein Ausdruck von der Form (4.), oder von der folgenden Form,

$$\varrho' = \beta + \sqrt{-1}\,\gamma,$$

in dem β und γ zwei reelle Vectoren sind, während $\sqrt{-1}$ die (skalar) Imaginäre der Algebra ist, und nicht ein Symbol für einen geometrisch reellen rechten Versor (149, 153), kann ein Bivector heissen.

(7.) Ebenso kann ein Ausdruck von der Form (3.), oder $x' = s + t\sqrt{-1}$, in dem s und t zwei reelle Skalare sind, aber $\sqrt{-1}$ wieder die gewöhnliche Imaginäre der Algebra, entsprechend ein Biskalar genannt werden. Imaginäre Wurzeln algebraischer Gleichungen sind somit, im Allgemeinen, Biskalare.

(8.) Und wenn ein Bivector (6.) durch einen (reellen) Vector dividirt wird, so kann der Quotient, wie z. B.

$$q' = \frac{\varrho'}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha}\sqrt{-1} = q_0 + q_1\sqrt{-1},$$

wo q_0 und q_1 zwei reelle Quaternionen sind, aber $\sqrt{-1}$, wie vorher, imaginär, ein Biquaternion* heissen.

215. Derselbe distributive Satz (212) kann in Untersuchungen über umschriebene Kegel angewandt werden und über Tangenten (reellen oder idealen), die von einem gegebenen Punkte an eine gegebene Kugel gezogen werden können.

(1.) Statt uns vorzustellen, dass O, A, B drei gegebene Punkte sind und dass Grenzlagen des Punktes E gesucht werden, wie in 214, (2.), die reelle Schnittpunkte P_0, P_1 möglich machen, können wir annehmen, dass O, A, E (die wir als collinear annehmen können, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, da von α nur sein Tensor vorkommt) jetzt gegeben seien, und dass wir die Grenzrichtungen der Linie

* Vergleiche die zweite Anmerkung auf Seite 169.

Digitized by Google

OB zu bestimmen suchen sollen, die dieselbe Reelität ergeben; EP_0P_1 ist wieder parallel zu OB gezogen, wie in 214, (1.).

(2.) Dividirt man die Gleichung $T\alpha = T(\varepsilon + x\beta)$ durch $T\varepsilon$, und quadrirt, so haben wir

$$N\tfrac{\alpha}{\varepsilon} = \left[N\left(1 + x\tfrac{\beta}{\varepsilon}\right)\right] = 1 + 2xS\tfrac{\beta}{\varepsilon} + x^2 N\tfrac{\beta}{\varepsilon};$$

die in x quadratische Gleichung kann daher in folgender Weise geschrieben werden,

$$\left(xT\tfrac{\beta}{\varepsilon} + SU\tfrac{\beta}{\varepsilon}\right)^2 = \left(T\tfrac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2 + \left(VU\tfrac{\beta}{\varepsilon}\right)^2;$$

und ihre Wurzeln sind reell und ungleich, oder reell und gleich, oder imaginär, je nachdem

$$TVU\tfrac{\beta}{\varepsilon} < \text{ oder } = \text{ oder } > T\tfrac{\alpha}{\varepsilon};$$

das heisst, je nachdem

$$\sin EOB < \text{ oder } = \text{ oder } > T.OA : T.OE.$$

(3.) Wenn E im Innern der Kugel liegt, dann ist $T\varepsilon < T\alpha$, $T(\alpha : \varepsilon) > 1$; doch $TVUq$ kann niemals die Einheit (nach 204, XIX., oder nach 210, XV., u. s. w.) übersteigen; wir haben daher, in diesem Falle, die erste der drei vorigen Alternativen, und die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung sind nothwendigerweise reell und ungleich, wie auch immer die Richtung von β sein mag. Demnach ist geometrisch augenscheinlich, dass jede unbegrenzte grade Linie, die durch einen Punkt im Innern geht, die Kugeloberfläche in zwei verschiedenen und reellen Punkten schneiden muss.

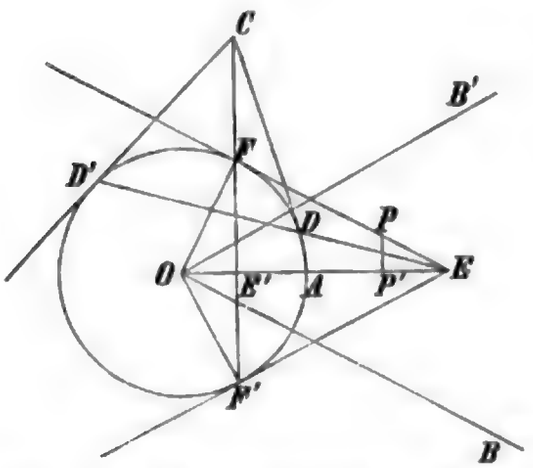
(4.) Wenn der Punkt E in der Oberfläche liegt, so dass $T\varepsilon = T\alpha$, $T(\alpha : \varepsilon) = 1$, dann bleibt die erste Alternative (2.) noch bestehn, ausser im Grenzfall, wenn $\beta \perp \varepsilon$, und daher $TVU(\beta : \varepsilon) = 1$; in diesem Falle haben wir die zweite Alternative. Eine Wurzel der quadratischen Gleichung in x ist jetzt $= 0$, für jede Richtung von β; und die andere Wurzel ist ebenfalls stets reell, nämlich $x = -2S(\varepsilon : \beta)$, aber sie verschwindet für den Fall, dass der Winkel EOB ein rechter ist. Kurz, wir haben hier dasselbe System von Sehnen und Tan-

Digitized by Google

genten von einem Punkte auf der Oberfläche aus, wie in 213; der einzige Unterschied ist der, dass wir jetzt E für A, oder ε für α schreiben.

(5.) Und endlich, wenn E ausserhalb der Kugel liegt, so dass $T\varepsilon > T\alpha$, und $T(\alpha:\varepsilon) < 1$, so kann $TVU(\beta:\varepsilon)$ entweder kürzer ausfallen als dieser letztere Tensor, oder ihm gleich sein, oder ihn übersteigen; so dass irgend eine der drei Alternativen (2.) vorkommen kann, je nachdem die Richtung von β sich ändert.

Fig. 52.



(6.) Um das Gesetz des Uebergangs von einer solchen Möglichkeit zu einer andern geometrisch zu erläutern, mögen wir beachten, dass die Gleichung,

$$TVU\frac{\varrho}{\varepsilon} = T\frac{\alpha}{\varepsilon},$$

oder

$$\sin EOP = T.OA : T.OE,$$

(wenn E somit ausserhalb der Kugel liegt) einen reellen Rotationskegel darstellt, dessen Spitze im Mittelpunkt O der Kugel liegt; und je nachdem die Linie OB innerhalb dieses Kegels liegt, oder auf ihm, oder ausserhalb desselben, wird die erste oder die zweite oder die dritte der drei Möglichkeiten (2.) anzunehmen sein; oder in anderen Worten, die Linie durch E, die (wie vorher) parallel zu OB gezogen ist, schneidet die Kugel entweder, oder berührt sie, oder trifft sie (in reeller Weise) überhaupt nicht. (Vergleiche die obenstehende Fig. 52.)

(7.) Wenn E wieder ein äusserer Punkt ist, dann ist der Tangentenkegel, der von ihm aus an die Kugel gelegt werden kann, reell; und die Gleichung dieses umhüllenden oder umschriebenen Kegels, dessen Spitze E ist, kann aus derjenigen des vorigen Kegels (6.) erhalten werden, indem man einfach ϱ in $\varrho - \varepsilon$ verwandelt; sie ist daher, oder wenigstens eine ihrer Formen ist,

Digitized by Google

$$TVU\frac{\varrho-\varepsilon}{\varepsilon}=T\frac{\alpha}{\varepsilon};$$

oder

$$\sin OEP = T.OA : T.OE.$$

(8.) Im Allgemeinen ist daher, wenn q irgend ein Quaternion ist und x irgend ein Skalar,

$$VU(q+x)=Vq:T(q+x);$$

die vorige Gleichung (7.) kann daher in folgender Weise geschrieben werden:

$$T\frac{V(\varrho:\varepsilon).\varepsilon}{\varrho-\varepsilon}=T\frac{\alpha}{\varepsilon};$$

oder

$$T.PP':T.EP=T.OA:T.OE,$$

wenn P' der Fusspunkt des Lothes ist, das von P auf OE gefällt ist; und in der That ist der erste Quotient augenscheinlich $=\sin OEP$.

(9.) Wir können auch schreiben,

$$TV\frac{\varrho}{\varepsilon}=T\frac{\alpha}{\varepsilon}.T\left(\frac{\varrho}{\varepsilon}-1\right);$$

oder

$$0=\left(S\frac{\varrho}{\varepsilon}\right)^2-N\frac{\varrho}{\varepsilon}+N\frac{\alpha}{\varepsilon}\left(N\frac{\varrho}{\varepsilon}-2S\frac{\varrho}{\varepsilon}+1\right);$$

oder

$$\left(S\frac{\varrho}{\varepsilon}-N\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2=\left(1-N\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\left(N\frac{\varrho}{\varepsilon}-N\frac{\alpha}{\varepsilon}\right),$$

als weitere Formen der Gleichung des umschriebenen Kegels.

(10.) Wenn wir also setzen,

$$N\frac{\varrho}{\alpha}=1,$$

oder

$$N\frac{\varrho}{\varepsilon}=N\frac{\alpha}{\varepsilon},$$

um auszudrücken, dass der Punkt P sowohl auf der umhüllten Kugel, als auf dem umhüllenden Kegel liegt, so finden wir die folgende Gleichung der Berührungsebne, oder der sogenannten Polarebne des Punktes E, in Beziehung auf die gegebene Kugel:

$$\left(S\frac{\varrho}{\varepsilon}-N\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2=0;$$

Digitized by Google

oder

$$S\frac{\varrho}{\varepsilon} - N\frac{\alpha}{\varepsilon} = 0;$$

und die Thatsache, dass sie eine Berührungsebne* ist, ist durch das Vorkommen des Exponenten 2 angedeutet, oder dadurch, dass ihre Gleichung im Quadrat auftritt.

(11.) Der Vector,

$$\varepsilon' = \varepsilon S\frac{\varrho}{\varepsilon} = \varepsilon N\frac{\alpha}{\varepsilon} = OE',$$

ist derjenige des Punktes E', in dem die Polarebne (10.) von E die grade Linie OE senkrecht schneidet; und wir sehn, dass

$$T\varepsilon \,.\, T\varepsilon' = T\alpha^2,$$

oder

$$T.OE.T.OE' = (T.OA)^2,$$

wie nach elementaren Sätzen der sphärischen oder auch nur der ebnen Geometrie zu erwarten war.

(12.) Die Gleichung (10.) der Polarebne von E kann leicht in folgender Weise transformirt werden:

$$S\frac{\varepsilon}{\varrho} = \left(S\frac{\varrho}{\varepsilon} \,.\, N\frac{\varepsilon}{\varrho}\right) = N\frac{\alpha}{\varrho},$$

oder

$$S\frac{\varepsilon}{\varrho} - N\frac{\alpha}{\varrho} = 0;$$

sie bleibt daher bestehn, wenn ε und ϱ mit einander vertauscht werden. Wenn wir daher irgend einen Punkt C ausserhalb der Kugel, der in der Polarebne FF' .. des vorigen äusseren Punktes E liegt, zur Spitze eines neuen umhüllenden Kegels nehmen, so geht die neue Berührungsebne, oder die Polarebne DD' .. des neuen Punktes C, durch die vorige Spitze E. Diese geometrische Beziehung der Gegenseitigkeit, oder der Conjugation, zwischen den beiden Punkten C und E ist in der That schon bekannt, aber es schien mir für unseren Zweck nützlich, sie von Neuem durch Quaternionen** zu beweisen.

* In der That würde ein neuerer Geometer sagen, dass wir hier einen Fall haben, in dem zwei Schnittebnen zusammenfallen, die zu einer einzigen Berührungsebne verschmolzen sind.

** In der That sieht man leicht, dass die Untersuchungen in den

Digitized by Google

(13.) Im Allgemeinen kann jede der beiden verbundenen Gleichungen,

$$S\frac{\varrho'}{\varrho} = N\frac{\alpha}{\varrho}, \qquad S\frac{\varrho}{\varrho'} = N\frac{\alpha}{\varrho'},$$

die auch in folgender Weise geschrieben werden können,

$$1 = \left(S\frac{\varrho'}{\alpha}\frac{\alpha}{\varrho} \cdot N\frac{\varrho}{\alpha}\right) = S.\frac{\varrho'}{\alpha}K\frac{\varrho}{\alpha},$$

$$1 = S\frac{\varrho}{\alpha}K\frac{\varrho'}{\alpha},$$

eine Form der Gleichung der Conjugation zwischen irgend zwei Punkten P und P' (nicht diejenigen, welche in Fig. 52 so bezeichnet sind) genannt werden, deren Vectoren ihr genügen; denn sie drückt aus, dass diese beiden Punkte, in einem wohlbekannten Sinne, zu einander conjugirt sind in Beziehung auf die gegebene Kugel $T\varrho = T\alpha$.

(14.) Wenn einer der beiden Punkte, zum Beispiel P', durch seinen Vector ϱ' gegeben wäre, während der andere Punkt P und der andere Vector ϱ variabel sind, so stellte die Gleichung eine Ebne dar; nämlich diejenige, die wieder die Polarebne des gegebenen Punktes heisst, mag der Punkt ausserhalb, oder innerhalb, oder auf der Oberfläche der Kugel liegen.

(15.) Es seien also P, P' zwei conjugirte Punkte; und es sollen die Punkte S, S' gefunden werden, in denen die gerade Linie PP' die Kugel schneidet. Nehmen wir an (vergl. 25), dass

$$OS = \sigma = x\varrho + y\varrho',$$

$$x + y = 1,$$

$$T\sigma = T\alpha,$$

und beachten wir die Gleichung der Conjugation (13.), so haben wir, nach 210, XX., oder nach 200, VII., die folgende quadratische Gleichung in $y:x$,

vorigen Nebenartikeln fast einzig als Uebungen in der Ausdrucksweise und Rechenweise der Quaternionen vorgebracht sind, und nicht um geometrisch Neues an Resultaten zu bieten.

$$(x+y)^2 = N\left(x\frac{\varrho}{a} + y\frac{\varrho'}{a}\right) = x^2 N\frac{\varrho}{a} + 2xy + y^2 N\frac{\varrho'}{a};$$

sie ergiebt,

$$x^2\left(N\frac{\varrho}{a} - 1\right) = y^2\left(1 - N\frac{\varrho'}{a}\right).$$

(16.) Daher ist es augenscheinlich, dass einer der beiden Punkte P, P' im Innern der Kugel liegen muss, wenn die Durchschnittspunkte S, S' reell sind, und der andere ausserhalb derselben; denn die eine der beiden hierbei auftretenden Normen muss grösser und die andere kleiner als Eins sein. Und da sich die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung, oder die beiden Werthe von $y:x$, nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, so folgt (nach 26), dass die grade Linie PP' (wie ja auch wohlbekannt ist) in den beiden Punkten S, S', in denen sie die Kugel trifft, harmonisch getheilt wird; oder dass wir in einer schon mehrere Male angewandten (25, 31, u. s. w.) Bezeichnung die harmonische Formel haben,

$$(PSP'S') = -1.$$

(17.) Bei einem reellen, aber im Innern gelegenen Punkte P können wir noch von einem Tangentenkegel sprechen, der an die Kugel gelegt ist; aber wenn wir es thun, so müssen wir sagen, dass diese Tangenten ideal, oder imaginär* sind; und müssen uns vorstellen, dass sie in einem imaginären Berührungskreise endigen; seine reelle, aber ganz ausserhalb der Kugel gelegene Ebne erkennen wir durch Quaternionen, wie durch die neuere Geometrie, als [vergl. (14.)] die Polarebne des angenommenen inneren Punktes.

216. Einige meiner Leser finden es vielleicht nützlich, oder wenigstens von Interesse, hier einige wenige Beispiele für die Anwendung des allgemeinen distributiven Princips (212) der Multiplication auf das Ellipsoid folgen zu sehn, von dem einige Formen der Quaternionengleichung kürzlich [in 204, (14.)] angegeben wurden; besonders da wir fanden, dass diese Formen zu einer geometrischen Construction dieser berühmten und

* Vergleiche wieder die zweite Anmerkung auf Seite 112 und andere, auf die wir uns früher bezogen haben.

wichtigen Oberfläche führen*, die bisher unbekannt war, oder vielmehr zu mehreren derartigen Constructionen. In Folgendem werde ich annehmen, dass sich meine Leser schon hinreichend mit den Hauptformeln der vorhergehenden Artikel bekannt gemacht haben, und daher verhältnissmässig nur wenige Hinweise** geben, wenigstens in Bezug auf den vorliegenden Gegenstand.

(1.) Um erstens zu beweisen, dass der Ort der variablen Ellipse,

$$\text{I.}\ldots S\frac{\varrho}{\alpha} = x, \qquad \left(V\frac{\varrho}{\beta}\right)^2 = x^2 - 1, \quad 204,\,(13.),$$

ein Ort, der durch die Gleichung,

$$\text{II.}\ldots \left(S\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 - \left(V\frac{\varrho}{\beta}\right)^2 = 1, \quad 204,\,(14.),$$

dargestellt wird, in der die beiden constanten Vectoren α, β als reell angenommen sind und als gegen einander unter einem gewissen spitzen oder stumpfen (aber nicht rechten***) Winkel geneigt, eine Oberfläche zweiter Ordnung ist, in dem Sinne, dass sie durch irgend eine gradlinige Transversale in zwei (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten wird, aber nicht in mehr als zwei Punkten, wollen wir zwei Punkte L, M, oder ihre Vectoren $\lambda = OL$, $\mu = OM$, als gegeben annehmen; und es sollen die Punkte P (reell oder imaginär) bestimmt werden, in denen die unbegrenzte grade Linie LM den Ort II. schneidet; oder es soll vielmehr die Anzahl solcher Durchschnitte bestimmt werden, was für unsern gegenwärtigen Zweck genügend ist.

(2.) Setzen wir nun

$$\varrho = \frac{y\lambda + z\mu}{y + z} \quad (25),$$

---

* Siehe die Berichte der Königlich Irischen Akademie für das Jahr 1846.

** Vergleiche die Anmerkung auf Seite 283.

*** Wenn $\beta \perp \alpha$ ist, so stellt das System I. ein Paar grader Linien (aber nicht eine Ellipse) dar, reeller oder imaginärer, nämlich diejenigen Linien, in denen der Umdrehungscylinder, der durch die zweite Gleichung dieses Systems bezeichnet wird, durch eine Ebne parallel zu seiner Achse geschnitten wird, und diese Ebne wird durch die erste Gleichung dargestellt.

so erhalten wir, für $y:z$, die folgende quadratische Gleichung,

$$\text{III.}\ldots \left(yS\frac{\lambda}{\alpha} + zS\frac{\mu}{\alpha}\right)^2 - \left(yV\frac{\lambda}{\beta} + zV\frac{\mu}{\beta}\right)^2 = (y+z)^2;$$

ohne dass wir sie aufzulösen brauchten, können wir doch schon, allein aus ihrem Grade, ersehn, dass die gesuchte Anzahl zwei ist; und dass daher der Ort II., wie vorhin behauptet wurde, eine Oberfläche der zweiten Ordnung ist.

(3.) Die Gleichung II. bleibt ungeändert, wenn $-\varrho$ für ϱ gesetzt wird; die Oberfläche hat daher einen Mittelpunkt, und dieser Mittelpunkt liegt im Anfangspunkt O der Vectoren.

(4.) Wir haben gesehn, dass die Gleichung der Oberfläche auch so geschrieben werden kann:

$$\text{IV.}\ldots T\left(S\frac{\varrho}{\alpha} + V\frac{\varrho}{\alpha}\right) = 1; \quad 204, (14.)$$

sie ergiebt daher, für den Reciproken des Radiusvectors vom Mittelpunkt aus, den Ausdruck,

$$\text{V.}\ldots \frac{1}{T\varrho} = T\left(S\frac{U\varrho}{\alpha} + V\frac{U\varrho}{\beta}\right);$$

und dieser Ausdruck hat einen reellen Werth, der niemals gleich Null ist*, welchen reellen Werth man auch dem Versor $U\varrho$ beilegen mag, das heisst, welche Richtung man auch dem ϱ geben mag: die Oberfläche ist daher geschlossen und endlich.

(5.) Führt man zwei neue constante Hülfs-Vectoren ein, welche durch die beiden Ausdrücke,

$$\text{VI.}\ldots \gamma = \frac{2\beta}{\beta+\alpha}.\alpha,$$

$$\delta = \frac{2\beta}{\beta-\alpha}.\alpha$$

bestimmt werden, aus denen man (nach 125) die weiteren Ausdrücke erhält,

---

* Es ist daran zu erinnern, dass wir in (1.) den Fall ausgeschlossen haben, wo $\beta \perp \alpha$ ist; man kann beweisen, dass die Gleichung II. in diesem Falle einen elliptischen Cylinder darstellt.

Digitized by Google

$$\text{VI.}' \ldots \gamma = \frac{2\alpha}{\beta + \alpha} \cdot \beta,$$

$$\delta = \frac{2\alpha}{\beta - \alpha} \cdot \beta,$$

so erhalten wir

$$\text{VII.} \ldots \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} = 2,$$

$$\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\delta}{\beta} = 2;$$

$$\text{VII.}' \ldots \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha}{\delta} = 1,$$

$$\frac{\beta}{\gamma} - \frac{\beta}{\delta} = 1;$$

und unter diesen Bedingungen heisst γ das harmonische Mittel zwischen den beiden vorigen Vectoren α und β; und ebenso ist δ das harmonische Mittel zwischen α und $-\beta$; während 2α das entsprechende Mittel zwischen γ und δ ist; und 2β dasjenige zwischen γ und $-\delta$.

(6.) Unter denselben Bedingungen haben wir für irgend einen beliebigen Vector ϱ die Transformationen,

$$\text{VIII.} \ldots \frac{\varrho}{\gamma} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\alpha} + \frac{\varrho}{\beta}\right);$$

$$\frac{\varrho}{\delta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{\alpha} - \frac{\varrho}{\beta}\right);$$

$$\text{IX.} \ldots \frac{\varrho}{\gamma} + K\frac{\varrho}{\delta} = S\frac{\varrho}{\alpha} + V\frac{\varrho}{\beta};$$

die Gleichung IV. der Oberfläche kann daher in folgender Weise geschrieben werden:

$$\text{X.} \ldots T\left(\frac{\varrho}{\gamma} + K\frac{\varrho}{\delta}\right) = 1;$$

oder auch,

$$\text{X.}' \ldots T\left(\frac{\varrho}{\delta} + K\frac{\varrho}{\gamma}\right) = 1;$$

die geometrische Bedeutung dieser neuen Formen werden wir bald sehn.

(7.) Das System der beiden Ebnen, die durch den Anfangspunkt gehn und bezüglich zu den neuen Vectoren γ und δ senkrecht sind, wird durch die Gleichung,

$$\text{XI.}\ldots\ S\frac{\varrho}{\gamma}\,S\frac{\varrho}{\delta}=0,$$

oder durch

$$\text{XII.}\ldots\ \left(S\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2=\left(S\frac{\varrho}{\beta}\right)^2,$$

dargestellt; verbinden wir sie mit der Gleichung II., so bekommen wir

$$\text{XIII.}\ldots 1=\left(S\frac{\varrho}{\beta}\right)^2-\left(V\frac{\varrho}{\beta}\right)^2=N\frac{\varrho}{\beta};$$

oder

$$\text{XIV.}\ldots\ T\varrho=T\beta.$$

Die beiden Diametralebnen schneiden daher die Oberfläche in zwei Kreisschnitten, deren gemeinsamer Radius $T\beta$ ist; und die Normalen γ und δ derselben beiden Ebnen können die cyklischen Normalen der Oberfläche genannt werden (vergl. 196, (17.)]; die Ebnen selbst können ihre cyklischen Ebnen heissen.

(8.) Umgekehrt, wenn wir den Durchschnitt der Fläche mit der concentrischen Kugel XIV. suchen, deren Radius $T\beta$ ist, so werden wir zur Gleichung XII. des Systems der beiden cyklischen Ebnen, und daher zu den beiden Kreisschnitten (7.) geführt; so dass jeder Radiusvector der Oberfläche, der nicht in der einen oder anderen dieser beiden Ebnen gezogen wird, eine Länge hat, die entweder grösser oder kleiner ist, als der Radius $T\beta$ der Kugel.

(9.) Nach allen diesen Bemerkungen ist es klar, dass der Ort II., oder 204, (14.), wie vorher behauptet wurde, ein Ellipsoid ist; sein Mittelpunkt ist der Anfangspunkt (3.), und seine mittlere Halbachse ist $= T\beta$; während $U\beta$, nach 204, (15.), die Richtung der Achse eines umschriebenen Rotationscylinders hat, und der Radius dieses Cylinders ist $T\beta$; ferner ist α, nach dem zuletzt angeführten Nebenartikel, senkrecht zur Ebne der Berührungsellipse.

(10.) Diejenigen, welche mit der neueren Geometrie vertraut sind und die Bezeichnungen der Quaternionen in sich aufgenommen haben, werden leicht sehn, dass das Ellipsoid II., oder IV., eine Deformation der sogenannten mittleren Kugel XIV. ist, und zu ihr homolog ist; der unendlich entfernte Punkt in der Richtung von β ist ein Mittelpunkt der Homologie, und

Digitized by Google

jede der beiden Ebnen XI. oder XII. ist eine entsprechende Ebne der Homologie.

217. Die vorige Form, X. oder X.′, der quaternion Gleichung des Ellipsoids lässt sich auf eine solche Weise deuten, dass sie zu einer einfachen Construction dieser Oberfläche führt; wir wollen sie zuerst durch Rechnung aufsuchen und dann durch geometrische Betrachtungen erläutern.

(1.) Setzt man die römischen Zahlen in den Nebenartikeln zu 216 fort und beachtet, dass (nach 190, u. s. w.),

$$\frac{\varrho}{\gamma} = K\frac{\gamma}{\varrho} \cdot N\frac{\varrho}{\gamma},$$

und

$$K\frac{\varrho}{\delta} = \frac{\delta}{\varrho} \cdot N\frac{\varrho}{\delta},$$

so nimmt die Gleichung X. die Form an,

$$\text{XV.} \ldots \quad 1 = T\left\{\left(\frac{\delta}{T\delta^2} + K\frac{\gamma}{\varrho} \cdot \frac{\varrho}{T\gamma^2}\right) : \frac{\varrho}{T\varrho^2}\right\};$$

oder

$$\text{XVI.} \ldots \quad \frac{\iota^2}{T\varrho} = T\left(\iota + K\frac{\varkappa}{\varrho} \cdot \varrho\right),$$

wenn wir setzen

$$\text{XVII.} \ldots \quad \frac{\delta}{T\delta^2} = \frac{\iota}{\iota^2}$$

und

$$\frac{\gamma}{T\gamma^2} = \frac{\varkappa}{\iota^2},$$

wo ι und $\varkappa$ zwei neue constante Vectoren sind, und ι ein neuer constanter Skalar ist, den wir als positiv annehmen wollen, dessen Werth aber ganz beliebig gewählt werden kann.

(2.) Die Vergleichung der Formen X. und X.′ zeigt, dass γ und δ vertauscht werden können, oder dass sie symetrisch in die Gleichung des Ellipsoids eingehn, obwohl es zuerst nicht den Anschein hat; es ist daher gestattet anzunehmen, dass

$$\text{XVIII.} \ldots \quad T\gamma > T\delta,$$

und dass daher

$$\text{XVIII.}' \ldots \quad T\iota > T\varkappa;$$

denn die Annahme $T\gamma = T\delta$ würde, nach VI., ergeben,

$$T(\beta + \alpha) = T(\beta - \alpha),$$

und daher [nach 186, (6.) u. s. w.]

$$\beta \perp \alpha,$$

und dieser letztere Fall wurde in 216, (1.) ausgeschlossen.

(3.) Wir haben daher,

$$\text{XIX.} \ldots \quad U\iota = U\delta;$$
$$U\varkappa = U\gamma;$$

$$\text{XX.} \ldots \quad T\iota = \frac{\iota^2}{T\delta}; \quad T\varkappa = \frac{\iota^2}{T\gamma};$$

$$\text{XXI.} \ldots \quad \frac{T\iota^2 - T\varkappa^2}{\iota^2} = \left(\frac{\iota}{T\delta}\right)^2 - \left(\frac{\iota}{T\gamma}\right)^2.$$

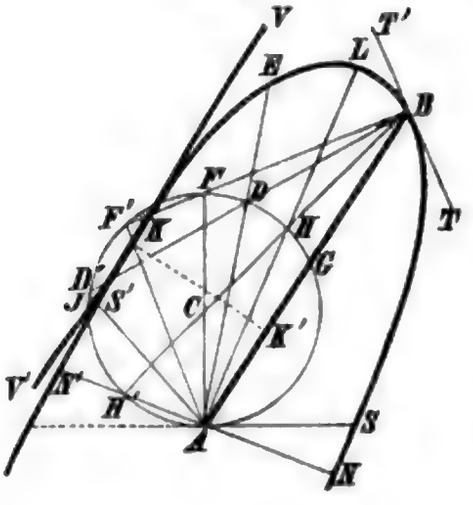
(4.) Es sei ABC ein ebnes Dreieck, so dass

$$\text{XXII.} \ldots \quad CB = \iota, \qquad CA = \varkappa;$$

es sei ferner

$$AE = \varrho.$$

Fig. 53.



Wenn nun eine Kugel, die wir die diacentrische Kugel nennen wollen, um den Punkt C als Mittelpunkt beschrieben wird, mit einem Radius $= T\varkappa$, und die daher durch den Mittelpunkt A (wie wir hier statt O geschrieben haben) des Ellipsoids geht und wenn ferner D der Punkt ist, in dem die Linie AE diese Kugel schneidet, so haben wir, nach 213, (5.), (13.),

$$\text{XXIII.} \ldots \quad CD = -K\frac{\varkappa}{\varrho} \cdot \varrho,$$

und daher

$$\text{XXIII.}' \ldots \quad DB = \iota + K\frac{\varkappa}{\varrho} \cdot \varrho;$$

so dass die Gleichung XVI. wird,

$$\text{XXIV.} \ldots \quad \iota^2 = T.AE.T.DB.$$

(5.) Der Punkt B liegt ausserhalb der diacentrischen Kugel (4.), nach der Annahme (2.); es kann daher eine reelle Tangente (oder besser ein Tangentenkegel) von diesem Punkt aus an

Digitized by Google

die Kugel gelegt werden; und wenn wir die Länge einer solchen Tangente wie den Werth (1.) des Skalars t wählen, das heisst, wenn wir jedes Glied der Formel XXI. gleich eins machen und mit D' den zweiten Durchschnittspunkt der graden Linie BD mit der Kugel bezeichnen, wie in Fig. 53, so haben wir (nach Euclid III.) die elementare Beziehung,

$$\text{XXV.} \ldots t^2 = T.DB.T.BD';$$

daraus folgt die geometrische Gleichung des Ellipsoids,

$$\text{XXVI.} \ldots T.AE = T.BD';$$

oder, in einer etwas bekannteren Bezeichnung,

$$\text{XXVII.} \ldots \overline{AE} = \overline{BD'};$$

wo $\overline{AE}$ die Länge der Linie AE bezeichnet, und ebenso $\overline{BD'}$ die von BD'.

(6.) Die folgende sehr einfache Constructionsregel (vergl. die vorige Fig. 53) ergiebt sich daher aus unserer quaternion Analyse:

Von einem festen Punkte A auf der Oberfläche einer gegebenen Kugel ziehe man irgend eine Sehne AD; es sei D' der zweite Durchschnittspunkt derselben Kugeloberfläche mit der Secante BD, die von einem festen, ausserhalb* der Kugel gelegenen Punkte B aus gezogen ist; man ziehe nun einen Radiusvector AE, an Länge der Linie BD' gleich, und der Richtung nach entweder mit der Sehne AD zusammenfallend oder entgegengesetzt zu ihr: der Ort des Punktes E ist dann ein Ellipsoid, dessen Mittelpunkt A ist, und B ist ein Punkt seiner Oberfläche.

(7.) Oder auch:

Wenn die beiden Diagonalen AE, BD' eines ebnen, aber veränderlichen Vierseits $ABED'$, dessen eine Seite AB der Länge und Lage nach gegeben ist, einander an Länge gleich sind, und wenn ihr Durchschnittspunkt D stets auf der Oberfläche einer gegebenen Kugel liegt, in der die Seite AD' des Vierseits eine Sehne ist, dann ist die gegenüberliegende Seite BE eine Sehne eines gegebenen Ellipsoids.

---

* Nur um unsere Vorstellungen zu fixiren, haben wir hier angenommen, dass der Punkt B ausserhalb (5.) der Kugel liegt; die Rech-

218. Aus jedem der beiden vorhergehenden Sätze in Betreff der Constructionsregel für das Ellipsoid, zu denen uns die Quaternionen geführt haben, können leicht viele geometrische Folgerungen gezogen werden, von denen wir einige wenige hier erwähnen und die Beweise für sie beifügen wollen; unsere bisher gebrauchte Rechenweise wird dabei wieder in der Folge angewandt.

(1.) Dass die Ecke B des sogenannten erzeugenden Dreiecks ABC in der That ein Punkt der erzeugten Oberfläche bei der Construction 217, (6.) ist, kann dadurch bewiesen werden, dass man sich vorstellt, die veränderliche Sehne AD der gegebenen diacentrischen Kugel nehme die Lage AG ein; wo G der zweite Durchschnittspunkt der Linie AB mit der Kugeloberfläche ist.

(2.) Wenn man sich vorstellt, dass D sich dem A (anstatt dem G) nähere, und daher D' dem G (anstatt dem A), so wird die Richtung von AE (oder von AD) tangential zur Kugel in A, während die Länge von AE (oder von BD'), nach der Construction, gleich der Länge von BG wird; die Oberfläche hat daher einen diametralen und kreisförmigen Schnitt in einer Ebne, welche die diacentrische Kugel in A berührt, und sein Radius ist $= BG$.

(3.) Denken wir uns einen Kreisschnitt der Kugel durch A, durch eine Ebne senkrecht zu BC; wenn D sich auf diesem Kreise entlang bewegt, bewegt sich D' auf einem parallelen Kreise, der durch G geht, und die Länge von BD', oder die von AE, wird wieder gleich $\overline{BG}$; sie ist daher der Radius eines zweiten diametralen und kreisförmigen Schnittes des Ellipsoids, der durch die zuletzt erwähnte Ebne gemacht wird.

(4.) Die Construction ergiebt uns also zwei cyklische Ebnen durch A; die Lothe zu diesen Ebnen, oder die beiden cyklischen Normalen [216, (7.)] des Ellipsoids, haben, wie wir sahn, die Richtungen der beiden Seiten CA, CB, des erzeugenden Dreiecks ABC (1.).

---

nungen und die Construction würden fast dieselben sein, wenn wir B als einen inneren Punkt annehmen, oder $T\iota < T\varkappa$, $T\gamma < T\delta$.

Digitized by Google

(5.) Ferner, da das Rechteck

$$\overline{BA} \,.\, \overline{BG} = \overline{BD} \,.\, \overline{BD'} = \overline{BD} \,.\, \overline{AE}$$
$$= \text{dem Doppelten der Fläche des Dreiecks } ABE : \sin BDE,$$

haben wir die Gleichung,

$$\text{XXVIII.} \ldots \text{ senkrechter Abstand des Punktes } E \text{ von } AB = \overline{BG} \,.\, \sin BDE;$$

die dritte Seite, AB, des erzeugenden Dreiecks (1.) ist daher die Umdrehungsachse eines Cylinders, der das Ellipsoid umhüllt, und dessen Radius dieselbe Länge, $\overline{BG}$, hat, wie der Radius eines jeden der beiden diametralen Kreisschnitte.

(6.) Für die Berührungspunkte des Ellipsoids und des Cylinders haben wir die geometrische Beziehung,

$$\text{XXIX.} \ldots \; BDE = \text{einem rechten Winkel;}$$

oder

$$\text{XXIX}' \ldots \; ADB = \text{einem rechten Winkel;}$$

der Punkt D liegt daher auf einer zweiten Kugeloberfläche, deren einer Durchmesser die Linie AB ist, und schneidet die diacentrische Kugel in einem Kreise, dessen Ebne durch A geht, und durchschneidet den umhüllenden Cylinder in einer Berührungsellipse [vergl. 204, (15.), und 216, (9.)] dieses Cylinders mit dem Ellipsoid.

(7.) Es möge AC die diacentrische Kugel wieder in F treffen, und es treffe BF sie wieder in F' (wie in Fig. 53); es lässt sich dann leicht beweisen, dass die gemeinsame Ebne des zuletzt erwähnten Kreises und der Ellipse (6.) die Ebne des erzeugenden Dreiecks ABC in der Linie AF' rechtwinklig schneidet, so dass die Linie $F'B$ senkrecht zu dieser Berührungsebne ist; und daher auch (wegen der conjugirten Durchmesser, u. s. w.) eine Normale zum Ellipsoid, in B.

(8.) Man kann von allen diesen geometrischen Folgerungen aus der Construction (217), zu denen viele andere hinzugefügt werden könnten, zeigen, dass sie mit der quaternion Analyse, aus der die Construction selbst hergeleitet wurde, in Uebereinstimmung sind, und durch sie bestätigt werden. So haben sich die beiden Kreisschnitte (2.), (3.) von selbst in 216, (7.) er-

geben; und ihre beiden cyklischen Normalen (4.), oder die Seiten CA, CB des Dreiecks, welche [nach 217, (4.)] die beiden Vectoren $\varkappa$, ι sind, haben, [nach 217, (1.) oder (3.)] die Richtungen der beiden vorigen Vectoren γ, δ; und das stimmt wieder mit 216, (7.) überein.

(9.) Ferner werden wir finden, dass die angenommenen Beziehungen zwischen den drei Paaren von constanten Vectoren, α, β; γ, δ; und ι, $\varkappa$, Paare, von denen irgend eines zur Bestimmung des Ellipsoids genügend ist, zu den folgenden Ausdrücken führen, deren Untersuchung ich dem Leser zur Uebung überlasse:

$$\text{XXX.}\ldots\ \alpha = \frac{\delta}{\delta+\gamma}\gamma = \frac{\gamma}{\delta+\gamma}\delta = \frac{+\iota^2}{T(\iota+\varkappa)}\,U(\iota+\varkappa) = F'B;$$

$$\text{XXXI.}\ldots\ \beta = \frac{\delta}{\delta-\gamma}\gamma = \frac{\gamma}{\delta-\gamma}\delta = \frac{-\iota^2}{T(\iota-\varkappa)}\,U(\iota-\varkappa) = BG;$$

die Buchstaben B, F', G beziehn sich hier auf Fig. 53, während α, β, γ, δ ihre früheren Bedeutungen (216) beibehalten, und nicht als Vectoren der Punkte A, B, C, D in dieser Figur zu deuten sind. Daher stimmen die vorigen geometrischen Schlüsse, dass AB (oder BG) die Umdrehungsachse des einen umhüllenden Cylinders (5.) ist, und dass $F'B$ senkrecht zur Ebne der Berührungsellipse (7.) ist, mit den früheren Schlussfolgerungen [216, (9.), oder 204, (15.)] überein, dass β eine solche Achse, und α eine solche Normale ist.

(10.) Es ist leicht zu beweisen, dass, allgemein,

$$S\frac{q-1}{q+1} = S\frac{(q-1)(Kq+1)}{(q+1)(Kq+1)} = \frac{Nq-1}{N(q+1)},$$

$$S\frac{q+1}{q-1} = \frac{Nq-1}{N(q-1)};$$

und daraus folgt,

$$\text{XXXII.}\ldots\ S\frac{\iota-\varkappa}{\iota+\varkappa} = \frac{T\iota^2-T\varkappa^2}{T(\iota+\varkappa)^2},$$

$$S\frac{\iota+\varkappa}{\iota-\varkappa} = \frac{T\iota^2-T\varkappa^2}{T(\iota-\varkappa)^2},$$

welche beiden Vectoren auch ι und $\varkappa$ sein mögen. Aber wir haben hier,

$$\text{XXXIII.}\ldots\ t^2 = T\iota^2 - T\varkappa^2, \text{ nach 217, (5.);}$$

Digitized by Google

die vorigen Ausdrücke (9.) für α und β werden daher,

$$\text{XXXIV.}\ldots\quad \alpha = +(\iota+\varkappa)\,S\frac{\iota-\varkappa}{\iota+\varkappa};$$

$$\beta = -(\iota-\varkappa)\,S\frac{\iota+\varkappa}{\iota-\varkappa}.$$

Die letzte Form 204, (14.) der Gleichung des Ellipsoids kann daher jetzt so geschrieben werden:

$$\text{XXXV.}\ldots\quad T\left(S\frac{\varrho}{\iota+\varkappa} : S\frac{\iota-\varkappa}{\iota+\varkappa} - V\frac{\varrho}{\iota-\varkappa} : S\frac{\iota+\varkappa}{\iota-\varkappa}\right) = 1;$$

in ihr kann das Vorzeichen des rechten Theils geändert werden. Und damit bewahrheitet sich durch Rechnung das vorige Ergebniss (1.) der Construction, nämlich dass B ein Punkt der Oberfläche ist; denn wir sehn, dass der letzten Gleichung genügt wird, wenn wir setzen

$$\text{XXXVI.}\ldots\quad \varrho = AB = \iota - \varkappa = \beta : S\frac{\beta}{\alpha};$$

und dieser Werth von ϱ genügt augenscheinlich auch der Form 216, IV.

(11.) Aus der Form 216, II., in Verbindung mit dem Werthe XXXIV. von α, ist leicht zu schliessen, dass die Ebne,

$$\text{XXXVII.}\ldots\quad S\frac{\varrho}{\alpha} = 1,$$

oder

$$\text{XXXVII.}'\ldots\quad S\frac{\varrho}{\iota+\varkappa} = S\frac{\iota-\varkappa}{\iota+\varkappa},$$

die dem Werthe $x = 1$ in 216, I. entspricht, das Ellipsoid im Punkte B berührt, dessen Vector ϱ wir vorher (10.) bestimmt haben; die Normale zur Oberfläche in diesem Punkte hat daher die Richtung von $\iota + \varkappa$, oder von α, das heisst, von FB, oder von $F'B$: so dass die letzte geometrische Schlussfolgerung (7.) somit durch Rechnung mit Quaternionen bestätigt wird.

219. Einige wenige weitere Folgerungen der Construction (217) mögen hier bemerkt werden; ins Besondere in Betreff der geometrischen Bestimmung der drei Haupthalbachsen des Ellipsoids, und der grösseren und kleineren Halbachsen irgend eines elliptischen und diametralen Schnittes; ferner die Bestimmung eines gewissen Systems sphärischer Kegelschnitte, als deren Ort die Oberfläche angesehn werden kann.

(1.) Es mögen a, b, c bezüglich die Längen der grössten, der mittleren und der kleinsten Halbachse des Ellipsoids bezeichnen; wenn dann die Seite BC des erzeugenden Dreiecks die diacentrische Kugel in den Punkten H und H' schneidet — der erstere möge zwischen den Punkten B und C liegen (wie in Fig. 53) — so haben wir die Werthe,

$$\text{XXXVIII.} \ldots \quad a = \overline{BH'};$$
$$b = \overline{BG};$$
$$c = \overline{BH};$$

so dass die Längen der Seiten des Dreiecks ABC, durch die Halbachsen, in folgender Weise ausgedrückt werden können,

$$\text{XXXIX.} \ldots \quad \overline{BC} = T\iota = \frac{a+c}{2};$$
$$\overline{CA} = T\varkappa = \frac{a-c}{2};$$
$$\overline{AB} = T(\iota - \varkappa) = \frac{ac}{b};$$

und wir können schreiben,

$$\text{XL.} \ldots \quad a = T\iota + T\varkappa;$$
$$b = \frac{T\iota^2 - T\varkappa^2}{T(\iota - \varkappa)};$$
$$c = T\iota - T\varkappa.$$

(2.) Wenn wir in den Richtungen der beiden Hülfssehnen AH, AH' der Kugel, oder in den entgegengesetzten Richtungen, bezüglich die Linien AL, AN ziehn, deren Längen gleich BH' und BH sein mögen, so werden die so erhaltenen Punkte L, N, bezüglich eine grösste und eine kleinste Kuppe der Oberfläche sein. Und wenn wir, im Mittelpunkt A der Oberfläche, ein Loth AM zur Ebne des Dreiecks errichten, dessen Länge gleich $\overline{BG}$ sein möge, so wird der Punkt M, der den beiden Kreisschnitten gemeinsam ist und auf dem umhüllenden Cylinder liegt, eine mittlere Kuppe derselben sein.

(3.) Denken wir uns die Kugel und das Ellipsoid beide durch eine Ebne geschnitten, die durch A geht, und es seien die Punkte B' und C' in ihr die Projectionen von B und C; dann ist C' der Mittelpunkt des Kreisschnittes der Kugel; und wenn die Linie $B'C'$ den neuen Kreis in den Punkten D_1, D_2 schneidet, von denen D_1 der dem B' nähere sein

Digitized by Google

möge, so haben die beiden Hülfssehnen AD_1, AD_2 des Kreises die Richtungen der grösseren und kleineren Halbachsen des elliptischen Schnittes des Ellipsoids. Die Längen der Halbachsen sind, bezüglich, $\overline{BA}.\overline{BG}:\overline{BD_1}$, und $\overline{BA}.\overline{BG}:\overline{BD_2}$; oder $\overline{BD'_1}$ und $\overline{BD'_2}$, wenn die Secanten BD_1 und BD_2 die Kugel zum zweiten Male in D'_1 und D'_2 treffen.

(4.) Wenn wir die beiden Halbachsen des Schnittes a_1 und c_1 nennen, und ferner mit t die Tangente von B an die Kugel bezeichnen, so haben wir,

$$\text{XLI.}\ldots\quad \overline{BD_1} = t^2 : a_1 = ac a_1^{-1};$$
$$\overline{BD_2} = t^2 : c_1 = ac c_1^{-1};$$

aber wenn wir mit p_1 und p_2 die Neigungen der Schnittebne gegen die beiden cyklischen Ebnen des Ellipsoids bezeichnen, die zu CA und CB senkrecht sind, so dass die Projectionen dieser beiden Seiten des Dreiecks:

$$\text{XLII.}\ldots\begin{cases}\overline{C'A} = \overline{CA}.\sin p_1 = \frac{1}{2}(a-c)\sin p_1,\\ \overline{C'B} = CB.\sin p_2 = \frac{1}{2}(a+c)\sin p_2,\end{cases}$$

sind, so haben wir

$$\text{XLIII.}\ldots\quad \overline{BD_2}^2 - \overline{BD_1}^2 = \overline{BD'_2}^2 - \overline{BD'_1}^2$$
$$= \overline{4BC}\,.\,\overline{C'A}$$
$$= (a^2-c^2)\sin p_1 \sin p_2;$$

und daraus folgt die wichtige Formel,

$$\text{XLIV.}\ldots\quad c_1^{-2} - a_1^{-2} = (c^{-2} - a^{-2})\sin p_1 \sin p_2;$$

oder in Worten der bekannte und nützliche Satz, dass „die Differenz der umgekehrten Quadrate der Halbachsen eines ebnen und diametralen Schnittes eines Ellipsoids sich wie das Produkt der Sinus der Neigungen der Schnittebne zu den beiden Ebnen der Kreisschnitte ändert".

(5.) Als Verificirungen haben wir, wenn die Ebne die des erzeugenden Dreiecks ABC ist,

$$p_1 = p_2 = \frac{\pi}{2},$$

und

$$a_1 = a, \qquad c_1 = c;$$

Digitized by Google

aber wenn die Ebne senkrecht zu einer der beiden Seiten CA, CB ist, dann ist entweder p_1 oder $p_2 = 0$, und $c_, = a_,$.

(6.) Wenn das Ellipsoid durch irgend eine concentrische Kugel geschnitten wird, die von der mittleren Kugel XIV. verschieden ist, so dass

$$\text{XLV.} \ldots \overline{AE} = T\varrho = r \lessgtr b,$$

wo r ein gegebener positiver Skalar ist; dann ist

$$\text{XLVI.} \ldots \overline{BD} = t^2 r^{-1} \lessgtr abc^{-1}, \text{ d. h. } \lessgtr \overline{BA};$$

so dass der Ort des Leitpunktes D, wie wir ihn nennen können, durch den, nach der Construction, der variable Halbmesser AE des Ellipsoids (oder eine seiner Verlängerungen) geht, und der ferner in einer constanten Entfernung von dem gegebenen äusseren Punkte B liegt, jetzt wieder ein Kreis der diacentrischen Kugel ist, aber einer, dessen Ebne nicht [wie es in 218, (3.) der Fall war] durch den Mittelpunkt A des Ellipsoids geht. Der Punkt E hat daher hier zu seinem Ort den cyklischen Kegel, dessen Spitze A ist, und der auf dem zuletzt erwähnten Kreise als auf seiner Basis ruht; und daher liegt er auch auf der concentrischen Kugel XLV., er muss auf dem einen oder andern der beiden sphärischen Kegelschnitte liegen, in denen [vergl. 196, (11.)] sich der zuletzt erwähnte Kegel und die Kugel schneiden.

(7.) Der Durchschnitt eines Ellipsoids mit einer concentrischen Kugel ist daher, im Allgemeinen, ein System zweier solcher Kegelschnitte, die sich mit dem Werthe des Radius r ändern, und, im Grenzfall, das System der beiden Kreisschnitte werden, für den besondern Werth $r = b$; und das Ellipsoid selbst kann als der Ort aller solcher sphärischen Kegelschnitte, welche die beiden Kreise einschliessen, betrachtet werden.

(8.) Und wir sehn, nach (6.), dass die beiden cyklischen Ebnen [vergl. 196, (17.), u. s. w.] irgend eines der concentrischen Kegel, die durch irgend einen solchen Kegelschnitt gehn, mit den beiden cyklischen Ebnen des Ellipsoids zusammenfallen; und alles das folgt mit der grössten Leichtigkeit aus der Construction (217), zu der uns die Quaternionen geführt haben.

(9.) In Bezug auf die Figur 53, die dazu bestimmt war,

Digitized by Google

diese Construction zu erläutern, haben wir die Bedeutung der Buchstaben $ABCDD'EFF'GHH'LN$ schon erläutert. Aber in Betreff der anderen Buchstaben können wir hier hinzufügen, 1) dass N' eine zweite kleinere Kuppe der Oberfläche ist, so dass $AN' = NA$; 2) dass K ein Punkt ist, in dem die Sehne AF' des — wie wir hier sagen können — diacentrischen Kreises AGF die sogenannte Hauptellipse* schneidet, oder den Schnitt $NBLEN'$ des Ellipsoids, der durch die Ebne der grössten und kleinsten Achse gemacht wird, das heisst, durch die Ebne des erzeugenden Dreiecks ABC, so dass die Längen von AK und BF gleich sind; 3) dass die Tangente VKV' zur Ellipse in diesem Punkte parallel zur Seite AB des Dreiecks ist, oder zur Umdrehungsachse des umhüllenden Cylinders 218, (5.); sie ist in der That eine Seite (oder Erzeugende) des Cylinders; 4) dass AK, AB folglich zwei conjugirte Halbmesser der Ellipse sind, und dass daher die Tangente TBT' im Punkte B der Ellipse parallel zur Linie AKF' oder senkrecht zur Linie BFF' ist; 5) dass daher die letztere Linie die Normale [vergl. 218, (7.), (11.)] zu eben diesem elliptischen Schnitte ist, und folglich auch zum Ellipsoid, in B; 6) dass der kleinste Abstand KK' zwischen den Parallelen AB, KV, der gleich dem Radius b des Cylinders ist, an Länge der Linie BG gleich ist, und auch jedem der beiden Halbmesser AS, AS' der Ellipse, welche Radien der beiden Kreisschnitte des Ellipsoids sind, in Ebnen, die senkrecht zur Ebne der Figur sind; 7) dass AS den Kreis in A berührt; und 8) dass der Punkt S' auf der Sehne AI des Kreises liegt, die rechtwinklig zur Seite BC des Dreiecks gezogen ist.

220. Der Leser übersieht leicht, dass die Quaternion-gleichung des Ellipsoids sich auf verschiedene andere Formen bringen lässt; es mag indessen hier genügen, eine unter ihnen zu erwähnen und ihre geometrische Bedeutung anzugeben.

(1.) Für irgend drei Vectoren, $\iota, \varkappa, \varrho$, haben wir die Transformationen,

---

* In der Ebne der durch viele neueren Geometer sogenannten Focalhyperbel des Ellipsoids.

$$\text{XLVII.}\ldots N\left(\frac{\iota}{\varrho}+K\frac{\varkappa}{\varrho}\right)=N\frac{\iota}{\varrho}+N\frac{\varkappa}{\varrho}+2S\frac{\iota}{\varrho}\frac{\varkappa}{\varrho}$$

$$=N\frac{\iota}{\varkappa}N\frac{\varkappa}{\varrho}+N\frac{\varkappa}{\iota}N\frac{\iota}{\varrho}+2S\frac{\iota}{\varrho}\frac{\varkappa}{\varrho}T\frac{\varkappa}{\iota}T\frac{\iota}{\varkappa}$$

$$=N\left(\frac{\iota}{\varrho}T\frac{\varkappa}{\iota}+K\frac{\varkappa}{\varrho}T\frac{\iota}{\varkappa}\right)$$

$$=N\left(\frac{\varkappa}{\varrho}T\frac{\iota}{\varkappa}+K\frac{\iota}{\varrho}T\frac{\varkappa}{\iota}\right)$$

$$=N\left(\frac{U\iota.T\varkappa}{\varrho}+K\frac{U\varkappa.T\iota}{\varrho}\right)$$

$$=N\left(\frac{U\varkappa.T\iota}{\varrho}+K\frac{U\iota.T\varkappa}{\varrho}\right);$$

und daraus folgt die weitere allgemeine Transformation:

$$\text{XLVIII.}\ldots T\left(\iota+K\frac{\varkappa}{\varrho}.\varrho\right)=T\left(U\varkappa.T\iota+K\frac{U\iota.T\varkappa}{\varrho}.\varrho\right).$$

(2.) Wenn wir nun zwei neue constante Hülfsvectoren, ι' und $\varkappa'$, einführen, welche durch die Gleichungen definirt sind,

$$\text{XLIX.}\ldots \iota'=-U\varkappa.T\iota,\qquad \varkappa'=-U\iota.T\varkappa,$$

Gleichungen, die ergeben,

$$\text{L.}\ldots T\iota'=T\iota,\qquad T\varkappa'=T\varkappa,$$
$$T(\iota'-\varkappa')=T(\iota-\varkappa),$$
$$T\iota'^2-T\varkappa'^2=t^2,$$

so können wir die Gleichung XVI. (in 217) des Ellipsoids unter der folgenden genau gleichen Form schreiben:

$$\text{LI.}\ldots \frac{t^2}{T\varrho}=T\left(\iota'+K\frac{\varkappa'}{\varrho}.\varrho\right);$$

in ihr sind ι' und $\varkappa'$ einfach an die Stelle von ι und $\varkappa$ getreten.

(3.) Behält man daher A als Mittelpunkt des Ellipsoids bei, construirt eine neue diacentrische Kugel mit einem neuen Mittelpunkt C' und einem neuen erzeugenden Dreieck $AB'C'$, wo B' ein neuer fester äusserer Punkt ist, aber die Längen der Seiten desselben dieselben wie vorher sind, entsprechend den Bedingungen,

$$\text{LII.}\ldots AC'=-\varkappa',\qquad C'B'=+\iota',$$

und daher

Digitized by Google

$$AB' = \iota' - \varkappa';$$

zieht ferner irgend eine Secante $B'D''D'''$ (anstatt BDD') und legt eine Linie AE in der Richtung von AD'', oder in der zu ihr entgegengesetzten Richtung, die so lang ist wie BD'''; so ist der Ort des Punktes E dasselbe Ellipsoid, wie vorher.

(4.) Der einzige Schluss, den wir hier* aus dieser neuen Construction ziehn wollen, ist der, dass (wie bekannt ist) ein zweiter umhüllender Umdrehungscylinder existirt, und dass seine Achse die Seite AB' des neuen Dreiecks $AB'C''$ ist; dass ferner der Radius dieses zweiten Cylinders gleich dem des ersten ist, nämlich gleich der mittleren Halbachse, b, des Ellipsoids; und dass die grössere Halbachse, a, oder die Linie AL in Fig. 53, den Winkel BAB' halbirt, den die beiden Umdrehungsachsen dieser beiden umschriebenen Cylinder bilden; die Ebne der neuen Berührungsellipse wird geometrisch durch ein Verfahren bestimmt, das genau gleich dem in 218, (7.) angewandten ist; und sie ist ferner senkrecht zu dem neuen Vector $\iota' + \varkappa'$, wie die frühere Berührungsebne [nach 218, (11.)] senkrecht zu $\iota + \varkappa$ war.

Vierzehnter Abschnitt.

Ueber die Zurückführung des allgemeinen Quaternions auf eine viergliedrige Grundform; und über einen ersten Beweis des associativen Grundsatzes der Multiplication von Quaternionen.

221. Behalten wir die Bedeutungen (181) der drei rechtwinkligen Einheitslinien OI, OJ, OK, als Achsen, und daher auch als Indices (159), der drei gegebenen rechten Versoren

* Wenn es der Raum erlauben sollte, so könnten einige zusätzliche Bemerkungen über die Beziehungen der constanten Vectoren ι, $\varkappa$, u. s. w., zum Ellipsoid gegeben werden, und über einige andere Constructionen dieser Oberfläche, wenn wir im folgenden Buche dazu gelangen werden, die Gleichung derselben auf die neue Form,

$$T(\iota\varrho + \varrho\varkappa) = \varkappa^2 - \iota^2,$$

zu bringen.

i, j, k in drei zu einander rechtwinkligen Ebnen bei, so können wir den Index OQ irgend eines anderen rechten Quaternions, wie zum Beispiel Vq ein solcher ist, unter der dreigliedrigen Form (vergl. 62)

$$\text{I.} \ldots IVq = OQ = x \,.\, OI + y \,.\, OJ + z \,.\, OK$$

ausdrücken; $x\,y\,z$ sind gewisse drei skalar Coëfficienten, nämlich die drei rechtwinkligen Coordinaten des Endpunktes Q des Index in Bezug auf die drei Achsen OI, OJ, OK. Daher können wir auch allgemein, nach 206 und 126, schreiben,

$$\text{II.} \ldots Vq = xi + yj + zk = ix + jy + kz;$$

und die letzte Form, $ix + jy + kz$, kann man eine dreigliedrige Grundform nennen, auf die jeder rechte Quaternion, oder der rechte Theil Vq irgend eines gegebenen Quaternions q, wie oben zurückgeführt werden kann. Wenn wir nun mit w den skalar Theil, Sq, desselben allgemeinen Quaternions q bezeichnen, so haben wir, nach 202, die folgende allgemeine Zurückführung eines Quaternions auf eine viergliedrige Grundform (183):

$$\text{III.} \ldots q = (Sq + Vq) = w + ix + jy + kz;$$

in ihr können die vier Skalare, $w\,x\,y\,z$, die vier Constituenten des Quaternions genannt werden. Und es ist augenscheinlich [vergl. 202, (5.) und 133], dass, wenn wir in gleicher Weise schreiben,

$$\text{IV.} \ldots q' = w' + ix' + jy' + kz',$$

wo $i\,j\,k$ dieselben drei gegebenen rechten Versoren (181) bezeichnen wie vorher, dann die Gleichung

$$\text{V.} \ldots q' = q$$

zwischen den beiden Quaternionen q und q' die folgenden vier skalar Gleichungen zwischen den Constituenten einschliesst:

$$\begin{aligned} \text{VI.} \ldots w' &= w, \\ x' &= x, \\ y' &= y, \\ z' &= z; \end{aligned}$$

Digitized by Google

und das rechtfertigt von Neuem (vergl. 112, 116) die Wahl des Namens „Quaternion“ für den allgemeinen Quotienten zweier Vectoren (101), wie wir sie in dem vorliegenden Kapitel getroffen haben.

222. Wenn wir die viergliedrige Grundform (221) annehmen, so haben wir nicht nur

$$\text{I.} \ldots Sq = w,$$

und

$$Vq = ix + jy + kz,$$

wie vorher, sondern auch, nach 204, XI.,

$$\text{II.} \ldots Kq = (Sq - Vq) = w - ix - jy - kz.$$

Und da die distributive Eigenschaft der Multiplication von Quaternionen (212), in Verbindung mit den Gesetzen der Symbole $i\,j\,k$ (182), oder mit der allgemeinen Grundformel unserer ganzen Rechenart (183), nämlich mit der Formel,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1,$$

die Transformation ergiebt,

$$\text{III.} \ldots (ix + jy + kz)^2 = -(x^2 + y^2 + z^2),$$

so haben wir, nach 204, u. s. w., die folgenden neuen Ausdrücke:

$$\text{IV.} \ldots NVq = (TVq)^2 = -Vq^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$\text{V.} \ldots TVq = \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)};$$

$$\text{VI.} \ldots UVq = (ix + jy + kz) : \sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)};$$

$$\text{VII.} \ldots Nq = Tq^2 = Sq^2 - Vq^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2;$$

$$\text{VIII.} \ldots Tq = \sqrt{(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)};$$

$$\text{IX.} \ldots Uq = (w + ix + jy + kz) : \sqrt{(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)};$$

$$\text{X.} \ldots SUq = w : \sqrt{(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)};$$

$$\text{XI.} \ldots VUq = (ix + jy + kz) : \sqrt{(w^2 + x^2 + y^2 + z^2)};$$

$$\text{XII.} \ldots TVUq = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}}.$$

(1.) Um die vorige Formel III. zu beweisen, können wir die verschiedenen Stufen der Multiplication (vergl. wieder 182) in folgender Weise vornehmen:

$$Vq = ix + jy + kz,$$
$$Vq = ix + jy + kz;$$

$$\begin{aligned} ix \,.\, Vq &= -x^2 + kxy - jxz; \\ jy \,.\, Vq &= -y^2 - kyx \qquad + iyz, \\ kz \,.\, Vq &= -z^2 \qquad + jzx - izy; \end{aligned}$$

$$Vq^2 = Vq \,.\, Vq = -x^2 - y^2 - z^2.$$

(2.) Wir haben daher,

$$\text{XIII.} \ldots (ix + jy + kz)^2 = -1,$$

wenn

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

ein Ergebniss, auf das wir schon hingewiesen* haben, in Verbindung mit der theilweisen Unbestimmtheit der Bedeutung des Symbols $\sqrt{-1}$ in der hier angewandten Rechenart, wenn es so aufgefasst wird, als ob es einen rechten Radial (149), oder einen rechten Versor (153), bezeichnet, dessen Ebne oder Achse willkürlich ist.

(3.) Wenn $q'' = q'q$, dann ist $Nq'' = Nq' \,.\, Nq$, nach 191, (8.); aber wenn $q = w +$ u. s. w., $q' = w' +$ u. s. w., $q'' = w'' +$ u. s. w., dann ist

$$\text{XIV.} \ldots \begin{cases} w'' = w'w - (x'x + y'y + z'z), \\ x'' = (w'x + x'w) + (y'z - z'y), \\ y'' = (w'y + y'w) + (z'x - x'z), \\ z'' = (w'z + z'w) + (x'y - y'x); \end{cases}$$

und umgekehrt, die vier skalar Gleichungen sind zusammen gleichbedeutend mit der quaternion Formel und können summirt werden zu

$$\text{XV.} \ldots w'' + ix'' + jy'' + kz'' = (w' + ix' + jy' + kz')\,(w + ix + jy + kz);$$

wir würden daher, unter den Bedingungen XIV., die Gleichung haben:

$$\text{XVI.} \ldots w''^2 + x''^2 + y''^2 + z''^2 = (w'^2 + x'^2 + y'^2 + z'^2)\,(w^2 + x^2 + y^2 + z^2);$$

sie kann in der That durch eine so leichte algebraische Rechnung verificirt werden, dass man ihre Richtigkeit fast aus dem

* Vergleiche die erste Anmerkung auf Seite 169; und diejenige auf Seite 208.

Digitized by Google

blossen Anblick der Formeln ersieht, wenigstens wenn die Einzelglieder in den vier viergliedrigen Ausdrücken $w'' \ldots z''$ so angeordnet* werden, wie es vorher geschehn ist.

223. Der hauptsächlichste Gebrauch, den wir hier von der viergliedrigen Grundform (221) machen werden, ist der, durch sie die allgemeine associative Eigenschaft der Multiplication von Quaternionen zu beweisen; und das kann jetzt mit grosser Leichtigkeit geschehn, nachdem die distributive** Eigenschaft (212) einer solchen Multiplication bereits bewiesen worden ist. In der That, wenn wir schreiben, wie in 222, (3.),

$$\text{I.} \ldots \begin{cases} q = w + ix + jy + kz, \\ q' = w' + ix' + jy' + kz', \\ q'' = w'' + ix'' + jy'' + kz'', \end{cases}$$

ohne jetzt anzunehmen, dass die Beziehung $q'' = q'q$, oder irgend eine andere Beziehung zwischen den drei Quaternionen q, q', q'' besteht, und untersuchen, ob wirklich die associative Formel,

$$\text{II.} \ldots q''q' \cdot q = q'' \cdot q'q,$$

besteht, so sehn wir, nach dem distributiven Princip, dass wir nur zu untersuchen haben, ob die letzte Formel gültig ist, wenn die drei quaternion Factoren q, q', q'' auf beiden Seiten der Gleichung in gleicher Weise und mit oder ohne Wiederholung durch die drei gegebenen rechten Versoren $i\,j\,k$ ersetzt werden; aber das haben wir schon in Art. 183 bewiesen. Wir kommen somit zu dem wichtigen Schluss, dass die allgemeine

---

* Bei einer etwas anderen Anordnung dieser Glieder hatte der Verfasser zuerst einen leichten Zweifel, ob sich bei der Entwicklung von $w''^2 +$ u. s. w. die vierundzwanzig Doppelproducte gegenseitig aufheben würden, so dass nur die sechszehn Producte der Quadrate übrig blieben, oder ob XVI. aus XIV. folgt, als er im Jahre 1843 darauf geführt wurde, das vorige Resultat durch Quaternionen vorwegzunehmen. Er bemerkte indessen, dass der algebraische Satz XVI., der von der quaternion Formel XV., mit der er hier in Verbindung gebracht ist, verschieden ist, bereits von dem berühmten Euler entdeckt worden ist.

* Auf einer späteren Stufe werde ich eine Skizze wenigstens eines Beweises des associativen Princips der Multiplication geben, welche das distributive Princip nicht voraussetzt.

Multiplication von Quaternionen eine associative Operation ist, so wie wir vorher gesehn (212) haben, dass sie distributiv ist. Wir hatten aber auch gefunden (168, 183, 191), dass eine solche Multiplication (im Allgemeinen) nicht commutativ ist; oder dass die beiden Producte $q'q$ und qq' im Allgemeinen ungleich sind. Wir können daher den Punkt fortlassen (wie in 183), und können jedes Glied der Gleichung II. durch das Symbol $q''q'q$ bezeichnen.

(1.) Es sei $v = Vq$, $v' = Vq'$, $v'' = Vq''$; so dass v, v', v'' irgend drei rechte Quaternionen sind; und es ist daher, nach 191, (2.), und 196, 204,

$$\begin{aligned} K v'v &= vv', \\ S v'v &= \tfrac{1}{2}(v'v + vv'), \\ V v'v &= \tfrac{1}{2}(v'v - vv'). \end{aligned}$$

Wir wollen den letzten Quaternion $v_,$ nennen, und es sei

$$S v'v = s_,,$$

so dass

$$v'v = s_, + v_,;$$

wir haben dann die Gleichungen,

$$\begin{aligned} 2\, V v''v_, &= v''v_, - v_,v''; \\ 0 &= v''s_, - s_,v''; \end{aligned}$$

und danach ist, durch Addition,

$$\begin{aligned} 2\, V v''v_, &= v''.v'v - v'v.v'' \\ &= (v''v' + v'v'')v - v'(v''v + vv'') \\ &= 2v\, S v'v'' - 2v'\, S v''v; \end{aligned}$$

und daher ist allgemein, wenn $v_,$ v' v'' wieder rechte sind, wie vorher,

$$\text{III.}\ldots\ V.v''\, Vv'v = v\, Sv'v'' - v'\, Sv''v;$$

mit dieser Formel mag sich der Leser völlig vertraut machen, wegen ihrer ausserordentlichen Nützlichkeit.

(2.) Nach den vorigen Bezeichnungen ist

$$V.\, v''Sv'v = Vv''s_, = v''s_, = v''Svv';$$

wir erhalten daher die weitere sehr nützliche Formel,

$$\text{IV.}\ldots\ V.v''v'v = v\, Sv'v'' - v'\, Sv''v + v''Svv';$$

hier kann der Punkt auf der linken Seite oft der Einfachheit

Digitized by Google

wegen fortgelassen werden; und ferner ist wieder angenommen, dass

$$\angle v = \angle v' = \angle v'' = \frac{\pi}{2}.$$

(3.) Die Formel III. ergiebt (nach 206),

$$\text{V.} \ldots IV.v''Vv'v = Iv.Sv'v'' - Iv'.Sv''v;$$

folglich ist dieser letzte Vector, der augenscheinlich mit den beiden Indices Iv und Iv' complanar ist, zu gleicher Zeit (nach 208) senkrecht zum dritten Index Iv'', und daher [nach (1.)] mit dem dritten Quaternion q'' complanar.

(4.) Nach den früheren Bezeichnungen ist der Vector,

$$\text{VI.} \ldots Iv_{,} = IVv'v = IV(Vq'.Vq),$$

(nach 208, XXII.) eine Linie senkrecht zu den beiden Indices Iv und Iv'; oder den Ebnen von q und q' gemeinsam; er hat auch die Eigenschaft, dass die Drehung um ihn vom Iv' zum Iv positiv ist, während seine Länge

$$TIv_{,}, \quad \text{oder } Tv_{,}, \quad \text{oder } TV.v'v, \quad \text{oder } TV(Vq'.Vq)$$

zur Längeneinheit dasselbe Verhältniss hat, in dem das Parallelogramm, dessen Seiten die Indices Iv und Iv' sind, zur Flächeneinheit steht.

(5.) Um den skalar Ausdruck zu deuten (vergl. IV.),

$$\text{VII.} \ldots Sv''v'v = Sv''v_{,} = S.v''Vv'v_{,}$$

(denn $Sv''s_{,} = 0$), können wir die Formel 208, V. anwenden; sie ergiebt die Transformation,

$$\text{VIII.} \ldots Sv''v'v = Tv''.Tv_{,}.\cos(\pi - x);$$

hier bezeichnet Tv'' die Länge der Linie Iv'', und $Tv_{,}$ stellt nach (4.) die (positiv genommene) Fläche des Parallelogramms mit den Seiten Iv' und Iv dar; während x (nach 208) der Winkel zwischen den beiden Indices Iv'' und $Iv_{,}$ ist. Dieser Winkel wird stumpf und daher der Cosinus seines Supplements positiv sein, und gleich dem Sinus der Neigung der Linie Iv'' zur Ebne von Iv und Iv', wenn die Drehung um Iv'' von Iv' nach Iv negativ ist, das heisst, wenn die Drehung um Iv von Iv' nach Iv'' positiv ist; dagegen ist der Cosinus gleich dem vorigen Sinus mit negativen Vorzeichen genommen, wenn die

Richtung dieser Drehung die umgekehrte ist. Wir haben daher die wichtige Deutung:

IX. . . $Sv''v'v = \pm$ dem Inhalt des Parallelpipeds mit den Seiten Iv, Iv', Iv'';

das obere oder untere Vorzeichen wird genommen, je nachdem die Drehung um Iv, von Iv' nach Iv'', in positiver oder negativer Richtung stattfindet.

(6.) Zum Beispiel, wir sahn, dass die dreigliedrigen Producte ijk und kji skalar Werthe haben, nämlich,

$$ijk = -1, \quad kji = +1, \qquad \text{nach 183, (1.), (2.);}$$

und das Parallelepiped der Indices wird daher in diesem Falle ein Einheitswürfel; während die Drehung um den Index von i, von dem Index von j zu dem von k, positiv (181) ist.

(7.) Im Allgemeinen haben wir, für irgend drei rechte Quaternionen $vv'v''$, die Formel,

X. . . $$Svv'v'' = -Sv''v'v;$$

und wenn die drei Indices complanar sind, so dass das in IX. erwähnte Volumen verschwindet, so wird jeder der beiden letzten Skalare null; so dass wir schreiben können, als eine neue Formel für die Complanarität:

XI. . . $Sv''v'v = 0$, wenn $Iv'' \mid\mid Iv', Iv$ (123);

während andrerseits dieser Skalar in keinem anderen Falle verschwinden kann, wenn die Quaternionen (oder deren Indices) wieder als wirklich (1, 144) vorausgesetzt werden; denn dann stellt er ein wirkliches Volumen dar.

(8.) Daher können wir auch die folgende Formel der Collinearität, für irgend drei Quaternionen, aufstellen:

XII. . . $$S(Vq''.Vq'.Vq) = 0,$$

wenn

$$IVq'' \mid\mid\mid IVq', IVq;$$

das heisst, nach 209, wenn die Ebnen von q, q', q'' eine gemeinsame Linie haben.

(9.) Im Allgemeinen ergeben die Gesetze (182, 183) der Symbole i, j, k, wenn wir die dreigliedrige Grundform 221, II. anwenden, nämlich,

$$v = Vq = ix + jy + kz,$$
$$v' = ix' + \text{u. s. w.},$$
$$v'' = ix'' + \text{u. s. w.},$$

die Transformation,

$$\text{XIII.} \ldots \quad Sv''v'v = x''(z'y - y'z) + y''(x'z - z'x) + z''(y'x - x'y);$$

und folglich ist dies der bekannte Ausdruck für das (mit passendem Vorzeichen genommene) Volumen des Parallelepipeds, welches die drei Linien OP, OP', OP'' zu drei coinitialen Kanten hat, wenn die rechtwinkligen Coordinaten der vier Ecken, O, P, P', P'' sind 000, xyz, $x'y'z'$, $x''y''z''$.

Dieses Ergebniss kann als Beispiel dienen für die Art, wie Quaternionen, obwohl sie nicht auf irgend einer der gebräuchlichen Coordinatenmethoden beruhn, doch benutzt werden können, um wichtige Coordinatenausdrücke, und zwar oft mit grosser Leichtigkeit, abzuleiten oder wiederzufinden.

(10.) Ferner mag als eine weitere wichtige Folge der allgemeinen associativen Eigenschaft der Multiplication hier bemerkt werden, dass, obwohl Producte von mehr als zwei Quaternionen im Allgemeinen für alle möglichen Permutationen der Factoren nicht gleiche Skalare haben, denn wir haben eben einen Fall X. gesehn, in dem eine solche Aenderung der Anordnung einen Wechsel des Vorzeichens im Resultat bewirkt, doch eine cyklische Permutation unter dem Zeichen S erlaubt ist; oder in Zeichen, dass für irgend drei Quaternionen (und das Resultat lässt sich leicht auf irgend eine grössere Anzahl solcher Factoren ausdehnen) die folgende Formel statt hat:

$$\text{XIV.} \ldots \quad Sq''q'q = Sqq''q'.$$

In der That, um diese Gleichung zu beweisen, brauchen wir sie nur in folgender Weise zu schreiben,

$$\text{XIV.}' \ldots \quad S(q''q' \cdot q) = S(q \cdot q''q'),$$

und haben nur daran zu denken, dass der Skalar des Products irgend zweier Quaternionen ungeändert bleibt (198, I.), wenn die Anordnung der beiden Factoren geändert wird.

(11.) Ebenso kann, nach 192, II., geschlossen werden, dass

$$\text{XV.}\ldots\ K q'' q' q = K(q''.q' q) = Kq' q, Kq'' = Kq . Kq' . Kq'',$$

und ein entsprechendes Resultat ergiebt sich für irgend eine grössere Anzahl von Factoren; wenn daher Πq und $\Pi' q$ die Producte irgend einer Reihe von Quaternionen in zwei entgegengesetzten Aufeinanderfolgen genommen bedeuten, so können wir, nach 192, I, schreiben,

$$\text{XVI.}\ldots\ K\Pi q = \Pi' Kq;$$
$$\text{XVII.}\ldots\ R\Pi q = \Pi' Rq.$$

(12.) Aber wenn v ein rechter Quaternion ist, wie vorher, dann ist $Kv = -v$, nach 144; folglich ist

$$\text{XVIII.}\ldots\ K\Pi v = \pm \Pi' v;$$
$$\text{XIX.}\ldots\ S\Pi v = \pm S\Pi' v;$$
$$\text{XX.}\ldots\ V\Pi v = \mp V\Pi' v;$$

das obere oder untere Vorzeichen wird genommen, je nachdem die Anzahl der rechten Factoren grade oder ungrade ist; und unter denselben Bedingungen ist,

$$\text{XXI.}\ldots\ S\Pi v = \tfrac{1}{2}(\Pi v \pm \Pi' v);$$
$$\text{XXII.}\ldots\ V\Pi v = \tfrac{1}{2}(\Pi v \mp \Pi' v);$$

wie ich eben (1.) an einem Beispiel ausgeführt habe, für den Fall, dass die Anzahl zwei ist.

(13.) Für den Fall, dass die Anzahl drei ist, ergeben die vier letzten Formeln,

$$\text{XXIII.}\ldots\ Sv''v'v = -Svv'v'' = \tfrac{1}{2}(v''v'v - vv'v'');$$
$$\text{XXIV.}\ldots\ Vv''v'v = +Vvv'v'' = \tfrac{1}{2}(v''v'v + vv'v'');$$

Resultate, die ersichtlich mit X. und IV. übereinstimmen.

224. Für den Fall complanarer Quaternionen (119) gewährt die Möglichkeit, einen jeden (120) auf die Form eines Bruches (101) zu bringen, der nach Belieben irgend eine beliebige Linie in der gegebenen Ebne zu seinem Nenner oder zu seinem Zähler hat, eine besondere Leichtigkeit, die commutative und associative Eigenschaft der Addition (207) und die distributive und associative Eigenschaft der Multiplication (212, 223) zu beweisen; während wir für den Fall der Multiplication von Quaternionen schon gesehn haben [191, (1.)], dass

Digitized by Google

die commutative Eigenschaft ebenfalls statt hat, wie es bei der algebraischen Multiplication der Fall ist. Es wird daher nicht unerheblich oder nutzlos sein, hier ein kurzes zweites Kapitel über solche complanare Quaternionen anzuschliessen; während wir sie kurz behandeln, unter der Voraussetzung, dass das Vorhandensein aller vorhergehenden Eigenschaften bereits bewiesen ist, werden wir Gelegenheit haben, einiges über Potenzen und Wurzeln und Logarithmen zu sagen und über den Zusammenhang der Quaternionen mit der ebnen Trigonometrie und mit algebraischen Gleichungen. Danach beabsichtige ich im dritten und letzten Kapitel dieses zweiten Theiles in raschem Ueberblick die Betrachtung diplanarer Quaternionen aufzunehmen; und besonders zu zeigen, wie das associative Princip der Multiplication für sie aufgestellt werden kann, ohne* das distributive Princip zu benutzen.

Kapitel II.

Ueber complanare Quaternionen, oder Quotienten von Vectoren, die in einer Ebne liegen; und über Potenzen, Wurzeln und Logarithmen von Quaternionen.

Erster Abschnitt.

Ueber das complanare Verhältniss von Vectoren; über die vierte Proportionale zu dreien, die dritte Proportionale zu zweien, die mittlere Proportionale und über die Quadratwurzel; allgemeine Zurückführung eines Quaternions in einer gegebenen Ebne auf eine zweigliedrige Grundform.

225. Die Quaternionen, welche in diesem Kapitel vorkommen, werden wir sämmtlich als complanar (119) annehmen; ihre gemeinsame Ebne möge mit derjenigen des gegebenen rechten Versors i (181) zusammenfallen. Und wir denken uns alle Linien oder Vectoren, wie α, β, γ, u. s. w., oder α_0,

* Vergleiche die zweite Anmerkung auf Seite 313.

α_1, α_2, u. s. w., die wir hier anwenden, in der gegebenen Ebne von i; so dass wir, für die Zwecke dieses Kapitels, die Formel für die Complanarität (nach 123) schreiben können:

$$q \parallel\parallel q' \parallel\parallel q'' \ldots \parallel\parallel i;$$
$$\alpha \parallel\parallel i; \quad \beta \parallel\parallel i; \qquad \alpha_0 \parallel\parallel i, \text{ u. s. w.}$$

226. Unter diesen Bedingungen können wir stets (nach 103, 117) irgend ein Symbol von der Form $(\beta : \alpha) . \gamma$ als Bezeichnung einer Linie δ in der gegebenen Ebne deuten; diese Linie kann auch durch das Symbol $(\gamma : \alpha) . \beta$ bezeichnet (125) werden, aber nicht* (vergl. 103) durch eines der beiden scheinbar gleichbedeutenden Symbole, $(\beta . \gamma) : \alpha$, $(\gamma . \beta) : \alpha$; wir können daher schreiben,

$$\text{I.} \ldots \delta = \frac{\beta}{\alpha} \gamma = \frac{\gamma}{\alpha} \beta,$$

und können sagen, dass die Linie δ die vierte Proportionale zu den drei Linien α, β, γ ist; oder zu den drei Linien α, γ, β; die beiden mittleren, β und γ, irgend eines solchen complanaren Verhältnisses von vier Vectoren können somit vertauscht werden, wie in der Algebra. Unter denselben Bedingungen können wir auch (nach 125) schreiben,

$$\text{II.} \ldots \alpha = \frac{\beta}{\delta} \gamma = \frac{\gamma}{\delta} \beta;$$
$$\beta = \frac{\alpha}{\gamma} \delta = \frac{\delta}{\gamma} \alpha;$$
$$\gamma = \frac{\delta}{\beta} \alpha = \frac{\alpha}{\beta} \delta;$$

so dass (ebenfalls wie in der Algebra) die beiden Aeusseren, α und δ, irgend eines solchen Verhältnisses von vier Linien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gleichfalls ihre Stellen unter einander vertauschen können; und wir können auch die Mittleren zu Aeusseren machen, wenn wir zu gleicher Zeit die Aeusseren mit den Mittleren vertauschen. Allgemeiner, wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ irgend eine ungrade Anzahl von Vectoren in der gegebenen Ebne

* In der That haben wir bis jetzt den Symbolen $\beta . \gamma$, $\gamma . \beta$, oder $\beta\gamma$, $\gamma\beta$, noch keine Bedeutung beigelegt; und selbst wenn wir dahin kommen werden, sie als die Darstellungen gewisser Quaternionen zu deuten, so werden wir finden (vergl. 168), dass die beiden Combinationen, $\frac{\beta}{\alpha} \gamma$ und $\frac{\beta\gamma}{\alpha}$, im Allgemeinen verschiedene Bedeutungen haben.

Digitized by Google

sind, so können wir stets einen anderen Vector ϱ in dieser Ebne finden, welcher der Gleichung,

$$\text{III.}\ldots \qquad \ldots \frac{\varepsilon}{\delta}\frac{\gamma}{\beta}\alpha = \varrho,$$

oder

$$\text{III.}'\ldots \qquad \ldots \frac{\varepsilon}{\delta}\frac{\gamma}{\beta}\frac{\alpha}{\varrho} = 1,$$

genügt; und wenn eine solche Formel für irgend eine Anordnung der Zählerlinien $\alpha, \gamma, \varepsilon, \ldots$ und der Nennerlinien $\varrho, \beta, \delta, \ldots$ statt hat, so lässt sich leicht beweisen, dass sie auch für irgend eine andere Anordnung der Zähler und für irgend eine andere Anordnung der Nenner stattfindet. Zum Beispiel, welche vier (complanaren) Vectoren durch $\beta\gamma\delta\varepsilon$ auch bezeichnet werden mögen, wir haben die Transformationen

$$\text{IV.}\ldots \frac{\varepsilon}{\delta}\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\varepsilon}{\delta}\gamma : \beta = \frac{\gamma}{\delta}\varepsilon : \beta = \frac{\gamma}{\delta}\frac{\varepsilon}{\beta};$$

die beiden Zähler sind somit vertauscht. Ferner ist

$$\text{IV.}'\ldots \frac{\varepsilon}{\delta}\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{\beta}\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\beta}\frac{\gamma}{\delta}, \text{ nach IV.};$$

so dass die beiden Nenner ebenfalls ihre Stellen wechseln können.

227. Ein interessanter Fall einer solchen Proportion (226) ist derjenige, wenn die Mittleren zusammenfallen; so dass nur drei verschiedene Linien, zum Beispiel α, β, γ, vorkommen; wir haben dann (vergl. Art. 149, und Fig. 42) eine Gleichung von der Form,

$$\text{I.}\ldots \gamma = \frac{\beta}{\alpha}\beta,$$

oder

$$\alpha = \frac{\beta}{\gamma}\beta,$$

aber nicht* $\gamma = \beta\beta : \alpha$, und auch nicht $\alpha = \beta\beta : \gamma$. In diesem Falle sagt man, die drei Linien $\alpha\beta\gamma$ bilden eine stetige Proportion; ihre äusseren Glieder sind jetzt α und γ, und β ist das mittlere Glied; die Linie β heisst auch eine** mittlere Propor-

* Vergleiche die Anmerkung zum vorhergehenden Artikel.

** Wir sagen eine mittlere Proportionale; denn wir werden sogleich sehn, dass die entgegengesetzte Linie, $-\beta$, in demselben Sinne eine andere mittlere Proportionale ist; obwohl wir augenblicklich eine Regel geben werden,

Digitized by Google

tionale zwischen den beiden anderen, α und γ; während γ die dritte Proportionale zu den beiden Linien α und β ist; und α ist zu gleicher Zeit die dritte Proportionale zu γ und β. Unter denselben Bedingungen haben wir

$$\text{II.} \ldots \beta = \frac{\alpha}{\beta}\gamma = \frac{\gamma}{\beta}\alpha;$$

so dass die mittlere β, zwischen α und γ, auch die vierte Proportionale (226) zu sich selbst, als erster, und zu den beiden anderen Linien ist. Wir haben auch (vergl. wieder 149),

$$\text{III.} \ldots \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{\alpha}{\gamma};$$

folglich ist es naturgemäss zu schreiben,

$$\text{IV.} \ldots \frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad \frac{\beta}{\gamma} = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}},$$

und daher (nach 103),

$$\text{V.} \ldots \beta = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha, \qquad \beta = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma;$$

aber wir können hier nicht schreiben $\beta = (\gamma\alpha)^{\frac{1}{2}}$, noch $\beta = (\alpha\gamma)^{\frac{1}{2}}$. Aber da wir stets, wie in der Algebra [vergl. 199, (3.)], die Gleichung oder die Identität, $(-q)^2 = q^2$, haben, so sind wir ebenso wohl berechtigt zu schreiben,

$$\text{VI.} \ldots \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{\gamma}{\alpha}, \qquad \left(\frac{-\beta}{\gamma}\right)^2 = \frac{\alpha}{\gamma},$$
$$-\beta = \left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha = \left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\gamma;$$

das Symbol $q^{\frac{1}{2}}$ bezeichnet somit, im Allgemeinen, den einen von zwei entgegengesetzten Quaternionen; der eine von ihnen, nämlich derjenige, dessen Winkel ein spitzer ist, ist schon in 199, (1.) als derjenige ausgewählt worden, den wir die Quadratwurzel des Quaternions q nennen und mit $\sqrt{q}$ bezeichnen wollen. Wir können daher die Formel aufstellen,

$$\text{VII.} \ldots \beta = \pm\sqrt{\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)}.\alpha = \pm\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}.\gamma,$$

zwischen ihnen zu unterscheiden, und eine als diejenige auswählen werden, die wir, in besonderem Sinne, die mittlere Proportionale nennen wollen.

Digitized by Google

wenn α, β, γ, wie vorher, eine stetige Proportion bilden; die oberen Vorzeichen werden genommen, wenn (wie in Fig. 42) der Winkel AOC, zwischen den äusseren Linien α, γ, durch die Linie OB, oder β, selbst halbirt wird; die unteren Vorzeichen dagegen, wenn dieser Winkel durch die entgegengesetzte Linie $-\beta$ halbirt wird, oder wenn β den zugehörigen Scheitelwinkel [vergl. wieder 199, (3.)] halbirt. Die Proportion der Tensoren,

$$\text{VIII.} \ldots T\gamma : T\beta = T\beta : T\alpha,$$

und die sich ergebenden Formeln,

$$\text{IX.} \ldots T\beta^2 = T\alpha \,.\, T\gamma,$$
$$T\beta = \sqrt{(T\alpha \,.\, T\gamma)},$$

finden in jedem Falle statt. Und wenn wir einfach von der mittleren Proportionalen zwischen zwei Vectoren α und γ sprechen werden, die irgend einen spitzen oder rechten oder stumpfen Winkel mit einander machen, so werden wir hinfort stets die erstere der beiden Halbirungslinien darunter verstehn; nämlich die Halbirungslinie OB des Winkels AOC selbst, und nicht diejenige des entgegengesetzten Winkels; wir nehmen somit die oberen Vorzeichen in der vorigen Formel VII.

(1.) Im Grenzfall, wenn der Winkel AOC verschwindet, so dass $U\gamma = U\alpha$, ist $U\beta =$ jeder der beiden Einheitslinien; und die mittlere Proportionale β hat dieselbe gemeinsame Richtung, wie jede der beiden gegebenen äusseren Linien. Wir können somit schreiben

$$\text{X.} \ldots \sqrt{1} = +1,$$

und allgemein,

$$\text{X}' \ldots \sqrt{(a^2)} = +a,$$

wenn a irgend ein positiver Skalar ist.

(2.) Im zweiten Grenzfall, wenn $AOC = \pi$, oder $U\gamma = -U\alpha$, ist die Länge der mittleren Proportionale β noch durch IX. bestimmt, als das geometrische Mittel (in dem üblichen Sinne) zwischen den Längen der beiden gegebenen äusseren (vergl. die beiden Figuren 41) Linien; aber auch mit der angenommenen Beschränkung (225) auf die Ebne, in der alle diese Linien gelegen sein sollen, entsteht in diesem Falle eine Unbestimmtheit aus dem Zweifel, welche der beiden zu einander entgegen-

gesetzten Lothe in O, auf der Linie AOC, als die Richtung des mittleren Vectors genommen werden soll. Um diese Unbestimmtheit zu beseitigen, wollen wir annehmen, dass die Drehung um die Achse von i (einer Linie, zu der alle in diesem Kapitel betrachteten Linien, nach 225, senkrecht sind) von der ersten Linie OA zur zweiten Linie OB in diesem Falle positiv ist; und diese Annahme ist gleichbedeutend damit, für die gegenwärtigen Zwecke zu schreiben,

$$\text{XI.}^*\ldots \sqrt{-1} = +i;$$

und

$$\text{XI.}'\ldots \sqrt{(-a^2)} = ia, \quad \text{wenn } a > 0.$$

Und somit ist die mittlere Proportionale zwischen zwei Vectoren (in der gegebenen Ebne) in allen Fällen bestimmt; wenigstens wenn ihre Anordnung (als erste und dritte) gegeben wird.

(3.) Wenn die Beschränkung (225) der Linien auf eine gemeinsame Ebne beseitigt wird, dann könnten wir, in dem früheren Sinne (227), sowohl die Richtung, als die Länge der mittleren Linie OB in jedem Falle bestimmt festsetzen, ausser in einem; dieser Ausnahmefall ist derjenige, in welchem, wie in (2.), die beiden gegebenen äusseren Linien, OA, OC, genau entgegengesetzte Richtungen haben; so dass der Winkel ($AOC = \pi$) zwischen ihnen nicht eine bestimmte Halbirungslinie hat. In diesem Falle würde der gesuchte Punkt B nicht eine bestimmte Lage, sondern nur einen bestimmten Ort haben; nämlich den Umfang eines Kreises, dessen Mittelpunkt O ist und dessen Radius gleich dem geometrischen Mittel zwischen $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ wäre, während seine Ebne senkrecht zur gegebenen graden Linie AOC sein würde. (Vergl. wieder die Figuren 41; und die Bemerkungen in 148, 149, 153, 154 über das Quadrat eines rechten Radials, oder Versors, und über den theilweise unbestimmten Charakter der Quadratwurzel eines negativen Skalars, wenn sie, im Sinne unserer Rechenart, als eine reelle Grösse in der Geometrie gedeutet wird.)

---

* Es ist sorgfältig zu beachten, dass diese Quadratwurzel aus der negativen Einheit nicht in irgend einem Sinne imaginär oder irgendwie in ihrer geometrischen Deutung unbestimmt ist, sondern dass sie einen reellen und gegebenen rechten Versor (181) bedeutet.

Digitized by Google

228. Der Quotient irgend zweier complanaren und rechten Quaternionen war, wie wir gesehn haben [191, (6.)], ein Skalar; folglich ist, wenn wir hier annehmen (225), dass $q \parallel\!\!\parallel i$ ist, gestattet zu schreiben,

$$\text{I.} \ldots Sq = x; \qquad Vq : i = y;$$
$$Vq = yi = iy;$$

und wir können daher die folgende Zurückführung eines Quaternions in der gegebenen Ebne (der von i) auf eine zweigliedrige Grundform* (vergl. 221) aufstellen:

$$\text{II.} \ldots q = x + iy, \qquad \text{wenn } q \parallel\!\!\parallel i;$$

x und y sind zwei bestimmte Skalare, welche die beiden Constituenten (vergl. wieder 221) der zweigliedrigen Grundform genannt werden können. Und dann zerlegt sich eine Gleichung zwischen zwei Quaternionen, diese als Binome von der vorigen Form aufgefasst, eine Gleichung wie die folgende,

$$\text{III.} \ldots q' = q,$$

oder

$$\text{III.}' \ldots x' + iy' = x + iy,$$

[nach 202, (5.)], in zwei skalar Gleichungen zwischen ihren bezüglichen Constituenten, nämlich in die Gleichungen,

$$\text{IV.} \ldots x' = x, \qquad y' = y,$$

ungeachtet der geometrischen Realität des rechten Versors i.

(1.) Vergleicht man die vorigen Gleichungen II., III., IV. mit denjenigen, welche in 221 mit III., V., VI. bezeichnet wurden, so sieht man, dass man bei einem solchen Uebergang von allgemeinen zu complanaren Quaternionen nur die Coëfficienten von j und k zu unterdrücken braucht, da sie für unseren gegenwärtigen Zweck null sind; und wir haben dann x und y anstatt w und x zu schreiben.

(2.) Da das Wort „Binom“ andere Bedeutungen in der Algebra hat, so mag es angemessen sein, die Form II. ein Paar zu nennen; und die beiden skalar Constituenten x und y,

* Es ist erlaubt, nach 227, XI., diesen Ausdruck $x + y\sqrt{-1}$ zu schreiben; aber die Form $x + iy$ ist kürzer, und vielleicht irgend welcher Zweideutigkeit der Bedeutung weniger ausgesetzt.

deren Werthe dazu dienen, ein solches Paar von einem anderen zu unterscheiden, können nicht ohne natürlichen Grund die Coordinaten dieses Paares genannt werden, und zwar aus einem Grunde, den anzugeben von Nutzen ist.

(3.) Man denke sich also, dass die Ebne der Fig. 50 mit derjenigen von i zusammenfällt, und dass die positive Drehung um Ax. i, in dieser Figur, linksläufig ist; das kann mit unserer allgemeinen Uebereinkunft (127) in Einklang gebracht werden, wenn man sich vorstellt, dass die Achse von i von O aus nach der Rückseite der Figur geht; oder nach unten*, wenn sie horizontal ist. Nimmt man das an und fällt die Senkrechten BB', BB'' (wie in der Figur) auf die unbegrenzte Linie OA selbst, und auf eine Normale zu dieser Linie in O, eine Normale, die wir OA' nennen wollen, und von der wir annehmen können, dass sie eine Länge gleich derjenigen von OA habe, und dass die Drehung AOA' linksläufig sei, so dass

$$\text{V.}\ldots\ OA' = i.OA,$$

oder kurz,

$$\text{V}'\ldots\ \alpha' = i\alpha,$$

während

$$\beta' = OB',$$

und

$$\beta'' = OB'',$$

wie in 201, und dass

$$q = \beta : \alpha, \quad \text{wie in 202;}$$

dann ergiebt ein Vergleich des Quaternions q mit der zweigliedrigen Form II., auf welcher Seite der unbegrenzten graden Linie OA der Punkt B auch liegen mag, die beiden Gleichungen,

$$\text{VI.}\ldots\ x\,(= Sq) = \beta' : \alpha,$$
$$y\,(= Vq : i = \beta'' : i\alpha) = \beta'' : \alpha';$$

so dass die beiden Skalare x und y, gradezu die beiden rechtwinkligen Coordinaten des Punktes B in Bezug auf die beiden Linien OA und OA', als auf zwei rechtwinklige Einheitsachsen von der gewöhnlichen (oder Cartesianischen) Art, sind. Und da jeder andere Quaternion, $q' = x' + iy'$, in der gegebenen Ebne auf die Form $\gamma : \alpha$, oder $OC : OA$ gebracht

* Vergleiche die erste Anmerkung auf Seite 142.

Digitized by Google

werden kann, wo C ein Punkt in dieser Ebne ist, der auf C' und C'' auf demselben Wege (vergl. 197, 205) projicirt werden kann, so sehn wir, dass die beiden neuen Skalare, oder Constituenten, x' und y', einfach aus demselben Grunde die Coordinaten des neuen Punktes C sind, in Bezug auf dasselbe Achsenpaar.

(4.) Es ist augenscheinlich (nach den Sätzen des vorigen Kapitels), dass, wenn wir in dieser Weise als Paare (2.) irgend zwei complanare Quaternionen, q und q', ausdrücken, wir die folgenden allgemeinen Transformationen für ihre Summe, ihre Differenz und ihr Product haben werden:

$$\text{VII.} \ldots q' \pm q = (x' \pm x) + i(y' \pm y);$$
$$\text{VIII.} \ldots q' \cdot q = (x'x - y'y) + i(x'y + y'x).$$

(5.) Ferner haben wir, für irgend ein solches Paar, q, nicht nur (vergl. 222) $Sq = x$, und $Vq = iy$, wie vorher, sondern auch,

$$\text{IX.} \ldots Kq = x - iy, \qquad \text{X.} \ldots Nq = x^2 + y^2;$$
$$\text{XI.} \ldots Tq = \sqrt{(x^2 + y^2)};$$
$$\text{XII.} \ldots Uq = \frac{x + iy}{\sqrt{(x^2 + y^2)}};$$
$$\text{XIII.} \ldots \frac{1}{q} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}; \text{ u. s. w.}$$

(6.) Folglich haben wir, für den Quotienten irgend zweier solchen Paare,

$$\text{XIV.} \ldots \begin{cases} \dfrac{q'}{q} = \dfrac{x' + iy'}{x + iy} = \dfrac{x'' + iy''}{x^2 + y^2}, & x'' + iy'' = q' Kq, \\ x'' = x'x + y'y, & y'' = y'x - x'y. \end{cases}$$

(7.) Das Gesetz für die Normen [191, (8.)], oder die Formel, $Nq'q = Nq' \cdot Nq$, ist [vergl. 222, (3.)] durch die wohlbekannte algebraische Gleichung, oder Identität, ausgedrückt,

$$\text{XV.} \ldots (x'^2 + y'^2)(x^2 + y^2) = (x'x - y'y)^2 + (x'y + y'x)^2;$$

in der $xyx'y'$ irgend welche vier Skalare sein können.

Zweiter Abschnitt.

Ueber stetige Proportion von vier oder mehr Vectoren; ganze Potenzen und Wurzeln von Quaternionen; und über Wurzeln der Einheit.

229. Der Begriff einer stetigen Proportion (227) kann leicht von drei auf vier oder mehr (complanare) Vectoren aus-

gedehnt werden; und man kann somit eine Theorie der Cuben und höheren ganzen Potenzen von Quaternionen bilden, und ebenso auch eine entsprechend ausgedehnte Theorie der Wurzeln von Quaternionen, welche Wurzeln von Skalaren, und im Besondern Wurzeln der Einheit, einschliesst. Wenn wir also annehmen, dass die vier Vectoren $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ eine stetige Proportion bilden, welche durch die Formeln ausgedrückt wird,

$$\text{I.}\ldots\ \frac{\delta}{\gamma} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{\beta}{\alpha},\ \text{und folglich}\ \text{II.}\ldots\ \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}\,\frac{\gamma}{\beta}\,\frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3$$

(nach einer leicht verständlichen Erweiterung der gebräuchlichen algebraischen Bezeichnungsweise), so können wir sagen, dass der Quaternion $\delta : \alpha$ der Cubus, oder die dritte Potenz, von $\beta : \alpha$ ist; und dass der letztere Quaternion umgekehrt eine Cubikwurzel (oder dritte Wurzel) des ersten ist; diese letztere Beziehung kann naturgemäss dadurch bezeichnet werden, dass man schreibt,

$$\text{III.}\ldots\ \frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}},$$

oder

$$\text{III.}'\ldots\ \beta = \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha \quad \text{(vergl. 227, IV., V.).}$$

230. Es ist von Wichtigkeit zu beachten, dass ebenso wie die Gleichung $q^2 = Q$, in der q ein gesuchter und Q ein gegebener Quaternion ist, durch zwei entgegengesetzte Quaternionen q, von der Form $\pm\sqrt{Q}$ (vergl. 227, VII.), befriedigt wird, so die nur etwas weniger einfache Gleichung $q^3 = Q$ durch drei verschiedene und reelle Quaternionen befriedigt wird, wenn Q wirklich und reell ist; jeder von ihnen, dividirt durch einen der beiden anderen, ergiebt als Quotienten einen reellen Quaternion, der gleich einer von den Cubikwurzeln der positiven Einheit ist. In der That, wenn wir uns vorstellen (vergleiche S. 329, Fig. 54), dass β' und β'' zwei andere, aber gleich lange Vectoren in der gegebenen Ebne sind, die man aus β durch zwei aufeinander folgende und positive Drehungen erhält, von denen jede den dritten Theil eines Kreisumfangs beträgt, so dass

$$\text{IV.}\ldots\ \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\beta'}{\beta''} = \frac{\beta''}{\beta},$$

Digitized by Google

oder

$$\text{IV.}\ldots\quad \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\beta'}{\beta''} = \frac{\beta''}{\beta},$$

und daher

$$\text{V.}\ldots\quad \left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^3 = \left(\frac{\beta''}{\beta}\right)^3 = 1,$$

während

$$\text{V.}'\ldots\quad \frac{\beta''}{\beta} = \left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^3, \qquad \frac{\beta'}{\beta} = \left(\frac{\beta''}{\beta}\right)^2,$$

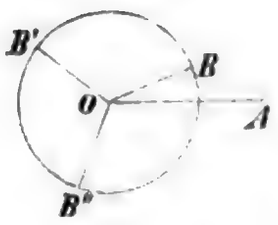
so haben wir

$$\text{VI.}\ldots\quad \left(\frac{\beta'}{\alpha}\right)^3 = \left(\frac{\beta'}{\beta}\right)^3\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^3 = \frac{\delta}{\alpha},$$

und

$$\text{VI.}'\ldots\quad \left(\frac{\beta''}{\alpha}\right)^3 = \frac{\delta}{\alpha};$$

Fig. 84.



so dass wir auf dieser Stufe gleichfalls berechtigt sind, statt III. oder III.′ die folgenden anderen Gleichungen zu schreiben:

$$\text{VII.}\ldots\quad \frac{\beta'}{\alpha} = \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \beta' = \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha;$$

oder

$$\text{VII.}'\ldots\quad \frac{\beta''}{\alpha} = \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad \beta'' = \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{3}}\alpha.$$

231. Man kann somit sagen, dass ein (reeller und wirklicher) Quaternion Q drei (reelle, wirkliche und) verschiedene Cubikwurzeln hat; von denen indessen nur eine einen Winkel kleiner als sechzig Grad haben kann, während keine einen Winkel gleich sechzig Grad haben kann, wenn nicht der gegebene Quaternion Q zu einem negativen Skalar entartet. In jedem anderen Falle kann eine der drei Cubikwurzeln von Q, oder einer der drei Werthe des Symbols $Q^{\frac{1}{3}}$, als einfacher als jeder der beiden anderen angesehn werden, denn er hat einen kleineren Winkel [vergl. 199, (1.)]; und wenn wir diesen einen, den wir die Hauptcubikwurzel des Quaternions Q nennen wollen, für jetzt durch das Symbol $\sqrt[3]{Q}$ bezeichnen, so können wir die folgende Formel für Ungleichheit aufstellen,

$$\text{VIII.}\ldots\quad \angle\sqrt[3]{Q} < \frac{\pi}{3}, \quad \text{wenn } \angle Q < \pi.$$

232. Im Grenzfall, wenn Q wie vorher zu einem negativen

Skalar wird, ist eine seiner Cubikwurzeln selbst ein negativer Skalar, und ihr Winkel ist daher $= \pi$; während der Winkel jeder der beiden anderen Wurzeln $= \frac{\pi}{3}$ ist. In diesem Falle wollen wir diejenige unter den beiden Wurzeln, deren Winkel einander gleich sind und kleiner als der des dritten, als die einfachere und daher als Hauptwurzel ansehn, die einer positiven Drehung um sechzig Grad entspricht [vergl. 227, (2.)]; und so werden wir dazu geführt zu schreiben,

$$\text{IX.}\ldots \sqrt[3]{-1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}; \text{ und } \text{X.}\ldots \angle \sqrt[3]{-1} = \frac{\pi}{3};$$

indem wir das positive Vorzeichen für die Wurzel $\sqrt{3}$, mit der i in dem Ausdruck IX. für $2\sqrt[3]{-1}$ multiplicirt ist, anwenden; und wir haben die damit in Verbindung stehende Formel,

$$\text{IX.}'\ldots \sqrt[3]{(-a^3)} = \frac{a}{2}(1+i\sqrt{3}), \quad \text{wenn } a > 0;$$

obwohl es auf den ersten Anblick natürlicher geschienen hätte, als Hauptwurzel den skalar Werth anzunehmen, und somit zu schreiben,

$$\sqrt[3]{-1} = -1;$$

ein Werth, der in der That einer der Werthe des Symbols $(-1)^{\frac{1}{3}}$ ist.

(1.) Wir haben indessen, in unserem Sinne wie in der Arithmetik,

$$\text{XI.}\ldots \sqrt[3]{1} = 1;$$

und

$$\text{XI.}'\ldots \sqrt[3]{(a^3)} = a, \text{ wenn } a > 0.$$

(2.) Die Gleichungen

$$\text{XII.}\ldots \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = -1,$$

und

$$\text{XIII.}\ldots \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = +1,$$

können durch Rechnung verificirt werden, indem man wirklich in die dritte Potenz erhebt, grade wie in der Algebra; der einzige Unterschied betrifft die Auffassung der Zeichen, denn obwohl i der Gleichung $i^2 = -1$ genügt, so wird es hier doch

Digitized by Google

als vollkommen reell betrachtet; nämlich als ein reeller rechter Versor* (181).

233. Es hat keine Schwierigkeit sich vorzustellen, wie dieselben allgemeinen Grundsätze auf eine stetige Proportion von $n+1$ complanaren Vectoren,

$$\text{I.}\ldots\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots\alpha_n,$$

ausgedehnt (vergl. 229) werden können, wenn n eine ganze Zahl grösser als drei ist; noch in Verbindung damit die Gleichungen,

$$\text{II.}\ldots\frac{\alpha_n}{\alpha}=\left(\frac{\alpha_1}{\alpha}\right)^n,\qquad \text{III.}\ldots\frac{\alpha_1}{\alpha}=\left(\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}},$$

$$\text{IV.}\ldots\alpha_1=\left(\frac{\alpha_n}{\alpha}\right)^{\frac{1}{n}}\alpha,$$

zu deuten.

Bezeichnen wir für jetzt die, wie wir sie nennen wollen, n-te Hauptwurzel eines Quaternions Q durch das Symbol $\sqrt[n]{Q}$, so haben wir, in unserem Sinne (vergl. 231, VIII.),

$$\text{V.}\ldots\angle\sqrt[n]{Q}<\frac{\pi}{n},\quad \text{wenn } \angle Q<\pi;$$

$$\text{VI.}\ldots\angle\left(\sqrt[n]{-1}\right)=\frac{\pi}{n};$$

$$\text{VII.}\ldots V\left(\sqrt[n]{-1}\right):i>0;$$

die letztere Bedingung, nämlich dass der Coëfficient y von i in der zweigliedrigen (oder Paar-) Form $x+iy$ (228) für den Quaternion $\sqrt[n]{-1}$ ein positiver Skalar sein soll, dient somit dazu, die Bestimmung der n-ten Hauptwurzel der negativen Einheit zu vervollständigen; oder der n-ten Hauptwurzel irgend eines an-

* Dieser Begriff unterscheidet sich grundsätzlich von einem, der verschiedenen hervorragenden Schriftstellern vor der Erfindung der Quaternionen begegnet ist, und demzufolge die Zeichen 1 und $\sqrt{-1}$ als Darstellungen eines Paares gleich langer und zu einander rechtwinkliger grader Linien in einer gegebenen Ebne gedeutet werden. In den Quaternionen wird keine Linie durch die Zahl Eins dargestellt, ausser in Betreff ihrer Länge; der Grund ist hauptsächlich der, dass wir in unserer Rechenart im Stande zu sein suchen, alle möglichen Ebnen in Betracht zu ziehn, und dass nicht eine grade Linie ihnen allen gemeinsam ist.

Digitized by Google

deren negativen Skalars, da -1 in $-a$ in jeder der beiden letzten Formeln verwandelt werden kann, wenn $a > 0$. Und was die allgemeine n-te Wurzel eines Quaternions betrifft, so können wir nach denselben Grundsätzen schreiben,

$$\text{VIII.} \ldots Q^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} . \sqrt[n]{Q};$$

hier stellt der Factor $1^{\frac{1}{n}}$ die allgemeine n-te Wurzel der positiven Einheit dar; er hat n verschiedene Werthe, die von der Theilung des Umfanges eines Kreises in n gleiche Theile abhängen, auf die Weise, wie sie kürzlich für den Fall $n = 3$ durch Figur 54 erläutert wurde; und er unterscheidet sich von der gewöhnlichen Algebra nur durch die Realität, die hier dem i beigelegt wurde. In der That ist für uns jede dieser n Einheitswurzeln ein reeller Versor; nämlich der Quotient zweier Radien eines Kreises, die mit einander einen Winkel machen, der gleich dem n-ten Theil einer gewissen ganzen Anzahl von Umdrehungen ist.

(1.) Wir schlagen indessen vor, das besondere Symbol $i^{\frac{1}{n}}$ stets als Bezeichnung des Hauptwerthes der n-ten Wurzel von i zu deuten; und somit zu schreiben,

$$\text{IX.} \ldots i^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{i};$$

daraus folgt, dass, wenn diese Wurzel in der Form eines Paares (228) ausgedrückt wird, die beiden Constituenten x und y beide positiv sein werden, und dass der Quotient $y : x$ einen kleineren Werth haben wird, als bei irgend einem anderen Paare $x + iy$ (mit gleichfalls positiven Constituenten), dessen n-te Potenz gleich i ist.

(2.) Zum Beispiel, obwohl die Gleichung,

$$q^2 = (x + iy)^2 = i,$$

durch die beiden Werthe, $\pm (1 + i) : \sqrt{2}$, befriedigt wird, so wollen wir in bestimmter Weise schreiben,

$$\text{X.} \ldots i^{\frac{1}{2}} = + \sqrt{i} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}.$$

(3.) Und obwohl die Gleichung,

$$q^3 = (x + iy)^3 = i,$$

Digitized by Google

durch die drei verschiedenen und reellen Paare, $(i \pm \sqrt{3}) : 2$, und $-i$, befriedigt wird, so wollen wir nur den einen Werth annehmen,

$$\text{XI.} \ldots i^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{i} = \frac{i + \sqrt{3}}{2}.$$

(4.) Im Allgemeinen haben wir somit den Ausdruck

$$\text{XII.} \ldots i^{\frac{1}{n}} = \cos \frac{\pi}{2n} + i \sin \frac{\pi}{2n};$$

den wir gelegentlich zu dem folgenden Ausdruck abkürzen werden:

$$\text{XII.}' \ldots i^{\frac{1}{n}} = \operatorname{cis} \frac{\pi}{2n};$$

und die Wurzel $i^{\frac{1}{n}}$, in dieser Weise gedeutet, bezeichnet einen Versor, der irgend eine Linie, an der er operirt, in der positiven Drehungsrichtung um die gegebene Achse von i um einen Winkel dreht, der gleich dem n-ten Theile eines rechten Winkels ist.

234. Wenn m und n irgend zwei positive ganze Zahlen sind und q irgend ein Quaternion, so setzt uns die in der Formel 233, II. enthaltene Definition der ganzen Potenz q^n in den Stand, wie in der Algebra die beiden Gleichungen zu schreiben:

$$\text{I.} \ldots q^m q^n = q^{m+n}; \qquad \text{II.} \ldots (q^n)^m = q^{nm};$$

und wir schlagen vor, die erstere auf den Fall von Null und von negativen ganzen Potenzen auszudehnen und daher zu schreiben:

$$\text{III.} \ldots q^0 = 1; \qquad \text{IV.} \ldots q^{m-n} = q^m : q^n;$$

und im Besonderen,

$$\text{V.} \ldots q^{-1} = 1 : q = \frac{1}{q} = \text{dem Reciproken* (134) von } q.$$

Wir wollen auch die Formel II. erweitern und schreiben

$$\text{VI.} \ldots (q^{\frac{1}{n}})^m = q^{\frac{m}{n}},$$

mag m positiv oder negativ sein; so dass dieses letzte Symbol, wenn m und n wieder ganze Zahlen sind, von denen n positiv

---

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 157.

angenommen werden kann, so viele verschiedene Werthe hat, als Einheiten in dem Nenner seines gebrochenen Exponenten enthalten sind, wenn er auf seine kleinste Form gebracht wird; unter diesen Werthen von $q^{\frac{m}{n}}$ werden wir naturgemäss denjenigen als den Hauptwerth ansehn, welcher die m-te Potenz der n-ten Hauptwurzel (233) von q ist.

(1.) Zum Beispiel, das Symbol $q^{\frac{2}{3}}$ bedeutet in unserem Sinne das Quadrat irgend einer Cubikwurzel von q; es hat daher drei verschiedene Werthe, nämlich die drei Werthe der Cubikwurzel des Quadrats desselben Quaternions q; aber unter ihnen betrachten wir als Hauptwerth das Quadrat der Hauptcubikwurzel (231) des gegebenen Quaternions.

(2.) Ferner wird das Symbol $q^{\frac{2}{4}}$ in demselben Sinne als Bezeichnung für das Quadrat irgend einer vierten Wurzel von q gedeutet; aber da $(1^{\frac{1}{4}})^2 = 1^{\frac{1}{2}} = \pm 1$ ist, so hat dieses Quadrat nur zwei verschiedene Werthe, nämlich die der Quadratwurzel $q^{\frac{1}{2}}$, wenn der gebrochene Exponent $\frac{2}{4}$ so auf seine kleinste Form gebracht ist; und unter diesen ist der Hauptwerth das Quadrat der vierten Hauptwurzel; dies Quadrat ist zu gleicher Zeit die Hauptquadratwurzel [199, (1.), oder 227] des Quaternions q.

(3.) Das Symbol $q^{-\frac{1}{2}}$ bezeichnet, wie in der Algebra, den Reciproken einer Quadratwurzel von q; während q^{-2} den Reciproken des Quadrats bezeichnet, u. s. w.

(4.) Wenn der Exponent t, in einem Symbol von der Form q^t, wieder ein Skalar ist, aber ein irrationaler (oder incommensurabler), so können wir diesen irrationalen Coëfficienten t als einen Grenzwerth ansehn, dem sich ein variabler Bruch nähert; und das Symbol selbst kann dann als der entsprechende Grenzwerth einer gebrochenen Potenz eines Quaternions gedeutet werden, der indessen (in diesem Falle) unendlich viele Werthe hat und daher nur geringe oder keine Anwendung finden kann, wenn nicht eine Auswahl eines Werthes der irrationalen Potenz als Hauptwerthes getroffen wird, nach einem Gesetz, das am besten durch die Einführung des Begriffs der Amplitude eines Quaternions verstanden werden wird; diesem Begriff wollen wir uns im nächsten Abschnitt zuwenden.

Digitized by Google

(5.) Mittlerweile [vergl. 233, (4.)] können wir das Symbol i^t schon in bestimmter Weise als Bezeichnung eines Versors deuten, der irgend eine Linie in der gegebenen Ebne um t rechte Winkel um Ax. i dreht, und zwar in positivem oder negativem Sinne, je nachdem der skalar Exponent t, der entweder rational oder irrational sein kann, selbst positiv oder negativ ist; und somit können wir die Formel aufstellen,

$$\text{VII.} \ldots \quad i^t = \cos\frac{t\pi}{2} + i \sin\frac{t\pi}{2};$$

oder kurz (vergl. 233, XII.'),

$$\text{VIII.} \ldots \quad i^t = \operatorname{cis}\frac{t\pi}{2}.$$

Dritter Abschnitt.

Ueber die Amplituden von Quaternionen in einer gegebenen Ebne; und über trigonometrische Ausdrücke für derartige Quaternionen und deren Potenzen.

235. Wenn wir die zweigliedrige oder Paar-Form (228) für einen Quaternion in der Ebne von i (225) anwenden und zwei neue und reelle Skalare, r und z, einführen, von denen der erstere als positiv angenommen werden soll, und die mit den beiden vorigen Skalaren x und y durch die Gleichungen,

$$\text{I.} \ldots \quad x = r\cos z, \qquad y = r\sin z, \qquad r > 0,$$

verbunden sein sollen, so haben wir augenscheinlich die Formeln [vergl. 228, (5.)]:

$$\text{II.} \ldots \quad Tq = T(x + iy) = r;$$
$$\text{III.} \ldots \quad Uq = U(x + iy) = \cos z + i\sin z;$$

dieser letztere Ausdruck kann passend (vergl. 233, XII.', und 234, VIII.) auf folgende Weise abgekürzt werden:

$$\text{IV.} \ldots \quad Uq = \operatorname{cis} z;$$

so dass

$$\text{V.} \ldots \quad q = r\operatorname{cis} z.$$

Und die Bogen- oder Winkel-Grösse, z, kann die Amplitude*

* Vergleiche die Anmerkung zu Art. 130.

des Quaternions q genannt werden; diesem Namen geben wir hier den Vorzug vor der Bezeichnung „Winkel", denn wir haben den letzteren Namen und das entsprechende Symbol $\angle q$ schon benutzt, um einen Winkel von der Euklidischen Art zu bezeichnen (130), oder wenigstens einen Winkel, der in irgend einer Richtung die Grenzen 0 und π nicht überschreitet; während die Amplitude, z, da sie nur der Gleichung I. zu genügen braucht, irgend einen reellen und skalar Werth haben kann. Wir werden diese Amplitude, wenigstens für jetzt, durch das Symbol,* $\mathrm{am}.q$, oder kurz, $\mathrm{am}\,q$, bezeichnen; und wir haben somit die folgende Formel für die Verbindung zwischen Amplitude und Winkel,

$$\text{VI.}\ldots (z =)\,\mathrm{am}.q = 2n\pi \pm \angle q;$$

das obere oder untere Vorzeichen wird genommen, je nachdem

* Wir sagten, in 202, dass das Symbol V das System der Bezeichnungen vollendet, die unserem Rechensystem eigenthümlich sind; und in der That benutzt unsere Rechenart ausser den drei Buchstaben i, j, k, deren Gesetze durch die Grundformel (A) des Art. 183 ausgedrückt werden, und die ursprünglich (nämlich im Jahre 1843 und in den beiden folgenden Jahren) die einzigen den Quaternionen eigenthümlichen Symbole (siehe die Anmerkung auf Seite 205) waren, mit besonderer Bedeutung gewöhnlich nicht mehr als die fünf charakteristischen Operationszeichen K, S, T, U, V, für den Conjugirten, Skalar, Tensor, Versor und Vector (oder rechten Theil); obwohl vielleicht das Zeichen N, für Norm, das in diesem Buche aus der Zahlentheorie herübergenommen wurde, allmälig auch in Verbindung mit den Quaternionen mehr in Gebrauch kommen mag, als es bis jetzt der Fall gewesen ist. Was die Zeichen, $\angle$, Ax., I, R und jetzt am. (oder am_n) betrifft, für den Winkel, die Achse, den Index, den Reciproken und die Amplitude, so sind sie hauptsächlich als für die gegenwärtige Auseinandersetzung des Systems nützlich anzusehn; sie sind in der späteren Anwendung desselben weder oft nöthig, noch werden sie oft angewandt. Und dieselbe Bemerkung betrifft auch die letzte Abkürzung cis für $\cos + i\sin$, gewisse Bezeichnungen dieses Abschnittes für Potenzen und Wurzeln, die dazu dienten, den Begriff einer n-ten Wurzel, u. s. w., als verschieden von einer anderen auszudrücken; und das charakteristische Zeichen P, mit dem wir im nächsten Abschnitt das Ponential eines Quaternions benennen werden, wenn wir diese Bezeichnung auch später nicht bedürfen sollten. Es bedarf keiner Rechtfertigung für die Anwendung der rein geometrischen Zeichen, $\perp$, $\|$, $\|\|$, für senkrecht, parallel und complanar; wenn auch das letzte von ihnen vielleicht zum ersten Male vom Verfasser eingeführt wurde, der es häufig von Nutzen gefunden hat.

Digitized by Google

Ax. $q = \pm$ Ax. i; und n ist irgend eine ganze Zahl, die positiv oder negativ oder null sein kann. Wir können daher auch (für irgend einen Quaternion $q \parallel i$) die folgenden allgemeinen Transformationen hinschreiben:

VII. . . $Uq = \text{cis am } q$; VIII. . . $q = Tq \,.\, \text{cis am } q$.

(1.) Schreibt man $q = \beta : \alpha$, so ist die Amplitude am. q, oder am $(\beta : \alpha)$ eine skalar Grösse, welche mit dem ihr eigenen Vorzeichen den Betrag der Drehung um Ax. i von der Linie α zur Linie β ausdrückt; und es ist, im Allgemeinen, gestattet, sie um irgend eine ganze Anzahl von Kreisumfängen, oder von ganzen Umdrehungen, zu vermehren oder zu vermindern, wenn nur die Richtungen der beiden Linien, α und β, in der gegebenen Ebne von i gegeben sind.

(2.) Dagegen wollen wir annehmen, dass der besondere Quaternion, oder rechte Versor, i selbst in bestimmter Weise zu seiner Amplitude einen rechten Winkel habe; so dass wir die besondere Formel aufstellen können,

$$\text{IX. . . am. } i = \angle\, i = \frac{\pi}{2}\,.$$

(3.) Wenn für irgend einen anderen gegebenen Quaternion q die im Allgemeinen willkürliche ganze Zahl n in VI. irgend einen bestimmten Werth erhält, so können wir den entsprechenden Werth der Amplitude durch eines der beiden folgenden augenblicklich* benutzten Symbole bezeichnen, die wir hier als mit einander gleichbedeutend behandeln,

$$\text{am}_n \,.\, q, \text{ oder } \angle_n q;$$

so dass wir (nach derselben Regel der Vorzeichen wie vorher) als eine bestimmtere Formel als VI. die Gleichung hinschreiben können:

$$\text{X. . . am}_n \,.\, q = \angle_n q = 2n\pi \pm \angle\, q;$$

und wir können sagen, dass die letzte Grösse der n-te Werth der Amplitude von q ist; während der null Werth, $\text{am}_0\, q$, die Hauptamplitude (oder der Hauptwerth der Amplitude) genannt werden kann.

* Vergleiche die vorige Anmerkung in Betreff der angewandten Bezeichnungen.

(4.) Nach diesen Bezeichnungen und nach der Uebereinkunft, $\mathrm{am}_0\,(-1) = +\pi$, können wir schreiben,

$$\text{XI.}\ldots\ \mathrm{am}_0 q = \angle_0 q = \pm \angle q;$$
$$\text{XII.}\ldots\ \mathrm{am}_n a = \mathrm{am}_n 1 = \angle_n 1 = 2n\pi,$$

wenn $a > 0$; und

$$\text{XIII.}\ldots\ \mathrm{am}_n (-a) = \mathrm{am}_n (-1) = \angle_n (-1) = (2n+1)\pi,$$

wenn a wieder ein positiver Skalar ist.

236. Nach der vorhergehenden Definition der Amplitude und nach der früher aufgestellten Verbindung zwischen der Multiplication von Versoren und der Zusammensetzung von Drehungen (207) ist es augenscheinlich, dass (in der gegebenen Ebne und wenn man von den Tensoren absieht) Multiplication und Division von Quaternionen bezüglich der (algebraischen) Addition und Subtraction von Amplituden entspricht; so dass wir, wenn das Symbol $\mathrm{am}.q$ in dem allgemeinen (oder unbestimmten) Sinne der Gleichung 235, VI. gedeutet wird, schreiben können:

$$\text{I.}\ldots\ \mathrm{am}\,(q'.q) = \mathrm{am}\,q' + \mathrm{am}\,q;$$
$$\text{II.}\ldots\ \mathrm{am}\,(q':q) = \mathrm{am}\,q' - \mathrm{am}\,q;$$

und wir schliessen daraus, dass in jeder Formel einer der Werthe des ersten Gliedes unter den Werthen des zweiten Gliedes enthalten ist; aber wir specialisiren hier nicht, welcher Werth es ist. Mit derselben Allgemeinheit der Bedeutung folgt augenscheinlich, dass wir für ein Product irgend einer Anzahl von (complanaren) Quaternionen und für eine ganze Potenz irgend eines Quaternions die entsprechenden Formeln haben:

$$\text{III.}\ldots\ \mathrm{am}\,\Pi q = \Sigma\,\mathrm{am}\,q;$$
$$\text{IV.}\ldots\ \mathrm{am}.q^p = p.\mathrm{am}\,q;$$

hier kann p irgend eine positive oder negative ganze Zahl, oder null sein.

(1.) Es wurde in 191, II. bewiesen, dass für irgend zwei Quaternionen die Formel $Uq'q = Uq'.Uq$ statt hat; und dieses Ergebniss kann, nach dem associativen Princip der Multiplication (223), leicht auf irgend eine Anzahl von quaternion Factoren (complanaren oder diplanaren) ausgedehnt werden, mit einem entsprechenden Resultat für Tensoren; so dass wir allgemein schreiben können:

Digitized by Google

V. . . $U\Pi q = \Pi Uq$; VI. . . $T\Pi q = \Pi Tq$.

(2.) Beschränken wir uns auf die erste dieser beiden Gleichungen, und verbinden wir sie mit III., und mit 235, VII., so gelangen wir zu der wichtigen Formel:

VII. . . $\Pi \operatorname{cis} \operatorname{am} q\,(= \Pi Uq = U\Pi q = \operatorname{cis} \operatorname{am} \Pi q) = \operatorname{cis} \Sigma \operatorname{am} q$;

und daraus ergiebt sich im Besonderen (vergl. IV.),

VIII. . . $(\operatorname{cis} \operatorname{am} q)^p = \operatorname{cis}(p\,.\operatorname{am} q)$,

wenigstens wenn der Exponent p wieder irgend eine ganze Zahl ist.

(3.) In den letzten Formeln können die Amplituden $\operatorname{am}.q$, $\operatorname{am}.q'$, u. s. w., irgend welche Winkelgrössen, z, z' u. s. w., darstellen; wir können sie daher in folgender Weise schreiben,

IX. . . $\Pi \operatorname{cis} z = \operatorname{cis} \Sigma z$; X. . . $(\operatorname{cis} z)^p = \operatorname{cis} p\,z$;

sie enthalten somit, unter abgekürzten Formen, gewisse bekannte und nützliche Sätze in Betreff der Cosinus und Sinus von Summen und Vielfachen von Bogen.

(4.) Zum Beispiel, wenn die Anzahl der Factoren von der Form cis z zwei ist, so haben wir,

IX.′. . $\operatorname{cis} z'.\operatorname{cis} z = \operatorname{cis}(z' + z)$; X.′. . $(\operatorname{cis} z)^2 = \operatorname{cis} 2z$;

danach ist

$$\cos(z' + z) = S(\operatorname{cis} z'.\operatorname{cis} z) = \cos z' \cos z - \sin z' \sin z;$$
$$\sin(z' + z) = i^{-1} V(\operatorname{cis} z'.\operatorname{cis} z) = \cos z' \sin z + \sin z' \cos z;$$
$$\cos 2z = (\cos z)^2 - (\sin z)^2;$$
$$\sin 2z = 2 \cos z \sin z;$$

und ähnliche Resultate für mehr als zwei Factoren.

(5.) Ohne ausdrücklich den Begriff, oder wenigstens die Bezeichnung, der Amplitude einzuführen, können wir die letzten Formeln IX. und X. aus der Betrachtung der Potenz i^t (234) ableiten, wie folgt. Die Potenz von i, mit einem skalar Exponenten t, haben wir in 234, (5.) als ein Symbol gedeutet, das einer Gleichung genügt, die in folgender Weise geschrieben werden kann:

XI. . . $i^t = \operatorname{cis} z$, wenn $z = \frac{1}{2} t\pi$;

oder geometrisch als einen Versor, der eine Linie um t rechte Winkel dreht, wo t irgend ein Skalar sein kann. Wir sehn daher sofort aus dieser Bedeutung, dass, wenn t' entweder derselbe oder irgend ein anderer Skalar ist, die Formel

$$\text{XII.} \ldots i^t i^{t'} = i^{t+t'},$$

oder

$$\text{XIII.} \ldots \Pi . i^t = i^{xt},$$

statt haben muss, wie in der Algebra. Und da die Anzahl der Factoren i^t, wie leicht zu sehn ist, in der letzten Formel willkürlich ist, so können wir auch schreiben,

$$\text{XIV.} \ldots (i^t)^p = i^{pt},$$

wenn p irgend eine ganze* Zahl ist. Aber die beiden letzten Formeln können nach XI. in die Gleichungen IX. und X. verwandelt werden, die wir daher auf diesem Wege wiederum erhalten, wenn auch die letzteren Formen, nämlich XIII. und XIV., vielleicht etwas einfacher sind; sie haben in der That das Ansehn reiner algebraischer Identitäten, obwohl wir sahn, dass ihre geometrischen Bedeutungen, wie sie vorher gegeben wurden, wichtig sind.

(6.) Im Zusammenhang mit derselben Deutung IX. desselben nützlichen Symbols i^t mag hier bemerkt werden, dass

$$\text{XV.} \ldots K . i^t = i^{-t};$$

und dass daher

$$\text{XVI.} \ldots \cos \frac{t\pi}{2} = S . i^t = \tfrac{1}{2} (i^t + i^{-t});$$

$$\text{XVII.} \ldots \sin \frac{t\pi}{2} = i^{-1} V . i^t = \tfrac{1}{2} i^{-1} (i^t - i^{-t}).$$

(7.) Wenn wir daher das Doppelte jedes Gliedes von XVI. zu irgend einer positiven ganzen Potenz p erheben, halbiren und z für $\frac{1}{2} t\pi$ einsetzen, so erhalten wir die Gleichung,

---

* Wir werden bald sehn, dass es einen Sinn hat, wenn auch nicht einen so ganz bestimmten, in dem die Formel statt hat, auch wenn der Exponent p gebrochen oder irrational ist; nämlich den, dass das zweite Glied dann einer der Werthe des ersten ist.

Digitized by Google

$$\text{XVIII.}\ldots 2^{p-1}(\cos z)^p = \tfrac{1}{2}(i^t + i^{-t})^p$$
$$= \tfrac{1}{2}(i^{pt} + i^{-pt}) + \tfrac{1}{2}p\,(i^{(p-2)t} + i^{(2-p)t}) + \text{u. s. w.},$$
$$= \cos pz + p\cos(p-2)z + \frac{p(p-1)}{2}\cos(p-4)z + \text{u. s. w.},$$

mit der üblichen Regel, den Coëfficienten von $\cos 0z$ zu halbiren, wenn p eine grade ganze Zahl ist; und durch ein entsprechendes Verfahren erhält man die bekannten Entwicklungen von $2^{p-1}(\sin z)^p$ für irgend einen positiven ganzen, graden oder ungraden Werth von p; und viele andere bekannte Resultate von derselben Art.

237. Wenn p wieder eine ganze Zahl ist, so haben wir die Transformation,

$$\text{I.}\ldots q^p = (r\,\text{cis}\,z)^p = r^p\,\text{cis}\,pz = (Tq)^p\,\text{cis}\,(p\,.\,\text{am}\,q);$$

in ihr (vergl. 190, 161) können die beiden Factoren, von der tensor und versor Art, in folgender Weise geschrieben werden:

$$\text{II.}\ldots T(q)^p = (Tq)^p = Tq^p;$$
$$\text{III.}\ldots U(q^p) = (Uq)^p = Uq^p;$$

und man kann irgend einen Werth (235) der Amplitude $\text{am}\,.\,q$ nehmen, da alle zu ein und demselben Werth der ganzen Potenz q^p führen. Und wenn wir für I. die wenig verschiedene Formel [vergl. 235, (3.)],

$$\text{IV.}\ldots (q^p)_n = Tq^p\,.\,\text{cis}\,(p\,.\,\text{am}_n q),$$

substituiren, wo

$$p = \frac{m'}{n'}, \qquad n' > 0,$$

und m', n', n ganze Zahlen sind, von denen die erste als Primzahl zur zweiten angenommen ist, so dass der Exponent p hier ein Bruch in seiner kleinsten Form, n' ein positiver Nenner ist, während der Factor Tq^p als ein positiver Skalar anzusehn ist (dessen positiver oder negativer Logarithmus in irgend einem gegebenen System gleich $p\times$ dem Logarithmus von Tq ist), so lässt der Ausdruck im zweiten Gliede für n' verschiedene Werthe zu, die verschiedenen Werthen von n

entsprechen; sie sind genau die n' Werthe (vergl. 234) der gebrochenen Potenz q^p, nach Grundsätzen, die wir schon aufgestellt haben; der Hauptwerth dieser Potenz entspricht dem Werthe $n = 0$.

(1.) Für irgend einen Werth der ganzen Zahl n kann man sagen, dass das durch die Formel IV. definirte Symbol $(q^p)_n$ den n-ten Werth der Potenz q^p darstellt; diese Werthe kehren indessen periodisch wieder, wenn p, wie vorher, ein Bruch ist.

(2.) Kürzt man $(1^p)_n$ in $1^p{}_n$ ab, so haben wir allgemein, nach 235, XII.,

V. . . $1^p{}_n = \operatorname{cis} 2pn\pi$, wenn p irgend ein Bruch ist;

diese Beschränkung werden wir indessen bald fallen lassen; im Besonderen ist

VI. . . der Hauptwerth von $1^p = 1^p{}_0 = 1$.

(3.) Macht man so, der Reihe nach, $p = \frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{3}$, so haben wir

$$\text{VII. . . } 1^{\frac{1}{2}}{}_n = \operatorname{cis} n\pi, \quad 1^{\frac{1}{2}}{}_0 = +1, \quad 1^{\frac{1}{2}}{}_1 = -1,$$
$$1^{\frac{1}{2}}{}_2 = +1, \text{ u. s. w.;}$$

$$\text{VIII. . . } 1^{\frac{1}{3}}{}_n = \operatorname{cis}\frac{2n\pi}{3}, \qquad 1^{\frac{1}{3}}{}_0 = 1,$$
$$1^{\frac{1}{3}}{}_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad 1^{\frac{1}{3}}{}_2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2},$$
$$1^{\frac{1}{3}}{}_3 = 1, \text{ u. s. w.}$$

(4.) Bezeichnet man ebenso den n-ten Werth von $(-1)^p$ durch das abgekürzte Symbol $(-1)^p{}_n$, so haben wir in demselben Sinne (vergl. 235, XIII.), für irgend einen gebrochenen* Werth von p,

$$\text{IX. . . } (-1)^p{}_n = \operatorname{cis} p(2n+1)\pi;$$

und danach ist (vergl. 232),

$$\text{X. . . } (-1)^{\frac{1}{2}}{}_0 = \operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = +i, \quad (-1)^{\frac{1}{2}}{}_1 = \operatorname{cis}\frac{3\pi}{2} = -i,$$
$$(-1)^{\frac{1}{2}}{}_2 = +i, \text{ u. s. w.;}$$

* Wie vorher, ist diese Beschränkung nur eine augenblickliche.

Digitized by Google

und

$$\text{XI.}\ldots(-1)^{\frac{1}{3}}_0 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \quad (-1)^{\frac{1}{3}}_1 = -1,$$
$$(-1)^{\frac{1}{3}}_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}, \text{ u. s. w.,}$$

und diese drei Werthe von $(-1)^{\frac{1}{3}}$ kehren periodisch wieder.

(5.) Die Formel IV. ergiebt allgemein, nach V., die Transformation

$$\text{XII.}\ldots(q^p)_n = (q^p)_0 \operatorname{cis} 2pn\pi = 1^p{}_n\,(q^p)_0;$$

so dass der n-te Werth von q^p gleich dem Hauptwerth dieser Potenz von q ist, multiplicirt mit dem entsprechenden Werthe derselben Potenz der positiven Einheit; und es mag hervorgehoben werden, dass, wenn die Basis a irgend ein positiver Skalar ist, die p-te Hauptpotenz, $(a^p)_0$, nach unseren Definitionen einfach der arithmetische Werth von a^p ist.

(6.) Der n-te Werth der p-ten Potenz irgend eines negativen Skalars, $-a$, ist ebenso gleich der arithmetischen p-ten Potenz des positiven, entgegengesetzten Skalars, $+a$, multiplicirt mit dem entsprechenden Werthe derselben Potenz der negativen Einheit; oder in Zeichen,

$$\text{XIII.}\ldots(-a)^p{}_n = (-1)^p{}_n\,(a^p)_0$$
$$= (a^p)_0 \operatorname{cis} p(2n+1)\pi.$$

(7.) Die Formel IV. und ihre Folgerungen V., VI., IX., XII., XIII. können so ausgedehnt werden, dass sie als einen Grenzfall den Fall einschliessen, wenn der Exponent p wieder ein Skalar ist und incommensurabel oder irrational wird; und obwohl die Anzahl der Werthe der Potenz q^p dann unbegrenzt [vergl. 234, (4.)] wird, so können wir dann doch einen von ihnen wieder als den Hauptwerth dieser (jetzt) irrationalen Potenz ansehn; nämlich den Werth,

$$\text{XIV.}\ldots(q^p)_0 = Tq^p \,.\, \operatorname{cis}(p\,\operatorname{am}_0 q),$$

welcher der Hauptamplitude [235, (3.)] des vorgeschlagenen Quaternions q entspricht.

238. Wir können daher das Symbol,

$$q^p,$$

in dem die Basis, q, irgend ein Quaternion ist, während der Exponent, p, irgend ein Skalar ist, jetzt als völlig gedeutet ansehn; aber wir haben bis jetzt noch keine Deutung dem weiteren Symbol von derselben Art,

$$q^{q'},$$

beigelegt, in dem beide, die Basis q und der Exponent q', (im Allgemeinen) als Quaternionen angenommen werden sollen, wenn auch für die Zwecke dieses Kapitels als complanare (225). Dies zu thun, und zwar auf einem Wege, der vollständig übereinstimmt mit den vorhergehenden Festsetzungen und Schlüssen, oder besser, der sie umfasst und wiedererzeugt, für den Fall, wo der neue quaternion Exponent, q', zu einem Skalar entartet (131), ist einer der Hauptgegenstände des folgenden Abschnittes; er enthält indessen auch eine Theorie der Logarithmen von Quaternionen und des Zusammenhanges beider, der Logarithmen und Potenzen, mit den Eigenschatten einer gewissen Function, die wir das Ponential eines Quaternions nennen, und zu deren Betrachtung wir zunächst übergehn wollen.

Vierter Abschnitt.

Ueber das Ponential und den Logarithmus eines Quaternions; und über Potenzen von Quaternionen, deren Exponenten Quaternionen sind.

239. Wenn wir die polynome Function betrachten,

$$\text{I.}\ldots P(q, m) = 1 + q_1 + q_2 + \ldots q_m,$$

in der q irgend ein Quaternion ist und m irgend eine positive ganze Zahl, während wir (der Kürze wegen) annehmen, dass

$$\text{II.}\ldots q_m = \frac{q^m}{1.2.3\ldots m}\left(= \frac{q^m}{\Gamma(m+1)}\right),$$

so ist nicht schwer zu beweisen, dass, wie gross, aber endlich und gegeben, der Tensor Tq auch sein mag, doch eine endliche

Digitized by Google

Zahl m angegeben werden kann, für welche die Ungleichheit besteht,

$$\text{III.}\ldots T[P(q, m+n) - P(q, m)] < a,$$

wenn

$$a > 0,$$

wie gross die (positive ganze) Zahl n auch sein mag, und wie klein der (positive) Skalar a, vorausgesetzt, dass der letztere gegeben ist. Mit anderen Worten, wenn wir schreiben (vergl. 228),

$$\text{IV.}\ldots q = x + iy, \qquad P(q,m) = X_m + i\,Y_m,$$

so kann stets ein bestimmter Werth der Zahl m angegeben werden, für den die folgende Ungleichheit statt hat,

$$\text{V.}\ldots (X_{m+n} - X_m)^2 + (Y_{m+n} - Y_m)^2 < a^2,$$

wie gross die Zahl n und wie klein (aber gegeben und > 0) der Skalar a sein mag. Es folgt augenscheinlich, dass jede der beiden skalar Reihen, oder Aufeinanderfolge von skalar Functionen,

$$\text{VI.}\ldots X_0 = 1,\ X_1 = 1 + x,\ X_2 = 1 + x + \frac{x^2 - y^2}{2},\ldots\ X_m,\ldots$$

$$\text{VII.}\ldots Y_0 = 0,\ Y_1 = y,\ Y_2 = y + xy,\ldots Y_m,\ldots$$

schliesslich gegen eine feste und endliche Grenze convergirt, von denen die eine X_∞, oder einfach X, und die letztere Y_∞, oder Y, genannt werden kann, und von denen jede eine gewisse Function der beiden Skalare x und y ist. Schreibt man dann

$$\text{VIII.}\ldots Q = X_\infty + i\,Y_\infty = X + i\,Y,$$

so müssen wir den Quaternion Q (nämlich die Grenze, gegen welche die folgenden Reihen von Quaternionen,

$$\text{IX.}\ldots P(q,0) = 1,\quad P(q,1) = 1 + q,\quad P(q,2) = 1 + q + \frac{q^2}{2},\ \ldots$$
$$P(q,m),\ldots$$

schliesslich convergiren) ebenfalls als eine gewisse Function ansehn, die wir die ponential Function, oder einfach das Ponential von q, nennen wollen, weil sie gewisse Exponentialeigenschaften besitzt; und wir können sie durch irgend eines der drei Symbole,

$$P(q, \infty), \quad \text{oder} \quad P(q), \quad \text{oder einfach} \quad Pq,$$

bezeichnen. Wir haben daher die Gleichung,

X. . . Ponential von $q = Q = Pq = 1 + q_1 + q_2 + \ldots + q_\infty$,

in der das Glied q_m die in II. angegebene Bedeutung hat.

(1.) Im Zusammenhang mit der Convergenz dieser ponential Reihen, oder mit der Ungleichheit III., mag hervorgehoben werden, dass, wenn wir schreiben (vergl. 235) $r = Tq$, und $r_m = Tq_m$, wir nach 212, (2.) erhalten,

XI. . . $T[P(q, m+n) - P(q, m)] \leqq P(r, m+n) - P(r, m)$;

es ist genügend zu beweisen, dass diese letzte Differenz, oder die Summe der n positiven Glieder, $r_{m+1}, \ldots r_{m+n}$, $< a$ gemacht werden kann. Wenn wir jetzt eine Zahl $p > 2r - 1$ nehmen, so erhalten wir $r_{p+1} < \frac{1}{2} r_p$, $r_{p+2} < \frac{1}{2} r_{p+1}$, u. s. w., so dass eine endliche Zahl $m > p > 2r - 1$ angegeben werden kann, so dass $r_m < a$; und dann ist,

XII. . . $P(r, m+n) - P(r, m) < a\,(2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-n}) < a$;

damit ist bewiesen, dass die behauptete Ungleichheit besteht.

(2.) Im Allgemeinen wird eine aufsteigende Reihe mit positiven Coëfficienten, wie

$$\text{XIII. . . } A_0 + A_1 q + A_2 q + \text{u. s. w.,}$$
$$\text{wo } A_0 > 0, A_1 > 0, \text{u. s. w.,}$$

welche convergent ist, wenn q in einen positiven Skalar verwandelt wird, um so mehr convergent, wenn q ein Quaternion ist.

240. Es seien q und q' irgend zwei complanare Quaternionen, und q'' sei ihre Summe, so dass

$$\text{I. . . } q'' = q' + q, \qquad q'' \parallel\!\!\parallel q' \parallel\!\!\parallel q;$$

dann haben wir, wie in der Algebra, mit der Bedeutung 239, II. von q_m, und mit entsprechenden Bedeutungen von q'_m und q''_m,

$$\text{II. . . } q''_m = \frac{(q'+q)^m}{1.2.3. \ldots m} = q'_m q_0 + q'_{m-1} q_1 + q'_{m-2} q_2 + \ldots + q'_0 q_m,$$

wo $q_0 = q'_0 = 1$ ist. Schreibt man daher $r = Tq$, $r_m = Tq_m$, und ebenso $r' = Tq'$, $r'' = Tq''$, u. s. w., so können die beiden Differenzen,

$$\text{III. . . } P(r', m) \,.\, P(r, m) - P(r'', m),$$

Digitized by Google

und

$$\text{IV.}\ldots\ P(r'', 2m) - P(r', m) \,.\, P(r, m),$$

als Summen von positiven Gliedern von der Form $r'_{p'} \,.\, r_p$ entwickelt werden, [die eine Summe enthält $\frac{1}{2} m\,(m+1)$, und die andere enthält $m\,(m+1)$ solche Glieder]; aber nach 239, III. kann die Summe dieser beiden positiven Differenzen kleiner als irgend ein gegebener kleiner positiver Skalar a gemacht werden, da

$$\text{V.}\ldots\ P(r'', 2m) - P(r'', m) < a, \quad \text{wenn } a > 0,$$

vorausgesetzt, dass die Zahl m gross genug genommen wird; jede Differenz wird daher zu 0, wenn m gegen ∞ convergirt; und das muss um so mehr eintreten, wenn die Tensoren, r, r', r'', durch die Quaternionen q, q', q'' ersetzt werden. Die Function Pq ist daher dem exponential Gesetz,

$$\text{VI.}\ldots\ P(q' + q) = Pq' \,.\, Pq = Pq \,.\, Pq',$$

unterworfen, wenn

$$q' \mid q.$$

(1.) Wenn wir schreiben [vergl. 237, (5.)],

$$\text{VII.}\ldots\ P1 = \varepsilon,$$

dann ist

$$\text{VIII.}\ldots\ Px = (\varepsilon^x)_0 = \text{dem arithmetischen Werthe von } \varepsilon^x;$$

wo ε die bekannte Basis des natürlichen Systems der Logarithmen und x irgend ein Skalar ist. Wir werden von jetzt an einfach ε^x schreiben, um den Haupt- (oder arithmetischen) Werth der x-ten Potenz von ε zu bezeichnen, und so erhalten wir die vereinfachte Gleichung,

$$\text{VIII}'.\ldots\ Px = \varepsilon^x.$$

(2.) Wir haben somit schon einen Grund, allgemein zu schreiben,

$$\text{IX.}\ldots\ Pq = \varepsilon^q;$$

aber diese Formel wird hier nur als eine Definition des Sinnes angesehn, in dem wir das exponential Symbol, ε^q, deuten; nämlich als die kurz zuvor erwähnte ponential Function, Pq, die wir als die Summe der unendlichen, aber convergirenden Reihe 239, X. ansehn. Wir werden indessen bald sehn, dass sie in

einer allgemeineren Definition (vergl. 238) des Symbols $q^{q'}$ enthalten ist.

(3.) Für irgend einen Skalar x haben wir nach VIII. die Transformation:

X. . . $x = lPx =$ dem natürlichen Logarithmus des Ponentials von x.

241. Das exponential Gesetz (240) ergiebt die folgende allgemeine Zerlegung eines Ponentials in Factoren,

$$\text{I. . . } Pq = P(x + iy) = Px \,.\, Piy;$$

in ihnen ist, wie wir eben gesehn haben, der Factor Px ein positiver Skalar. Der andere Factor, Piy, ist, wie leicht zu beweisen, ein Versor, und daher der Versor von Pq; ferner ist Px der Tensor desselben Ponentials; denn wir haben im Allgemeinen,

II. . . $Pq \,.\, P(-q) = P(0) = 1,$ und III. . . $PKq = KPq,$

daher ist

IV. . . $(Kq)^m = K(q^m) =$ (sagen wir) Kq^m (vergl. 199, IX.);

und folglich, im Besonderen (vergl. 150, 158),

$$\text{V. . . } 1 : Piy = P(-iy) = KPiy,$$

oder

$$\text{VI. . . } NPiy = 1.$$

Wir können daher schreiben (vergl. 240, IX., X.),

$$\begin{aligned} &\text{VII. . . } TPq = PSq = Px = \varepsilon^x; \\ &\text{VIII. . . } \quad x = Sq \quad = lTPq; \\ &\text{IX. . . } UPq = PVq = Piy = \varepsilon^{iy} = \operatorname{cis} y \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(vergl. 235, IV.);} \end{aligned}$$

diese letztere Transformation erhält man aus den beiden Reihen,

$$\text{X. . . } SPiy = 1 - \frac{y^2}{2} + \text{u. s. w.} = \cos y;$$

$$\text{XI. . . } i^{-1} VPiy = y - \frac{y^3}{2 \,.\, 3} + \text{u. s. w.} = \sin y.$$

Daher kann das Ponential Pq in folgender Weise transformirt werden:

$$\text{XII. . . } Pq = P(x + iy) = \varepsilon^x \operatorname{cis} y.$$

(1.) Wenn wir nicht vorgezogen hätten, die Reihen für

Cosinus und Sinus als bekannt anzunehmen, noch (zunächst) irgend eine Einheit als Winkeleinheit auszuwählen, als einer bekannten, von der ihre Gültigkeit abhängt, so hätten wir in folgender Weise vorgehn können. Schreibt man:

$$\text{XIII.}\ldots\ P\,iy = fy + i\varphi y,$$
$$f(-y) = +fy,$$
$$\varphi(-y) = -\varphi y,$$

so hätten wir, nach dem exponential Gesetz (240),

$$\text{XIV.}\ldots f(y+y') = S(Piy\,.\,Piy') = fy\,.fy' - \varphi y\,.\,\varphi y';$$
$$\text{XV.}\ldots f(y-y') = \qquad\qquad fy\,.fy' + \varphi y\,.\,\varphi y';$$

und dann würde die Functionalgleichung, die sich ergiebt, nämlich

$$\text{XVI.}\ldots f(y+y') + f(y-y') = 2fy\,.fy',$$

zeigen, dass

$$\text{XVII.}\ldots fy = \cos\left(\frac{y}{c} \times \text{einem rechten Winkel}\right),$$

welche Winkeleinheit wir auch adoptirt haben mögen, vorausgesetzt, dass wir die Constante c durch die Bedingung bestimmen,

XVIII... $c =$ der kleinsten positiven Wurzel der Gleichung

$$fy = (SPiy) = 0;$$

oder nahezu,

XVIII′... $c = 1{\cdot}5708$, wie das Studium der Reihe* zeigen würde.

(2.) Wir würden somit einen Grund erhalten, einen rechten Winkel durch diese numerische Constante, c, darzustellen; oder die Winkeleinheit so auszuwählen, dass wir die Gleichung haben,

XIX... $\pi = 2c =$ der kleinsten positiven Wurzel der Gleichung

$$fy = -1,$$

(π bezeichnet hier wieder zwei rechte Winkel); sie ergiebt nahezu

$$\text{XIX.}'\ldots\ \pi = 3{\cdot}14159, \text{ wie gewöhnlich;}$$

---

* In der That, der Werth der Constante c kann bis zu diesem Grade von Genauigkeit, durch einfache Interpolation zwischen den beiden angenäherten Werthen der Funktion f,

$$f(1{\cdot}5) = +0{\cdot}070737, \qquad f(1{\cdot}6) = -0{\cdot}029200,$$

erhalten werden; und folglich ist es nicht nöthig, hier Kunstgriffe zu erwähnen, durch welche ein weiterer, genauerer Werth gefunden werden kann.

Digitized by Google

wir würden somit XVII. auf die einfachere Form bringen können,

$$\text{XX.}\ldots fy = \cos y.$$

(3.) Was die Function φy betrifft, so ist, da

$$\text{XXI.}\ldots (fy)^2 + (\varphi y)^2 = Piy \,.\, P(-iy) = 1,$$

augenscheinlich, dass $\varphi y = \pm \sin y$ ist; und es ist leicht zu beweisen, dass das obere Vorzeichen genommen werden muss. In der That kann man zeigen (ohne irgend welche vorläufige Kenntniss der Cosinus und Sinus vorauszusetzen), dass φc positiv ist, und dass daher,

$$\text{XXII.}\ldots \varphi c = +1,$$

oder

$$\text{XXIII.}\ldots Pic = i;$$

und danach ist

$$\text{XXIV.}\ldots \varphi y = S.i^{-1} Piy = SPi(y-c) = f(y-c),$$

und

$$\text{XXV.}\ldots Piy = fy + if(y-c).$$

Wenn wir daher c durch $\frac{\pi}{2}$ ersetzen, so haben wir

$$\text{XXVI.}\ldots \varphi y = \cos\left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \sin y;$$

und

$$\text{XXVII.}\ldots Piy = \operatorname{cis} y, \quad \text{wie in IX.}$$

(4.) Die Reihen X. XI. für den Cosinus und Sinus könnten somit abgeleitet werden, anstatt als bekannt angenommen zu werden; und da wir die Grenzwerthe,

$$\text{XXVIII.}\ldots \lim_{y=0} .y^{-1} \sin y = \lim_{y=0} .y^{-1} i^{-1} VPiy = 1,$$

haben, so folgt, dass die Winkeleinheit, die somit $Piy = \operatorname{cis} y$ ergiebt, (wie üblich) der Winkel ist, der durch einen Bogen um den Mittelpunkt gleich dem Radius umspannt wird; oder dass sich die Zahl π (oder $2c$) zu 1 verhält, wie der Umkreis zum Durchmesser eines Kreises.

(5.) Wenn irgend eine andere Winkeleinheit, aus irgend einem Grunde, ausgewählt worden wäre, so würde ein rechter Winkel dann durch eine andere Zahl dargestellt werden und nicht nahezu durch $1 \cdot 5708$; aber wir würden wieder die Transformation haben,

$$\text{XXIX.}\ldots\ Piy = \operatorname{cis}\left(\frac{y}{c} \times \text{ einem rechten Winkel}\right),$$

wenn auch nicht dieselben Reihen, wie vorher, für $\cos y$ und $\sin y$.

242. Behalten wir die übliche Einheit bei, so sehn wir, nach 241, XII., dass

$$\text{I.}\ldots\ P.2in\pi = 1,$$

und

$$\text{II.}\ldots\ P(q + 2in\pi) = Pq,$$

wenn n irgend eine ganze Zahl ist; es folgt daher, dass der umgekehrte Werth der ponential Function $P^{-1}q$, oder, wie wir sie nennen können, das Imponential, eines gegebenen Quaternions q unendlich viele Werthe hat, welche alle durch die Formel,

$$\text{III.}\ldots\ P_n^{-1}q = l\,Tq + i\,\mathrm{am}_n q,$$

dargestellt werden können; jeder von ihnen genügt der Gleichung,

$$\text{IV.}\ldots\ PP_n^{-1}q = q;$$

und derjenige, welcher dem Werth $n = 0$ entspricht, kann das Hauptimponential heissen. Wir werden finden, dass, wenn der Exponent p irgend ein Skalar ist, die schon gegebene Definition (237, IV., XII.) für den n-ten Werth der p-ten Potenz von q uns in den Stand setzt, die Formel aufzustellen,

$$\text{V.}\ldots\ (q^p)_n = P(p\,P_n^{-1}q);$$

und ich schlage jetzt vor, diese letztere Formel durch eine neue Definition auf den allgemeineren Fall (238) auszudehnen, wenn der Exponent ein Quaternion q' ist, und somit allgemein für irgend zwei complanare Quaternionen, q und q', die allgemeine exponential Formel,

$$\text{VI.}\ldots\ (q^{q'})_n = P(q'P_n^{-1}q),$$

hinzuschreiben; den Hauptwerth von $q^{q'}$ denken wir uns wieder dem Werthe $n = 0$ entsprechend, oder der Hauptamplitude von q [vergl. 235, (3.)].

(1.) Zum Beispiel,

$$\text{VII.}\ldots\ (\varepsilon^q)_0 = P(q\,P_0^{-1}\varepsilon) = Pq,$$

da

$$P_0^{-1}\varepsilon = l\varepsilon = 1;$$

das Ponential Pq, das wir in 240, (2.) übereinkamen einfach mit ε^q zu bezeichnen, ist daher, wie wir jetzt sehn, in der That

nach unserer allgemeinen Definition der Hauptwerth dieser Potenz, oder des Exponentials.

(2.) Mit denselben Bezeichnungen ist,

$$\text{VIII.} \ldots \quad \varepsilon^{iy} = \operatorname{cis} y,$$
$$\cos y = \tfrac{1}{2}(\varepsilon^{iy} + \varepsilon^{-iy}),$$
$$\sin y = \frac{1}{2i}(\varepsilon^{iy} - \varepsilon^{-iy});$$

die beiden letzteren unterscheiden sich von den gebräuchlichen imaginären Ausdrücken für Cosinus und Sinus nur durch die geometrische Reellität* des Versors i.

(3.) Der Cosinus und Sinus eines Quaternions (in der gegebenen Ebne) kann jetzt durch die Gleichungen definirt werden:

$$\text{IX.} \ldots \quad \cos q = \tfrac{1}{2}(\varepsilon^{iq} + \varepsilon^{-iq});$$
$$\text{X.} \ldots \quad \sin q = \frac{1}{2i}(\varepsilon^{iq} - \varepsilon^{-iq});$$

und wir können schreiben (vergl. 241, IX.),

$$\text{XI.} \ldots \quad \operatorname{cis} q = \varepsilon^{iq} = Piq.$$

(4.) Bei dieser Bedeutung von $\operatorname{cis} q$ findet die exponential Eigenschaft, 236, IX., X., auch jetzt noch statt; und wir können schreiben,

$$\text{XII.} \ldots \quad (q^{q'})_n = P(q' \, l \, Tq) \, . \, P(iq' \operatorname{am}_n q)$$
$$= (Tq)_0^{q'} \operatorname{cis}(q' \operatorname{am}_n q);$$

eine Formel, die augenscheinlich die entsprechende, 237, IV., für den n-ten Werth der p-ten Potenz von q einschliesst, wenn p ein Skalar ist.

(5.) Die Definitionen III. und VI., in Verbindung mit 235, XII., ergeben allgemein,

$$\text{XIII.} \ldots \quad 1_n^{q'} = (1^{q'})_n = P.2in\pi q';$$
$$\text{XIV.} \ldots \quad (q^{q'})_n = 1_n^{q'} \, . \, (q^{q'})_0;$$

die letztere Gleichung umschliesst die Formel 237, XII.

(6.) Dieselben Definitionen ergeben,

---

* Vergleiche 232, (2.), und die Anmerkungen zu Seite 324, 331.

Digitized by Google

$$\text{XV.}\ldots P_0^{-1} i = \frac{i\pi}{2};$$

$$\text{XVI.}\ldots (i^i)_0 = \varepsilon - \frac{\pi}{2};$$

diese letztere Gleichung stimmt mit einer bekannten Deutung des Symbols,

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}},$$

überein, das man in der Algebra als Bezeichnung für eine reelle Grösse ansieht.

(7.) Die Formel VI. kann auch auf den Fall ausgedehnt werden, in dem der Exponent q' ein Quaternion ist, der nicht in der gegebenen Ebne von i liegt, und daher mit der Basis q nicht complanar ist; wir können somit schreiben,

$$\text{XVII.}\ldots (i^j)_0 = P(jP_0^{-1} i) = P\left(-\frac{k\pi}{2}\right) = -k;$$

doch es würde dem Zwecke dieses Kapitels fernliegen (225), in irgend welche weitere Einzelheiten einzugehn, in Betreff der Deutung des exponential Symbols $q^{q'}$ für den Fall diplanarer Quaternionen, obwohl wir sehn, dass es keine Schwierigkeit hat, ihn zu behandeln nach dem, was ich in Betreff complanarer Quaternionen gezeigt habe.

243. Was den allgemeinen Logarithmus q' eines Quaternions q (in der gegebenen Ebne) betrifft, so können wir ihn als irgend einen Quaternion betrachten, welcher der Gleichung genügt,

$$\text{I.}\ldots \varepsilon^{q'} = Pq' = q;$$

und unter diesem Gesichtspunkte ist er einfach das Imponential $P^{-1}q$, dessen n-ter Werth durch die Formel 242, III. ausgedrückt ist. Und das Hauptimponential, das (wie vorher) dem Werthe $n = 0$ entspricht, kann der Hauptlogarithmus, oder einfach der Logarithmus, des Quaternions q heissen, und kann durch das Symbol,

$$lq,$$

bezeichnet werden; so dass wir schreiben können,

$$\text{I.}\ldots lq = P_0^{-1} q = lTq + i\,\mathrm{am}_0 q;$$

oder noch einfacher,

$$\text{II.}\ldots lq = l(Tq \,.\, Uq) = lTq + lUq,$$

denn es ist $lTUq = l1 = 0$, und daher,

$$\text{III.}\ldots lUq = i\,\mathrm{am}_0\, q.$$

Wir haben daher die beiden allgemeinen Gleichungen,

$$\text{IV.}\ldots Slq = lTq; \qquad \text{V.}\ldots Vlq = lUq;$$

in ihnen ist lTq wieder der skalar und natürliche Logarithmus des positiven Skalars Tq.

(1.) Als Beispiele [vergl. 235, (2.) und (4.)] mögen dienen,

$$\text{VI.}\ldots li = \tfrac{1}{2}i\pi; \qquad \text{VII.}\ldots l(-1) = i\pi.$$

(2.) Der allgemeine Logarithmus von q kann durch irgend eines der Symbole,

$$\log. q, \quad \text{oder} \quad \log q, \quad \text{oder} \quad (\log q)_n,$$

bezeichnet werden; das letzte bezeichnet seinen n-ten Werth; und wir haben daher

$$\text{VIII.}\ldots (\log q)_n = lq + 2in\pi.$$

(3.) Die Formel,

$$\text{IX.}\ldots \log. q'q = \log q' + \log q, \text{ wenn } q'|||q,$$

findet in dem Sinne statt, dass jeder Werth des ersten Gliedes einer der Werthe des zweiten (vergl. 236) ist.

(4.) Es ist der Hauptwerth von $q^{q'} = \varepsilon^{q'lq}$; und ein Werth von $\log. q^{q'} = q'lq$.

(5.) Der Quotient zweier allgemeinen Logarithmen,

$$\text{X.}\ldots (\log q')_{n'} : (\log q)_n = \frac{lq' + 2in'\pi}{lq + 2in\pi},$$

kann der allgemeine Logarithmus des Quaternions, q', in Bezug auf die complanare quaternion Basis q heissen; und wir sehn, dass sein Ausdruck zwei willkürliche und unabhängige ganze Zahlen enthält*, während sein Hauptwerth als $lq' : lq$ definirt werden kann.

---

* Wie der entsprechende Ausdruck in der Algebra, nach Graves und Ohm.

Digitized by Google

Fünfter Abschnitt.

Ueber endliche* (oder vielgliedrige) Gleichungen von algebraischer Form, welche complanare Quaternionen enthalten; und über die Existenz von n reellen quaternion Wurzeln irgend einer solchen Gleichung n-ten Grades.

244. Wir haben gesehn (233), dass eine Gleichung von der Form,

$$\text{I.} \ldots q^n - Q = 0,$$

in der n irgend eine gegebene positive ganze Zahl, und Q irgend ein** gegebener, reeller, und wirklicher Quaternion (144) ist, stets n reelle, wirkliche und ungleiche quaternion Wurzeln q hat, die mit Q complanar sind; nämlich die n verschiedenen und reellen Werthe des Symbols $Q^{\frac{1}{n}}$ (233, VIII.), die nach der Methode bestimmt werden, welche wir letztlich niedergelegt haben. Dieses Resultat ist indessen in einem viel allgemeineren Satze eingeschlossen, der quaternion Gleichungen von algebraischer Form betrifft; wenn nämlich $q_1, q_2, \ldots q_n$ irgend welche n gegebenen, reellen und complanaren Quaternionen sind, dann hat die Gleichung,

$$\text{II.} \ldots q^n + q_1 q^{n-1} + q_2 q^{n-2} + \ldots + q_n = 0,$$

stets n reelle quaternion Wurzeln, $q', q'', \ldots q^{(n)}$, in der gegebenen Ebne und nicht mehr; von diesen Wurzeln können indessen einige, oder alle, gleich sein in Folge gewisser Beziehungen, die zwischen den n gegebenen Coëfficienten bestehn.

---

* Wir sagen: endliche Gleichungen, und beabsichtigen damit nur, hier Gleichungen mit unendlich vielen Gliedern auszuschliessen, wie $Pq = 1$; diese Gleichung hatte, wie wir sahn (242), unendlich viele Wurzeln, welche durch den Ausdruck $q = 2inn\pi$ dargestellt werden, in dem n irgend eine ganze Zahl sein kann.

** Wir haben zwar angenommen, dass $Q \parallel\parallel i$ (225) ist; aber es hindert uns nichts, in irgend einem anderen Falle für i den Versor UVQ zu setzen und dann wie vorher zu verfahren.

245. Als eine andere Form desselben Satzes können wir sagen, dass wenn wir schreiben,

$$\text{I.}\ldots\ F_n q = q^n + q_1 q^{n-1} + \ldots + q_n,$$

— die Coëfficienten $q_1 \ldots q_n$ seien dieselben wie vorher — jede solche vielgliedrige Function, $F_n q$, gleich einem Product von n reellen, complanaren und linearen (oder zweigliedrigen) Factoren, von der Form $q - q'$ ist; oder dass man beweisen kann, dass eine Gleichung von der Form,

$$\text{II.}\ldots\ F_n q = (q - q')(q - q'') \ldots (q - q^{(n)}),$$

in allen Fällen besteht; wenn wir auch mit unseren gegenwärtigen Methoden nicht im Stande sind, Ausdrücke für die Wurzeln, $q', \ldots q^{(n)}$, mit Hülfe der Coëfficienten $q_1, \ldots q_n$ anzugeben.

246. Oder wir können sagen, dass es stets ein gewisses System von n reellen Quaternionen, q', u. s. w., i giebt, die dem System von Gleichungen, von bekannter algebraischer Form,

$$\text{III.}\ldots\ \begin{cases} q' + q'' + \ldots + q^{(n)} = -q_1; \\ q'q'' + q'q''' + q''q''' + \ldots = +q_2; \\ q'q''q''' + \ldots = -q_3; \text{ u. s. w.}; \end{cases}$$

genügen.

247. Oder da die Differenz $F_n q - F_n q'$ durch $q - q'$, wie in der Algebra, theilbar ist, unter den angenommenen Bedingungen der Complanarität (224), so ist es ausreichend zu sagen, dass wenigstens ein reeller Quaternion q' stets besteht, (mögen wir ihn angeben können oder nicht), welcher der Gleichung genügt,

$$\text{IV.}\ldots\ F_n q' = 0;$$

in ihr hat das Polynom F die vorige Form (245, I.).

248. Oder endlich können wir auch, da der Satz augenscheinlich für den Fall $n = 1$ wahr ist, während der Fall 244, I. betrachtet worden ist, und der Fall $q_n = 0$ durch die Annahme $q = 0$ befriedigt wird, ohne wesentlichen Verlust an Allgemeinheit, den vorigen Ausspruch auf den folgenden zurückführen:

Digitized by Google

Jede Gleichung von der Form*,

$$\text{I.}\ldots\ q\,(q-q')\,(q-q'')\,\ldots\,(q-q^{(n-1)}) = Q,$$

in der $q', q'', \ldots$ und Q irgend welche reellen und gegebenen Quaternionen in der gegebenen Ebne sind, von denen wenigstens Q und q' als wirklich (144) angenommen werden können, wird durch wenigstens einen reellen, wirklichen und complanaren Quaternion q befriedigt.

249. Nehmen wir an, dass die letzten $m-1$ von den $n-1$ gegebenen Quaternionen $q'\ldots q^{(n-1)}$ verschwinden, dass dagegen die $n-m$ ersten unter ihnen wirklich sind, wo m irgend eine ganze Zahl zwischen 1 und $n-1$ sein kann, und führen wir einen neuen reellen, bekannten, complanaren und wirklichen Quaternion q_0 ein, welcher der Bedingung genügt,

$$\text{II.}\ldots\ q_0^{\,m} = \frac{Q}{q'\,q''\ldots q^{(n-m)}},$$

so können wir die vorige Gleichung I. in folgender Weise schreiben,

$$\text{III.}\ldots f\,q = \left(\frac{q}{q_0}\right)^m \left(\frac{q}{q'} - 1\right)\left(\frac{q}{q''} - 1\right)\ldots\left(\frac{q}{q^{(n-m)}} - 1\right) = 1\,;$$

und können sie (nach 187, 159, 235) in die beiden folgenden zerlegen:

$$\text{IV.}\ldots\ Tfq = 1\,;\quad \text{und}\quad \text{V.}\ldots\ Ufq = 1,$$

oder

* Die entsprechende Form der algebraischen Gleichung n-ten Grades ist durch Mourey, in seinem so geistvollen und an ursprünglichen Gedanken reichen kleinen Werke, mit dem Titel: La vraie théorie des Quantités négatives, et des Quantités prétendues imaginaires (Paris, 1828) gegeben worden. Ich habe auch fördernde Hülfe für den geometrischen Beweis des Satzes im Text aus demselben Werke entnommen; in ihm ist indessen die hier (in 251) ein Oval genannte Curve doch wohl nicht mit hinreichender Genauigkeit definirt; die Ungleichheit, die ich hier als 251, XII. aufgezählt habe, wird dort nicht benutzt. Es ist zu beachten, dass Moureys Buch keinen Hinweis auf unsere Rechenart enthält; es beschränkt sich, wie die Double Algebra von Prof. Dr. Morgan (London, 1849), und wie das ältere Werk von Herrn Warren (Cambridge, 1828) auf Aufgaben in der Ebne; der wahre Begriff des Quaternions enthält dagegen, wie wir gesehn haben, eine Beziehung zum Raume von drei Dimensionen.

$$\text{VI.}\ldots\ \operatorname{am} fq = 2p\pi;$$

hier ist p eine gewisse ganze Zahl (mit Einschluss der Null und der negativen Grössen).

250. Um der Gleichung eine mehr geometrische Form zu geben, sei λ irgend eine gegebene oder angenommene Linie $\| \, i$, und es möge angenommen werden, dass $\alpha, \beta, \ldots$ und ϱ, σ, oder $OA, OB, \ldots$ und $OP, OS, n-m+2$ weitere Linien in derselben Ebne seien, und dass $\varphi\varrho$ eine bekannte skalar Function von ϱ sei, so dass

$$\text{VII.}\ldots\ \alpha = q'\lambda, \quad \beta = q''\lambda, \ldots \quad \varrho = q\lambda, \quad \sigma = q_0\lambda,$$

ist, und

$$\text{VIII.}\ldots\ \varphi\varrho = fq = \left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^m \cdot \frac{\varrho-\alpha}{\alpha} \cdot \frac{\varrho-\beta}{\beta} \ldots = \left(\frac{OP}{OS}\right)^m \cdot \frac{AP}{OA} \cdot \frac{BP}{OB} \cdots;$$

der zu beweisende Satz kann dann so ausgesprochen werden: was für ein System von reellen Punkten, $O, A, B, \ldots$ und S, in einer gegebenen Ebne, und was für eine positive ganze Zahl m auch angenommen, oder gegeben werden mag, es giebt stets wenigstens einen reellen Punkt P, in derselben Ebne, welcher den beiden Bedingungen genügt:

$$\text{IX.}\ldots\ T\varphi\varrho = 1; \qquad \text{X.}\ldots\ \operatorname{am}\varphi\varrho = 2p\pi.$$

251. Welchen Werth $\iota \| \, i$ wir auch für den Versor (oder Einheitsvector) $U\varrho$ annehmen mögen, es giebt stets wenigstens einen Werth des Tensors $T\varrho$, welcher der Bedingung IX. genügt; denn die Function $T\varphi\varrho$ verschwindet mit $T\varrho$, und wird unendlich, wenn $T\varrho = \infty$ wird, da sie sich continuirlich (wenn auch vielleicht mit Schwankungen) in diesem Intervall ändert. Beachten wir daher nur den kleinsten Werth (wenn es mehr als einen giebt) von $T\varrho$, der $T\varphi\varrho$ somit gleich der Einheit macht, so können wir uns eine reelle, unzweideutige und skalar Function $\psi\iota$ denken, welche die beiden folgenden Eigenschaften hat:

$$\text{XI.}\ldots\ T\varphi(\iota\psi\iota) = 1;$$
$$\text{XII.}\ldots\ T\varphi(x\iota\psi\iota) < 1, \qquad \text{wenn } x > 0, \ < 1.$$

Und auf diese Weise kann man sich vorstellen, dass die Gleichung, oder das System von Gleichungen,

Digitized by Google

XIII. . . $\varrho = \iota\psi\iota$, oder XIV. . . $U\varrho = \iota$, $T\varrho = \psi\iota$,

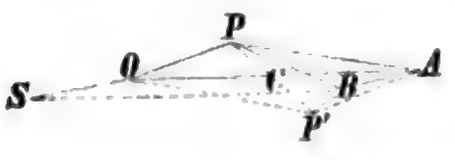
eine reelle, endliche und ebne geschlossene Curve darstellt, die wir im Allgemeinen ein Oval nennen wollen, und welche die beiden folgenden Eigenschaften hat: 1) jede grade Linie, oder jeder Strahl, der von dem Anfangspunkt O aus in irgend einer beliebigen Richtung in der Ebne gezogen wird, trifft die Curve einmal, aber nur einmal; und 2), nicht einer der $n - m$ anderen gegebenen Punkte A, B,.. liegt auf dem Oval, denn es ist $\varphi\alpha = \varphi\beta = .. = 0$.

252. Nachdem wir die vorigen Sätze aufgestellt haben, denken wir uns einen Punkt P, der sich in positiver Richtung in Bezug auf den gegebenen inneren Punkt O bewegt, und der einen Umlauf des Ovals beschreibt; wie auch die gegebene Richtung der Linie OS sein mag, die Amplitude am $(\varrho : \sigma)$, die wir uns als continuirlich* veränderlich denken, wird in Folge dieses einen positiven Umlaufs um vier rechte Winkel, oder um 2π, anwachsen; und folglich wird die Amplitude des Factors linker Hand $(\varrho : \sigma)^m$, von $\varphi\varrho$, zu gleicher Zeit um $2m\pi$ anwachsen. Wenn dann der Punkt A auch im Innern des Ovals liegt, so dass die Linie OA verlängert werden muss, um die Curve zu treffen, so wird der Strahl AP ebenfalls einen positiven Umlauf gemacht haben, und die Amplitude des Factors $(\varrho - \alpha) : \alpha$ wird um 2π angewachsen sein. Wenn dagegen A ein äusserer Punkt ist, so dass die endliche Linie OA die Curve in einem Punkte M schneidet, und sie daher nicht mehr trifft, wenn sie weiter verlängert wird, obwohl die Verlängerung der entgegengesetzten Linie AO sie einmal in einem gewissen Punkte N treffen muss, so hat der Strahl AP, während der Punkt P zuerst den, wie wir ihn nennen können, positiven Halbumlauf von M nach N vollführt und danach den weiteren positiven Halbumlauf von N wieder nach M, um seine Anfangs- und Endlage, nämlich um die Linie AO, nur oscillirt, ohne die entgegengesetzte Richtung jemals zu erreichen; in diesem Falle hat daher die Amplitude am $(AP : OA)$, wenn wir sie wieder als continuirlich veränder-

* Das heisst, sie soll keine plötzliche Zunahme, oder Abnahme, um einen oder mehrere ganze Umläufe [vergl. 235, (1.)] erfahren.

lich annehmen, nur in ihrem Werthe hin und hergeschwankt, und (im Ganzen) überhaupt keine Veränderung erlitten. Und da genau gleiche Betrachtungen auf die anderen gegebenen Punkte, B, u. s. w., anwendbar sind, so folgt, dass die Amplitude, am $q\,\varrho$, des Productes (VIII.) aller dieser Factoren, einen Gesammtzuwachs $= 2(m + t)\pi$ erhalten hat (nach 236), wenn t die Anzahl (die null sein kann) der gegebenen inneren Punkte, $A, B, \ldots$ ist; während die Zahl m (nach 249) wenigstens $= 1$ ist. Daher hat die Amplitude am $q\,\varrho$, während P (wie vorher) einen positiven Umlauf vollführt, wenigstens $m$mal, und daher wenigstens einmal, einen Werth von der Form $2p\pi$ angenommen; und folglich ist die Bedingung X. wenigstens einmal erfüllt worden. Dagegen wird die weitere Bedingung, IX., durchweg erfüllt, in Folge der angenommenen Constructionsweise des Ovals; es giebt daher wenigstens eine reelle Lage von P auf der Curve, für welche $q\,\varrho$ oder $fq = 1$ ist; so dass für diese Lage des Punktes die Gleichung 249, III., und daher auch die Gleichung 248, I. befriedigt wird. Der Satz des Art. 248, und folglich auch (nach 247) der Satz des Art. 244, und seine Umformungen 245 und 246, sind daher damit bewiesen.

Fig. 65.



253. Dieser Schluss ist so wichtig, dass es mir nützlich scheint, die allgemeine Betrachtung dadurch zu erläutern, dass wir sie auf den Fall einer quadratischen Gleichung anwenden, von der Form,

$$\text{I.}\ldots f\,q = \frac{q}{q_0}\left(\frac{q}{q} - 1\right) = 1;$$

oder

$$\text{II.}\ldots q\,\varrho = \frac{\varrho}{\alpha}\left(\frac{\varrho}{\alpha} - 1\right) = \frac{OP}{OS}\cdot\frac{AP}{OA} = 1.$$

Wir haben jetzt zu beweisen (vergl. 250, VIII.), dass ein (reeller) Punkt P existirt, der die vierte Proportionale (226) zu den drei Linien OA, OP, AP gleich einer gegebenen Linie OS, oder AB, macht, wenn die letztere $= OS$ gezogen wird; oder welcher der folgenden Bedingung der Aehnlichkeit von Dreiecken (118) genügt,

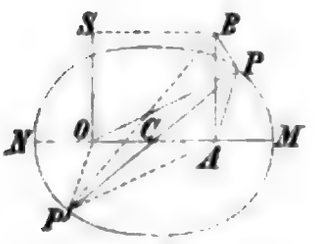
$$\text{III.}\ldots \Delta AOP \propto PAB;$$

Digitized by Google

und das schliesst die Gleichung zwischen den Rechtecken ein,

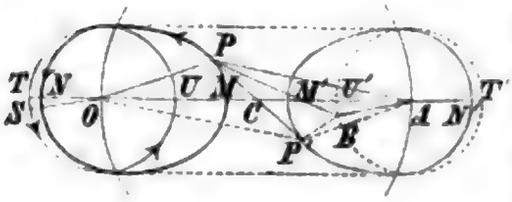
$$\text{IV.}\ldots\ \overline{OP}.\overline{AP} = \overline{OA}.\overline{AB}.$$

Fig. 55, bis.



(Vergleiche die beiden Figuren 55 und 55, bis.) Denken wir uns also, dass eine continuirliche Curve* beschrieben wird, als ein Ort (oder ein Theil des Ortes) von P, nach der Gleichung IV., und dass die weitere Bedingung, wenn nöthig, erfüllt ist, dass O innerhalb derselben liegt; der Art, dass, wenn (wie in Fig. 56) eine gerade Linie von O aus den allgemeinen oder Gesammtort in verschiedenen Punkten, M, M', N', trifft, wir sie alle mit Ausnahme des Punktes M, der O am nächsten ist, nicht beachten, als nicht zu dem hier betrachteten Oval gehörig (vergl. 251, XII.); dann wird, wenn P sich auf diesem Oval von M nach N, in der positiven Richtung in Bezug auf O bewegt, und dann wieder von N nach M, so dass der Strahl OP einen positiven Umlauf ausführt, und die Amplitude des Factors $OP:OS$ allmählig um 2π anwächst, der Strahl AP ebenfalls einen positiven Umlauf ausführen, oder sich (im Ganzen) überhaupt nicht umdrehen, und die Amplitude des Factors $AP:OA$ wächst um 2π oder um 0, je nachdem der Punkt A im Innern oder ausserhalb des Ovals liegt. In dem einen Falle wächst daher die Amplitude am $\varphi\rho$ des Productes um 4π (wie in Fig. 55, bis), und in dem anderen Falle wächst sie um 2π (wie in Fig. 56); so dass sie in jedem Falle wenigstens einmal einen Werth von der Form $2p\pi$ annimmt, was auch ihr Anfangswerth gewesen sein mag. Daher haben wir wenigstens für eine reelle Lage P, auf dem Oval,

Fig. 56.



* Diese Curve vierten Grades ist die wohlbekannte Cassini'sche Curve; wenn sie dagegen, wie in Fig. 56, in zwei getrennte Ovale zerfällt, so behalten wir hier, als das im Beweise gebrauchte, nur das um O beschriebene Oval bei, und verwerfen für jetzt dasjenige, in dem A liegt.

$$\text{V.}\ldots \operatorname{am} \varphi\, \varrho = 1,$$

und daher

$$\text{VI.}\ldots\ U\varphi\, \varrho = 1;$$

dagegen ist durchweg

$$\text{VII.}\ldots\ T\varphi\, \varrho = 1,$$

nach der Construction, oder nach der Gleichung des Ortes IV.; die geometrische Bedingung $\varphi\, \varrho = 1$ (II.) wird daher wenigstens durch einen reellen Vector ϱ erfüllt: und folglich wird die quadratische Gleichung $fq = 1$ (I.) wenigstens durch eine reelle Quaternionwurzel, $q = \varrho : \lambda$ (250, VII.), befriedigt. Dagegen hat die vorige Form I. dieselbe Allgemeinheit, wie die frühere Form,

$$\text{VIII.}\ldots\ F_2 q = q^2 + q_1 q + q_2 = 0 \quad \text{(vergl. 245)},$$

wo q_1 und q_2 irgend zwei gegebene, reelle, wirkliche und complanare Quaternionen sind; es giebt daher stets einen reellen Quaternion q' in der gegebenen Ebne, welcher der Gleichung,

$$\text{VIII.}'\ldots\ F_2 q' = q'^2 + q_1 q' + q_2 = 0 \quad \text{(vergl. 247)},$$

genügt; subtrahirt man daher und dividirt mit $q - q'$, wie in der Algebra (vergl. 224), so erhält man die folgende reducirte, oder lineare, Gleichung für q,

$$\text{IX.}\ldots\ q + q' + q_1 = 0,$$

oder

$$\text{IX.}'\ldots\ q = q'' = -q' - q_1 \quad \text{(vergl. 246)}.$$

Die quadratische Gleichung VIII. hat daher eine zweite reelle quaternion Wurzel, q'', die in der vorigen Beziehung zur ersten steht; und da die quadratische Function $F_2 q$ (vergl. wieder 245) somit in zwei lineare Factoren zerlegbar ist, oder auf die Form,

$$\text{X.}\ldots\ F_2 q = (q - q')(q - q''),$$

gebracht werden kann, so kann sie nicht für irgend einen dritten reellen Quaternion q verschwinden; so dass (vergl. 244) die quadratische Gleichung nicht mehr als zwei solche reellen Wurzeln hat.

(1.) Die cubische Gleichung kann daher auf die Form (vergl. 248) gebracht werden,

$$\text{XI.}\ldots\ F_3 q = q^3 + q_1 q^2 + q_2 q + q_3 = q(q - q')(q - q') + q_3 = 0;$$

sie hat daher eine reelle Wurzel, nennen wir sie q', nach dem allgemeinen Beweise (252), den wir vorher für den Fall der quadratischen Gleichung erläutert haben; subtrahiren wir daher

Digitized by Google

(vergl. 247) die Gleichung $F_3 q' = 0$, und dividiren mit $q - q'$, so können wir die cubische Gleichung auf eine quadratische reduciren, die zwei neue reelle Wurzeln, q'' und q''', haben würde; und somit kann die cubische Function auf die Form gebracht werden,

$$\text{XII.} \ldots F_3 q = (q - q')(q - q'')(q - q'''),$$

und diese Form kann nicht für irgend einen vierten reellen Werth von q verschwinden; die cubische Gleichung XI. hat daher nicht mehr als drei reelle quaternion Wurzeln (vergl. 244); und ähnliches gilt für Gleichungen von höheren Graden.

(2.) Die Existenz zweier reellen Wurzeln q der quadratischen Gleichung I., oder zweier reellen Vectoren ϱ und ϱ', die der Gleichung II. genügen, hätte auch durch geometrische Betrachtung von vornherein angenommen werden können wegen der vorher bewiesenen Zunahme $= 4\pi$ der Amplitude $q\,\varrho$ im Verlauf eines Umlaufs für den Fall von Fig. 55, bis; denn in Folge derselben muss es zwei reelle Lagen, P und P', auf dem einen Oval dieser Figur geben, von denen jede der Aehnlichkeitsbedingung III. genügt; und auch für den Fall von Fig. 56, nach der Betrachtung, dass das zweite (oder schwächer gezeichnete) Oval, das in diesem Falle vorhanden ist, wenn wir es auch vorher nicht benutzt haben, zu A genau in derselben Beziehung steht, in der das erste (oder stärker gezeichnete) Oval der Figur zu O steht; so dass der reellen Lage P auf dem ersten eine andere reelle Lage P' auf dem zweiten entsprechen muss.

(3.) Was das Gesetz dieses Zusammenhangs betrifft, so können wir, wenn die Gleichung II. auf die Form,

$$\text{XIII.} \ldots \left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 - \left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^1 - \frac{\sigma}{\alpha} = 0,$$

gebracht wird, und wenn wir jetzt setzen,

$$\text{XIV.} \ldots \varrho = q\alpha,$$

schreiben,

$$\text{XV.} \ldots q_1 = -1, \qquad q_2 = -\sigma : \alpha,$$

zur Vergleichung mit der Form VIII.; und dann nimmt die vorige Beziehung IX.′ (oder 246) zwischen den beiden Wurzeln die Form der folgenden Beziehung zwischen Vectoren an,

$$\text{XVI.} \ldots \varrho + \varrho' = \alpha;$$

oder

$$\text{XVI}'. \ldots OP' = \varrho' = \alpha - \varrho = PA;$$

so dass der Punkt P' (wie in den angeführten Figuren) das Parallelogramm $OPAP'$ vervollständigt, und die Linie PP' durch den Mittelpunkt C von OA halbirt wird. Demnach haben wir bei dieser Lage von P' (vergl. III.) die Aehnlichkeit, und (vergl. II. und 226) die Gleichung,

$$\text{XVII.} \ldots \Delta AOP' \propto P'AB;$$

$$\text{XVIII.} \ldots \varphi\varrho' = \varphi(\alpha - \varrho) = \varphi\varrho = 1.$$

(4.) Die weitere Beziehung zwischen den beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung VIII., nämlich (vergl. 246),

$$\text{XIX.} \ldots q'q'' = q_2,$$

ergiebt

$$\text{XX.} \ldots \frac{\varrho}{\alpha}\varrho' = -\sigma;$$

und demnach ist die Linie σ, oder OS, eine vierte Proportionale zu den drei Linien OA, OP und AP, oder α, ϱ und $-\varrho'$.

(5.) Die wirkliche Lösung der quadratischen Gleichung VIII. in complanaren Quaternionen durch Berechnung wird grade so wie in der Algebra ausgeführt; die Formel ist,

$$\text{XXI.} \ldots q = -\tfrac{1}{2}q_1 \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}q_1^2 - q_2)};$$

in ihr ist indessen die Quadratwurzel nach den schon ausgesprochenen Sätzen als ein reeller Quaternion zu deuten.

(6.) Cubische und biquadratische Gleichungen mit quaternion Coëfficienten von der in 244 betrachteten Art werden gleichfalls durch die bekannten Formeln der Algebra aufgelöst; aber wir haben jetzt (wie bewiesen wurde) drei reelle (quaternion) Wurzeln für die erstere, und vier solche reellen Wurzeln für die letzteren.

254. Im Folgenden gebe ich eine andere Art, die geometrischen Betrachtungen des vorhergehenden Artikels darzustellen, ohne ausdrücklich die Bezeichnung oder den Begriff der Amplitude einzuführen. Schreibt man die Gleichung $\varphi\varrho = 1$ in 253 in folgender Weise,

Digitized by Google

$$\text{I.} \ldots \sigma = \chi\varrho = \frac{\varrho}{a}(\varrho - \alpha),$$

oder

$$\text{II.} \ldots T\sigma = T\chi\varrho,$$

und

$$\text{III.} \ldots U\sigma = U\chi\varrho,$$

so können wir den Vector σ als eine bekannte Function des Vectors ϱ ansehn, oder den Punkt S als eine Function des Punktes P, in dem Sinne, dass P und S sich zusammen ändern, während O und A fest sind; doch dabei kann es vorkommen (und kommt auch wirklich vor), dass S in eine frühere Lage zurückkehrt, ohne dass P ebenfalls zurückgekehrt ist. Die wesentliche Eigenschaft des Ovals (253) können wir jetzt in folgender Weise aussprechen, dass es der Ort der O am nächsten befindlichen Punkte P ist, für welche der Tensor $T\chi\varrho$ einen gegebenen Werth hat, nennen wir ihn b; nämlich den gegebenen Werth von $T\sigma$, oder OS, wenn der Punkt S, ebenso wie O und A, gegeben ist. Wenn wir uns daher den Punkt P, wie vorher, auf dem Oval entlang bewegt denken, und den Punkt S ebenfalls in Bewegung denken, nach dem Gesetz, welches durch die vorige Formel I. ausgedrückt wird, so muss sich der letztere Punkt (nach II.) auf dem Umfange eines gegebenen Kreises bewegen (vergl. wieder Fig. 56), dessen Mittelpunkt der gegebene Anfangspunkt O ist; und es gilt der Satz, dass S bei dieser Bewegung wenigstens einmal durch jede Lage auf dem Kreise gehn muss, wenn P einen Umlauf des Ovals beschreibt. Man kann es beweisen, wenn man (nach III.) beachtet, dass die Winkelbewegung des Radius OS gleich der Summe der Winkelbewegungen der beiden Strahlen OP und AP ist; aber die letztere Summe beträgt acht rechte Winkel für den Fall von Fig. 55, bis, und vier rechte Winkel für den Fall von Fig. 56; der Radius OS, und der Punkt S, müssen daher im ersten Falle zwei Mal, und im zweiten Falle einmal umgelaufen sein; und das beweist den erwähnten Satz.

(1.) In dem ersten von diesen beiden Fällen, nämlich wenn A ein innerer Punkt ist, ist jede von den drei Winkelgeschwindigkeiten durchweg positiv, und die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Radius OS ist das Doppelte derjenigen

eines jeden der beiden Strahlen OP, AP. Dagegen ist im zweiten Falle, wenn der Punkt A ein äusserer ist, die mittlere Winkelgeschwindigkeit des Strahles AP null; und wir könnten für einen Augenblick zweifelhaft sein, ob nicht die bisweilen negative Geschwindigkeit dieses Strahles, für Theile des Umlaufs, die stets positive Geschwindigkeit des Strahles OP übersteigt, und so bewirkt, dass sich der Radius OS eine Zeit lang rückwärts bewegt. Das kann indessen nicht stattfinden; denn wenn wir uns vorstellen, dass P ebenso wie P' einen Umlauf des anderen (schwächer gezeichneten) Ovals, in Fig. 56, beschreibt, so würde der Punkt S (wenn er wieder von jenem nach dem Gesetz I. abhängt) wieder den ganzen selben Umlauf durchlaufen, wie vorher; wenn er daher jemals in seiner Bewegung vor- und zurückgehn könnte, so würde er mehr als zweimal durch gewisse gegebene Reihen von reellen Lagen auf diesem Kreise gehn, während P der Reihe nach die beiden Ovale beschreibt; und somit würde die quadratische Gleichung, zwischen gewissen Grenzwerthen ihrer Coëfficienten, mehr als zwei reelle Wurzeln haben; ein Resultat, dessen Unmöglichkeit bewiesen worden ist.

(2.) Während also S einen Kreis um O beschreibt, wird der mit ihm verbundene Punkt B einen gleichen Kreis um A beschreiben; und wenigstens in dem Falle von Fig. 56 ist aus der beständigen Gleichheit (253, IV.) der Rechtecke $OP.\overline{AP}$ und $OA.\overline{AB}$ leicht geometrisch zu beweisen, dass die beiden Kreise (deren Durchmesser $T'U$ und $T'U'$ sind), und die beiden Ovale (mit den Achsen MN und $M'N'$) zwei gemeinsame Tangenten haben, welche parallel zur Linie OA sind, einer Linie, welche — wie wir sagen können — die beiden gegebenen Brennpunkte (oder Focalpunkte) O und A verbindet; der neue oder dritte Kreis, der über dem Focalabstand OA als Durchmesser beschrieben wird, geht durch die vier Berührungspunkte auf den Ovalen, wie die Figur erläutern mag.

(3.) Um dieselben Sätze durch Quaternionen zu beweisen, scheint es mir angemessen, den Anfangspunkt (18), der Symmetrie halber, mit dem Mittelpunkt C zu vertauschen; und folglich CP jetzt mit ρ zu bezeichnen, und CA mit α;

Digitized by Google

auch $\overline{CA} = T\alpha = a$ zu schreiben, und wieder den Radius eines jeden der beiden gleichen Kreise durch b darzustellen. Wir haben dann, als die Verbindungsgleichung des Systems der beiden Ovale, die folgende Gleichung:

$$\text{IV.}\ldots\ T(\varrho+\alpha).T(\varrho-\alpha) = 2ab;$$

oder

$$\text{V.}\ldots\ T(q^2-1) = 2c;\quad \text{wenn } q = \frac{\varrho}{\alpha}\ \text{ und } c = \frac{b}{a}.$$

Da wir aber allgemein (nach 199, 204, u. s. w.) die Transformationen haben,

$$\begin{aligned}\text{VI.}\ldots\ S.q^2 &= 2Sq^2 - Tq^2 = Tq^2 + 2Vq^2\\ &= 2NSq - Nq = Nq - 2NVq,\end{aligned}$$

so kann das Quadrat der Gleichung V. [nach 210, (8.)] unter einer der beiden folgenden Formen geschrieben werden:

$$\text{VII.}\ldots\ (Nq-1)^2 + 4NVq = 4c^2;$$
$$\text{VIII.}\ldots\ (Nq+1)^2 - 4NSq = 4c^2;$$

die erste von ihnen zeigt, dass der Maximalwerth von TVq gleich c ist, wenigstens wenn $2c < 1$, wie es grade für den Fall der Fig. 56 stattfindet; und dass dieses Maximum dem Werthe $Tq = 1$, oder $T\varrho = a$ entspricht; Ergebnisse, die, wenn sie gedeutet werden, wieder die Resultate des vorhergehenden Nebenartikels zur Folge haben.

(4.) Wenn $2c > 1$ ist, so ist es erlaubt, $Sq = 0, NVq = Nq = 2c-1$ anzunehmen; und dann haben wir nur ein ununterbrochen fortlaufendes Oval, wie in dem Falle von Fig. 55, bis; wenn dagegen $c < 1$ ist, wenn auch $> \frac{1}{2}$, so besteht eine gewisse wellenförmige Biegung in der Form der Curve (die in der Figur nicht dargestellt ist), und TVq wird ein Minimum für $Sq = 0$, oder wenn $\varrho \perp \alpha$; er wird dagegen ein Maximum (wie vorher), wenn $Tq = 1$ ist, und verschwindet, wenn $Sq^2 = 2c+1$, nämlich an den beiden Kuppen M, N, wo das Oval die Achse schneidet.

(5.) In dem dazwischenliegenden Falle, wenn $2c = 1$ ist, wird die Cassini'sche Curve IV. (wie bekannt ist) eine Lemniscate; ihre quaternion Gleichung kann, nach V., unter irgend einer der folgenden Formen geschrieben [vergl. 200, (8.)] werden:

$$\text{IX.}\ldots T(q^2-1)=1;$$

oder

$$\text{X.}\ldots Nq^2=2\,S.q^2;$$

oder

$$\text{XI.}\ldots Tq^2=2\,SU.q^2;$$

oder endlich,

$$\text{XII.}\ldots T\varrho^2=2\,T\alpha^2\cos 2\angle\frac{\varrho}{\alpha};$$

und wenn man die letztere Form schreibt,

$$\text{XII}'.\ldots \overline{CP}^2=2\,\overline{CA}^2.\cos 2\,ACP,$$

so stimmt sie augenscheinlich mit bekannten Resultaten überein.

(6.) Das Vorige entspricht dem Fall, wenn

$$\text{XIII.}\ldots \sigma=\frac{-a}{4},$$

und

$$\text{XIV.}\ldots \varrho=\varrho'=+\frac{a}{2},\quad \text{in 253, XIII.},$$

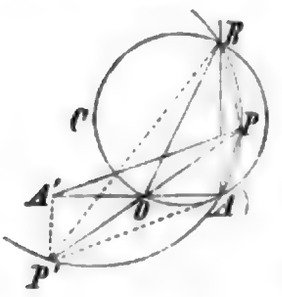
die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind somit gleich; und im Allgemeinen entsprechen, bei Gleichungen von allen Graden, Fällen, in denen die Wurzeln gleich sind, gewisse interessante Eigenthümlichkeiten in der Form der Ovale, bei denen wir hier nicht verweilen können.

(7.) Es mag indessen in Kürze bemerkt werden, dass wenn wir die Beschränkung fallen lassen, dass der Vector ϱ, oder CP, in einer gegebenen Ebne (225) liegen soll, die durch die Linie geht, welche die beiden Brennpunkte O und A verbindet, dass dann die vorige Gleichung V. die Oberfläche (oder die Oberflächen) darstellt, welche durch die Umdrehung des Ovals (oder der Ovale), oder der Lemniscate, um die Linie OA als Achse entsteht.

255. Wenn wir, für einen Augenblick, auf die Formel für die Aehnlichkeit, 253, III., zurückblicken, so sehn wir, dass sie nicht nur eine Gleichheit zwischen Rechtecken, 253, IV., enthält, sondern auch eine Gleichheit zwischen Winkeln, nämlich AOP und PAB; so dass der Winkel OAB (in den Figuren 55) eine gegebene Differenz der Basiswinkel AOP, PAO des Dreiecks OAP darstellt; aber ein Dreieck aus einer solchen gegebenen Differenz in Verbindung mit einer gegebenen Basis

und einem gegebenen Rechteck der Seiten zu construiren, ist eine bekannte Aufgabe der elementaren Geometrie. Um sie in Kürze, als eine Uebungsaufgabe, durch Quaternionen zu lösen, möge die gegebene Basis die Linie AA' sein, O sei ihr Mittelpunkt, wie in der nebenstehenden Figur 57; es möge BAA' die gegebene Differenz der Basiswinkel, $PAA' - AA'P$, darstellen; und es sei $\overline{OA}.\overline{AB}$ gleich dem gegebenen Rechteck der Seiten, $\overline{AP}.\overline{A'P}$. Wir haben dann die Aehnlichkeit und die Gleichung,

Fig. 57.



$$\text{I.}\ldots \Delta OA'P \propto PAB;$$

$$\text{II.}\ldots \frac{\varrho+\alpha}{\alpha} = \frac{\beta-\alpha}{\varrho-\alpha};$$

und daraus folgt durch die einfachste Rechnung, dass

$$\text{III.}\ldots \left(\frac{\varrho}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\varrho}{\alpha}+1\right)\left(\frac{\varrho}{\alpha}-1\right)+1 = \frac{\beta-\alpha}{\alpha}+1 = \frac{\beta}{\alpha};$$

ϱ ist mithin eine mittlere Proportionale (227) zwischen α und β. Ziehn wir daher eine Linie OP, die ihrer Länge nach ein geometrisches Mittel zwischen den beiden gegebenen Linien OA, OB ist und auch ihren Winkel AOB halbirt, so ist ihr Endpunkt die gewünschte Spitze P des gesuchten Dreiecks $AA'P$; und dies Ergebniss der quaternion Analyse bestätigt die geometrische Synthese* leicht.

(1.) Die Gleichung III. wird indessen auch (vergl. 227) durch den entgegengesetzten Vector, $OP' = PO$, oder $\varrho' = -\varrho$ befriedigt; und da $\beta = (\varrho : \alpha).\varrho$ ist, so haben wir

$$\text{IV.}\ldots \frac{\varrho+\beta}{\varrho+\alpha} = \frac{\varrho}{\alpha} = \frac{\beta}{\varrho} = \frac{\varrho'}{\alpha'},$$

oder

$$\text{IV.}'\ldots \frac{P'B}{P'A} = \frac{OP}{OA} = \frac{OB}{OP} = \frac{OP'}{OA'};$$

so dass die folgenden vier Dreiecke ähnlich sind (die beiden ersten von ihnen sind auch gleich):

* In der That sind die beiden Dreiecke I. ähnlich, wie gefordert wird, denn ihre Winkel bei O und P sind gleich, und die sie einschliessenden Seiten proportional.

$$V...\ \Delta A'OP' \propto AOP \propto POB \propto AP'B;$$

und das kann man wiederum auf geometrischem Wege bestätigen.

(2.) Die Winkel $AP'B$, BPA sind daher Supplementwinkel, ihre Summe ist gleich der Summe der Winkel im Dreieck OAP; daraus folgt, dass die vier Punkte A, P, B, P' auf demselben Kreise liegen oder concircular* sind; oder mit anderen Worten, das Vierseit $APBP'$ ist einem Kreise eingeschrieben, der — wie wir hinzufügen können — durch den Mittelpunkt C des Kreises OAB (siehe wieder Fig. 57) geht, denn der Winkel AOB ist das Doppelte des Winkels $AP'B$, nach dem, was schon bewiesen worden ist.

(3.) Quadratische Gleichungen in Quaternionen können auch zur Auflösung vieler anderen geometrischen Aufgaben verwendet werden; zum Beispiel, einen gegebenen Vector in zwei andere zu zerlegen, die ein gegebenes geometrisches Mittel haben sollen, u. s. w.

Sechster Abschnitt.

Ueber die $n^3 - n$ imaginären (oder symbolischen) Wurzeln einer quaternion Gleichung n-ten Grades, deren Coëfficienten von der in dem vorhergehenden Abschnitt betrachteten Art sind.

256. Die vielgliedrige Function $F_n q$ (245) kann ebenso, wie die Quaternionen $q, q_1, \ldots q_n$, von denen sie abhängt, stets

---

* Auf geometrischem Wege ergiebt die Construction sofort die Aehnlichkeit,

$$\Delta AOP \propto POB,$$

und danach ist

$$\angle BPA = OPA + PAO = POA';$$

und wenn wir das Parallelogramm $APA'P'$ vervollständigen, so ergiebt sich die neue Aehnlichkeit,

$$\Delta OA'P \propto OP'B,$$

und danach ist

$$\angle AP'B = OA'P + A'PO = AOP;$$

die gegenüberliegenden Winkel BPA, $AP'B$ sind somit Supplementwinkel, und um das Vierseit $APBP'$ lässt sich ein Kreis beschreiben. Ich werde in einem sogleich folgenden Abschnitte zeigen, dass die vier Punkte A, P, B, P' eine harmonische Gruppe auf dem ihnen gemeinsamen Kreise bilden.

Digitized by Google

auf die Form eines Paares (228) gebracht werden; und wir können somit die Umformung (vergl. 239) aufstellen,

$$\text{I.} \ldots F_n q = F_n (x + iy) = X_n + i Y_n = G_n (x, y) + i H_n (x, y),$$

X_n und Y_n, oder G_n und H_n sind zwei bekannte, reelle, endliche und skalar Functionen der beiden gesuchten Skalare x und y; diese Functionen sind, in Bezug auf sie, jede von der n-ten Dimension; aber sie enthalten auch die $2n$ gegebenen und reellen Skalare, $x_1, y_1, \ldots x_n, y_n$, wenn auch nur in der ersten Dimension. Und da die eine quaternion (oder paar) Gleichung, $F_n q = 0$, gleichbedeutend (nach 228, IV.) mit dem System der beiden skalar Gleichungen,

$$\text{II.} \ldots X_n = 0, \quad Y_n = 0,$$

oder

$$\text{III.} \ldots G_n (x, y) = 0, \qquad H_n (x, y) = 0,$$

ist, so sehn wir (nach dem, was wir in 244 ausgesprochen und in 252 bewiesen haben), dass ein solches System von zwei Gleichungen von der n-ten Dimension stets durch n Systeme (oder Paare) von reellen Skalaren, und durch nicht mehr als n, befriedigt werden kann, wie

$$\text{IV.} \ldots x', y'; \quad x'', y''; \ldots \quad x^{(n)}, y^{(n)};$$

wenn es auch vorkommen kann, dass zwei oder mehr von diesen Systemen mit einander zusammenfallen oder einander gleich werden.

(1.) Wenn x und y als Coordinaten [vergl. 228, (3.)] behandelt werden, so stellen die beiden Gleichungen II. oder III. ein System von zwei Curven in der gegebenen Ebne dar; und dann sagt der Satz aus, dass sich die beiden Curven (im Allgemeinen*) in n reellen Punkten schneiden, und in nicht mehr;

---

* Fälle von gleichen Wurzeln können zur Folge haben, dass Durchschnittspunkte, die im Allgemeinen imaginär sind, reell werden, doch mit einander und mit früheren reellen Wurzeln zusammenfallen; zum Beispiel die Hyperbel, $x^2 - y^2 = a$, wird in zwei reellen und verschiedenen Punkten durch das Paar von graden Linien $xy = 0$ geschnitten, wenn der Skalar $a >$ oder < 0 ist; dagegen kann man für den Fall $a = 0$ es so ansehn, als ob sich die beiden Linienpaare, $x^2 - y^2 = 0$ und $xy = 0$, in vier zusammenfallenden Punkten im Anfangspunkte schnitten.

wenn auch zwei oder mehr von diesen n Punkten im besonderen Falle mit einander zusammenfallen können.

(2.) Es möge h, als eine augenblicklich gebrauchte Abkürzung, die frühere oder gewöhnliche Imaginäre, $\sqrt{-1}$, der Algebra bedeuten, die wir als ein nicht gedeutetes Symbol ansehn, und als nicht irgend einem reellen Versor gleich, wie es zum Beispiel i [vergl. 181, und 214, (3.)] ist, der dagegen die Rechnungsregeln für Skalare befolgt, besonders was die commutative Eigenschaft der Multiplication (126) betrifft; so dass

$$\text{V.} \ldots h^2 + 1 = 0,$$

und

$$\text{VI.} \ldots hi = ih,$$

dagegen

$$\text{VII.} \ldots h \text{ nicht } = \pm i.$$

(3.) Es möge q wieder einen reellen Quaternion bedeuten, oder ein reelles Paar, $x + iy$; und mit der eben jetzt vorgeschlagenen Bedeutung von h möge $[q]$ die mit ihm in Verbindung stehende aber imaginäre algebraische Grösse, oder den Biskalar [214, (7.)] $x + hy$, bedeuten; so dass

$$\text{VIII.} \ldots q = x + iy,$$

aber

$$\text{IX.} \ldots [q] = x + hy;$$

und wir wollen irgend einen Biquaternion [214, (8.)], oder (wie wir es hier nennen können) irgend ein Doppelpaar von der Form $[q'] + i[q'']$, mit i complanar nennen; die Bezeichnung (123) der Complanarität soll die frühere sein.

(4.) Dann können wir dazu gelangen, für die vielgliedrige Gleichung in reellen und complanaren Quaternionen, $F_n q = 0$ (244, 245), die folgende mit ihr in Verbindung stehende algebraische Gleichung von demselben Grade n zu setzen, die in ähnlicher Weise reelle Skalare enthält:

$$\text{X.} \ldots [F_n q] = [q]^n + [q_1][q^{n-1}] + \ldots + [q_n] = 0;$$

sie nimmt nach den Reductionen, die von der Ersetzung V. von h^2 durch -1 abhängen, die Form an,

$$\text{XI.} \ldots [F_n q] = X_n + h Y_n = 0;$$

hier sind X_n und Y_n dieselben reellen skalar Functionen wie in I.

Digitized by Google

(5.) Wir haben aber in II. gesehn, dass man diese beiden reellen Functionen zusammen zum Verschwinden bringen kann, wenn man irgend eines der n reellen Paare IV. für die skalar Werthe, x und y, auswählt; die allgemeine algebraische Gleichung X., vom n-ten Grade, hat daher n reelle oder imaginäre Wurzeln*, von der Form $x + y\sqrt{-1}$; und sie hat nicht mehr als n solche Wurzeln.

(6.) Die Elimination von y, aus den beiden Gleichungen II. oder III., führt im Allgemeinen zu einer algebraischen Gleichung in x, vom Grade n^2; diese Gleichung hat daher n^2 algebraische Wurzeln (5.), reelle oder imaginäre; nämlich — nach dem, was wir kürzlich bewiesen haben — n reelle und skalar Wurzeln, $x', \ldots x^{(n)}$, denen reelle und skalar Werthe $y', \ldots y^{(n)}$ (vergl. IV.) von y entsprechen; und $n\,(n-1)$ weitere Wurzeln, mit der gleichen Anzahl entsprechender Werthe von y, die in folgender Weise bezeichnet werden können,

$$\text{XII.}\ldots [x^{(n+1)}], \ldots [x^{(n^2)}];$$
$$\text{XIII.}\ldots [y^{(n+1)}], \ldots [y^{(n^2)}];$$

und sie sind entweder selbst imaginär [oder biskalar, 214, (7.)], oder entsprechen wenigstens, nach der angenommenen Elimination, imaginären oder biskalaren Werthen von y; denn wenn $x^{(n+1)}$ und $y^{(n+1)}$, zum Beispiel, beide reell sein könnten, so würde die quaternion Gleichung $F_n q = 0$ eine $(n+1)$ste reelle Wurzel von der Form, $q^{(n+1)} = x^{(n+1)} + iy^{(n+1)}$ haben, und das würde schon Bewiesenem (252) widersprechen.

257. Im Ganzen ergiebt sich mithin, dass die Gleichung $F_n q = 0$ in complanaren Quaternionen, vom n-ten Grade, mit reellen Coefficienten, die nur n reelle quaternion Wurzeln,

$$\text{I.}\ldots q', q'', \ldots q^{(n)} \qquad (244, \text{u. s. w.}),$$

zulässt, in symbolischer Weise auch [vergl. 214, (3.)] durch

* Dieser berühmte Satz der Algebra ist seit langer Zeit bekannt, und auf anderen Wegen bewiesen worden; aber es schien für den Zweck des vorliegenden Buches nothwendig, oder wenigstens nützlich, ihn von Neuem, in Verbindung mit Quaternionen, zu beweisen; oder besser den Satz (244, 252) aufzustellen, dem er in unserer Rechenart entspricht. Vergleiche die Anmerkung zu Seite 357.

$n(n-1)$ imaginäre quaternion Wurzeln, oder durch n^2-n Biquaternionen [214, (8.)], oder Doppelpaare [256, (3.)], befriedigt wird, die in folgender Weise bezeichnet werden können,

$$\text{II.}\ldots [q^{(n+1)}], \ldots [q^{(n^2)}];$$

die erste von ihnen hat, zum Beispiel, die Form,

$$\begin{aligned}\text{III.}\ldots [q^{(n+1)}] &= [x^{(n+1)}] + i[y^{(n+1)}];\\ &= x_{'}^{(n+1)} + h\,x_{''}^{(n+1)} + i\,(y_{'}^{(n+1)} + h\,y_{''}^{(n+1)});\end{aligned}$$

hier sind $x_{'}^{(n+1)}$, $x_{''}^{(n+1)}$, $y_{'}^{(n+1)}$, und $y_{''}^{(n+1)}$ vier reelle Skalare, h ist dagegen die Imaginäre der Algebra [256, (2.)].

(1.) Es muss daher, zum Beispiel, $n(n-1)$ imaginäre n-te Wurzeln der Einheit, in der gegebenen Ebne von i [vergl. 256, (3.)], ausser den n reellen schon bestimmten (233, 237) Wurzeln geben; und demnach haben wir, für den Fall $n=2$, die folgenden vier Quadratwurzeln von $1\,|\,|\,|\,i$, zwei reelle und zwei imaginäre:

$$\text{IV.}\ldots +1,\ -1\,; \qquad\qquad +h\,i,\ -h\,i;$$

denn, nach 256, (2.), haben wir,

$$\text{V.}\ldots (\pm h\,i)^2 = h^2\,i^2 = (-1)(-1) = +1.$$

Und die beiden imaginären Wurzeln der quadratischen Gleichung $F_2 q = 0$, die im Allgemeinen, wenigstens in Zeichen, [214, (3.)], bestehen, können durch Multiplication der Quadratwurzel in der Formel 253, XX. mit $h\,i$ erhalten werden; so dass in dem besonderen Falle, wenn die Wurzel verschwindet, die vier Wurzeln der Gleichung reell und gleich werden; die Null hat folglich nur sich selbst als Quadratwurzel.

(2.) Wenn wir ferner schreiben [vergl. 237, (3.)],

$$\text{VI.}\ldots q = 1_1^{\frac{1}{3}} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \qquad q^2 = 1_2^{\frac{1}{3}} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$$

so dass $1, q, q^2$ die drei reellen Cubikwurzeln der positiven Einheit in der gegebenen Ebne sind; und wenn wir auch schreiben,

$$\text{VII.}\ldots \theta = [q] = \frac{-1+h\sqrt{3}}{2}, \qquad \theta^2 = [q]^2 = \frac{-1-h\sqrt{3}}{2},$$

so dass θ und θ^2 (wie üblich) die beiden gewöhnlichen (oder

Digitized by Google

algebraischen) imaginären Cubikwurzeln der Einheit sind; dann sind die neun Cubikwurzeln von 1 ($\| i$) die folgenden:

$$\text{VIII.}\ldots\ 1;\quad q, q^2;\quad \theta, \theta^2;\quad \theta q, \theta^2 q;\quad \theta^2 q, \theta^2 q^2;$$

die erste von ihnen ist ein reeller Skalar; die beiden nächsten sind reelle Paare, oder Quaternionen $\| \| i$; die beiden folgenden sind imaginäre Skalare, oder Biskalare; und die vier übrigbleibenden sind imaginäre Paare, oder Doppelpaare, oder Biquaternionen.

(3.) Die sechzehn vierten Wurzeln der Einheit ($\| \| i$) sind:

$$\text{IX.}\ldots\ \pm 1;\quad \pm i;\quad \pm h;\quad \pm hi;\quad \pm \tfrac{1}{2}(1 \pm h)(1 \pm i);$$

die drei doppelten Vorzeichen in dem letzten Ausdruck sind alle von einander unabhängig.

(4.) Imaginäre Wurzeln, wie die vorher angegebenen, sind bisweilen nützlich, oder besser nothwendig, bei Berechnungen, welche ideale Durchschnitte*, oder ideale Berührungen, in der Geometrie betreffen; wenn wir auch in dem übrigen Theile dieses Werkes wenig oder keine Gelegenheit haben werden, sie anzuwenden.

(5.) Wir können indessen hier bemerken, dass, wenn wir die Beschränkung (225) des Quaternions q fallen lassen, die allgemeine quaternion Gleichung n-ten Grades, nach den vorhergehenden Sätzen, nicht weniger als n^4, reelle oder imaginäre, Wurzeln zulässt; denn wenn wir die allgemeine Gleichung, nach 221, auf die viergliedrige Grundform,

$$\text{X.}\ldots\ F_n q = W_n + i X_n + j Y_n + k Z_n = 0,$$

bringen, so zerfällt sie (vergl. 221, VI.) in ein System von vier Skalar-Gleichungen, von denen jede (im Allgemeinen) von der n-ten Dimension in Bezug auf w, x, y, z ist; nämlich in

$$\text{XI.}\ldots\ W_n = 0,\quad X_n = 0,\quad Y_n = 0,\quad Z_n = 0;$$

und wenn x, y, z aus diesen vier Gleichungen eliminirt wird, so ist das Resultat (im Allgemeinen) eine skalar (oder algebraische) Gleichung vom n^4-ten Grade in Bezug auf den übrigbleibenden Constituenten w; sie hat daher n^4 (algebraische)

* Vergleiche Art. 214, und die auf ihn bezüglichen Anmerkungen.

Werthe, die reell oder imaginär sein können; und ähnliches gilt für die drei anderen Constituenten, x, y, z, des gesuchten Quaternions q.

(6.) Es kann auch vorkommen, grade wenn keine Ebne gegeben ist, dass die Anzahl der Wurzeln (oder Lösungen) einer endlichen* Gleichung in Quaternionen unendlich wird; wie wir das sahn bei der Gleichung $q^2 = -1$ (149, 154), auch wenn wir uns auf das beschränken, was wir als reelle Wurzeln betrachtet haben. Wenn wir imaginäre Wurzeln zulassen, so können wir wieder allgemeiner, ausser den beiden biskalaren Werthen, $\pm h$, den Ausdruck hinschreiben,

$$\text{XII.} \ldots (-1)^{\frac{1}{2}} = v + hv', \qquad Sv = Sv' = Svv' = 0, \quad Nv - Nv' = 1;$$

v und v' sind somit irgend zwei reelle und rechte Quaternionen in rechtwinkligen Ebnen, vorausgesetzt, dass die Norm des ersten diejenige des zweiten um die Einheit übertrifft.

(7.) Und ebenso haben wir, ausser den beiden reellen und skalar Werthen, ± 1, denselben allgemeinen symbolischen Ausdruck für eine Quadratwurzel der positiven Einheit, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Normen vertauscht sind:

$$\text{XIII.} \ldots 1^{\frac{1}{2}} = v + hv', \qquad Sv = Sv' = Svv' = 0, \quad Nv' - Nv = 1.$$

Siebenter Abschnitt.

Ueber den Reciproken eines Vectors, und über Harmonische Mittel von Vectoren; Bemerkungen über den Anharmonischen Quaternion einer Gruppe von vier Punkten, und über die Bedingungen der Concircularität.

258. Wenn zwei Vectoren, α und α', in solcher Beziehung zu einander stehn, dass

$$\text{I.} \ldots \alpha' = -U\alpha : T\alpha,$$

und daher

$$\text{II.} \ldots \alpha = -U\alpha' : T\alpha,$$

* Vergleiche die erste Anmerkung zu Seite 355.

Digitized by Google

oder dass

$$\text{III.}\ldots\ T\alpha . T\alpha' = 1,$$

und

$$\text{IV.}\ldots\ U\alpha + U\alpha' = 0,$$

so wollen wir sagen, dass jeder von diesen beiden Vectoren der Reciproke* des anderen ist; und wollen (wenigstens für jetzt) diese Beziehung zwischen ihnen dadurch ausdrücken, dass wir schreiben,

$$\text{V.}\ldots\ \alpha' = R\alpha, \qquad \text{oder} \qquad \text{VI.}\ldots\ \alpha = R\alpha';$$

so dass wir für jeden Vector α, und jeden rechten Quotienten v, haben,

$$\text{VII.}\ldots\ R\alpha = -U\alpha : T\alpha;$$

$$\text{VIII.}\ldots\ R^2\alpha = RR\alpha = \alpha;$$

und

$$\text{IX.}\ldots\ RIv = IRv \quad \text{[vergl. 161, (3.), und 204, XXXV'.]}.$$

259. Eine der wichtigsten Eigenschaften solcher Reciproken ist in dem folgenden Satze enthalten:

Wenn irgend zwei Vectoren OA, OB zu ihren Reciproken OA', OB', haben, dann ist (vergl. Fig. 58) die grade Linie $A'B'$ der Tangente OD parallel, die im Anfangspunkt O an den Kreis OAB gelegt ist; und die beiden Dreiecke, OAB, $OB'A'$, sind umgekehrt ähnlich (118). Oder in Zeichen,

$$\text{I.}\ldots \text{ wenn } OA' = R.OA, \text{ und } OB' = R.OB,$$

dann ist

$$\Delta\, OAB \propto' OB'A'.$$

(1.) Folglich ist, unter denselben Bedingungen, die Tangente in O an den Kreis $OA'B'$ parallel zur Linie AB.

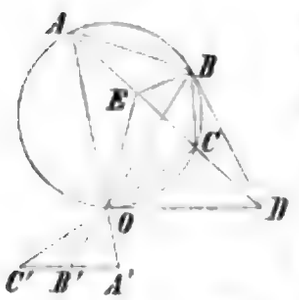
(2.) Die Winkel BAO und $OB'A'$ oder BOD sind gleich, und folglich hat die vierte Proportionale (226) zu AB, AO

---

* Demgemäss werden wir, unter diesen Bedingungen, später den Reciproken eines Vectors α durch das Symbol α^{-1} bezeichnen; aber ich verschiebe den Gebrauch dieser Bezeichnung, bis wir darauf vorbereitet sein werden, sie mit einer allgemeinen Theorie der Producte und Potenzen von Vectoren zu verbinden. Vergleiche 234, V., und die Anmerkung auf Seite 157. Und was den augenblicklichen Gebrauch der Charakteristik R betrifft, so vergleiche man die zweite Anmerkung zu Seite 336.

und OB, oder zu BA, OA, und OB, die Richtung von OD, oder die zu $A'B'$ entgegengesetzte Richtung; und es lässt sich leicht beweisen, dass ihre Länge der reciproke (oder umgekehrte) Werth der Länge derselben Linie $A'B'$ ist, denn die ähnlichen Dreiecke ergeben,

Fig. 58.



$$\text{II.}\ldots(\overline{OA}:\overline{BA}).\overline{OB} = (\overline{OB'}:\overline{A'B'}).\overline{OB} = 1:\overline{A'B'};$$

denkt man daran, dass

$$\text{III.}\ldots\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OB}.\overline{OB'} = 1,$$

so können wir schreiben,

$$\text{IV.}\ldots(OA:BA).OB = R.A'B',$$

oder

$$\text{V.}\ldots\ {}^{\alpha}_{\alpha-\beta}\beta = R(R\beta - R\alpha),$$

was für zwei Vectoren auch α und β sein mögen.

(3.) Ersetzt man α und β durch ihre Reciproken, so wird die letzte Formel

$$\text{VI.}\ldots R_{\cdot}(\beta - \alpha) = \frac{R\alpha}{R\alpha - R\beta}.R\beta;$$

oder

$$\text{VII.}\ldots(OA':B'A').OB' = R.AB.$$

(4.) Die umgekehrte Aehnlichkeit I. ergiebt auch, im Allgemeinen, die Beziehung

$$\text{VIII.}\ldots K\frac{\beta}{\alpha} = \frac{R\alpha}{R\beta}.$$

(5.) Daher ist denn, da nach 195, II., oder 207, (2.),

$$\text{IX.}\ldots K\frac{\beta}{\alpha} \pm 1 = K\frac{\beta \pm \alpha}{\alpha},$$

$$\text{X.}\ldots\frac{R\alpha \pm R\beta}{R\beta} = \frac{R\alpha}{R(\beta \pm \alpha)};$$

und das untere Vorzeichen stimmt mit VI. überein.

(6.) Im Allgemeinen sind die Reciproken entgegengesetzter Vectoren selbst entgegengesetzt; oder in Zeichen,

$$\text{XI.}\ldots R(-\alpha) = -R\alpha.$$

(7.) Allgemeiner,

$$\text{XII.}\ldots R x\alpha = x^{-1} R\alpha,$$

wenn x irgend ein Skalar ist.

(8.) Nimmt man in X. die unteren Vorzeichen, vertauscht α mit γ, dividirt und nimmt die Conjugirten, so finden wir für irgend drei Vectoren α, β, γ (die complanar oder diplanar sein mögen) die Formel:

$$\text{XIII.}\ldots K\frac{R\gamma - R\beta}{R\alpha - R\beta} = K\left(\frac{R\gamma}{R(\beta-\gamma)}\cdot\frac{R(\beta-\alpha)}{R\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\gamma-\beta}{-\gamma} = \frac{OA}{AB}\cdot\frac{BC}{CO},$$

wenn $\alpha = OA$, $\beta = OB$, und $\gamma = OC$ ist, wie gewöhnlich.

(9.) Wenn wir nun die Bezeichnung (25),

$$\text{XIV.}\ldots (ABCD) = \frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DA},$$

auf irgend vier Punkte im Raume ausdehnen, jeden dieser beiden Factorquotienten als einen Quaternion deuten und die Definition aufstellen, dass ihr Product (in der vorigen Reihenfolge) die anharmonische quaternion Function, oder einfach die Anharmonische, der Gruppe der vier Punkte A, B, C, D, oder des (ebnen oder windschiefen) Vierseits $ABCD$ ist, so erhalten wir die folgende allgemeine und nützliche Transformationsformel:

$$\text{XV.}\ldots (OABC) = K\frac{R\gamma - R\beta}{R\alpha - R\beta} = K\frac{B'C'}{B'A'},$$

in der OA', OB', OC' als reciprok zu OA, OB, OC angenommen ist.

(10.) Mit der Bezeichnung XIV. haben wir allgemein, und nicht nur für collineare Gruppen (35), die Beziehungen:

$$\text{XVI.}\ldots (ABCD) + (ACBD) = 1;$$

$$\text{XVII.}\ldots (ABCD).(ADCB) = 1.$$

(11.) Es seien O, A, B, C, D irgend fünf Punkte, und $OA', \ldots OD'$ die Reciproken von $OA, \ldots OD$; so haben wir, nach XV.,

$$\text{XVIII.}\ldots \frac{B'A'}{B'C'} = K(OCBA), \quad \frac{D'C'}{D'A'} = K(OADC);$$

und wir erhalten daher,

XIX. . . $K(AB'C'D') = (OADC)\,(OCBA) = -(OADCBA)$,

wenn wir übereinkommen allgemein, für irgend sechs Punkte, die Formel*,

$$\text{XX.}\ldots (ABCDEF) = \frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA},$$

zu schreiben.

(12.) Wenn dann die fünf Punkte $O..D$ complanar (225) sind, so haben wir, nach 226, und nach XIV.,

$$\text{XXI.}\ldots K(A'B'C'D') = (ABCD),$$

oder

$$\text{XXI}'\ldots (A'B'C'D') = K(ABCD);$$

der anharmonische Quaternion $(ABCD)$ wird somit in den ihm conjugirten verwandelt, wenn die vier Strahlen $OA,..OD$ mit ihren Reciproken vertauscht werden.

260. Eine weitere sehr wichtige Folgerung aus der Definition (258) der Reciproken von Vectoren, oder aus dem vorigen Satze (259), kann in folgender Weise ausgedrückt werden:

Wenn irgend drei coinitiale Vectoren, OA, OB, OC, Sehnen ein und desselben Kreises sind, dann sind (siehe wieder Fig. 58) ihre drei coinitialen Reciproken, OA', OB', OC', terminocollinear (24); oder, mit anderen Worten, wenn die vier Punkte O, A, B, C auf demselben Kreise liegen, oder concircular sind, dann liegen die drei Punkte A', B', C' auf einer graden Linie.

---

* Man kann übereinkommen, allgemein, das Product dreier Quotienten $(ABCDEF)$ den evolutionären Quaternion, oder einfach die Evolutionäre, der Gruppe der sechs Punkte, $A\,..\,F$, oder (wenn sie nicht collinear sind) des ebnen oder windschiefen Sechsecks $ABCDEF$ zu nennen, denn die Gleichung,

$$(ABCA'B'C') = -1,$$

drückt entweder erstens aus, dass die drei Paare von Punkten AA', BB', CC' eine collineare Involution (26) von einer wohlbekannten Art bilden; oder zweitens, dass die drei Paare, oder die drei entsprechenden Diagonalen des Sechsecks, eine complanare oder eine homosphärische Involution neuer Art bilden, auf die wir durch Quaternionen [vergl. 261, (11.)] geführt wurden.

Und umgekehrt, wenn drei coinitiale Vectoren, OA', OB', OC', in einer graden Linie endigen, dann sind ihre drei coinitialen Reciproken, OA, OB, OC, Sehnen eines Kreises; die Tangente zu diesem Kreise, im Vectorenanfangspunkte, ist der graden Linie parallel; und die anharmonische Function [259, (9.)] des eingeschriebenen Vierseits $OABC$ reducirt sich auf einen skalar Quotienten der Abschnitte dieser Linie (der daher, nach 139, sein eigner Conjugirter ist), nämlich,

$$\text{I.} \ldots (OABC) = B'C' : B'A' = (\infty\, A'B'C') = (O.OABC);$$

hier ist das Symbol ∞ benutzt, um den im Unendlichen auf der graden Linie $A'B'C'$ gelegenen Punkt zu bezeichnen; und wir sehn die null Sehne OO so an, als ob sie die Richtung* der Tangente OD habe, wenn wir hierbei die Bezeichnung (35) für die Anharmonische eines ebnen Büschels anwenden.

(1.) Wenn $\varrho = OP$ der variable Vector eines Punktes P auf dem Kreise OAB ist, so kann die quaternion Gleichung dieses Kreises in folgender Weise geschrieben werden:

$$\text{II.} \ldots R\varrho = R\beta + x\,(R\alpha - R\beta),$$

wo

$$\text{III.} \ldots x = (OABP);$$

der Coëfficient x ist somit ein variabler Skalar (vergl. 99, I.), der von der veränderlichen Lage des Punktes P auf dem Kreisumfange abhängt.

(2.) Oder wir können schreiben,

$$\text{IV.} \ldots R\varrho = \frac{t\,R\alpha + u\,R\beta}{t+u},$$

und das wäre eine weitere Form der Gleichung desselben Kreises OAB; man stellt ihr mit Nutzen die frühere Form (vergl. 25) der Gleichung der Linie AB gegenüber,

$$\text{V.} \ldots \varrho = \frac{t\alpha + u\beta}{t+u}.$$

* Vergleiche die Bemerkungen in der zweiten Anmerkung zu Seite 178, in Betreff der möglichen Bestimmungsweise der Bedeutung des Zeichens $U0$, wenn die Null eine Linie bezeichnet, die nach einem bestimmten Gesetz verschwindet.

(3.) Oder, wenn man das zweite Glied von IV. durch das erste dividirt, und die Conjugirten nimmt, so erhalten wir für den Kreis,

$$\text{VI.}\ldots \frac{t\varrho}{\alpha} + \frac{u\varrho}{\beta} = t + u;$$

während für die grade Linie die Gleichung besteht,

$$\text{VII.}\ldots \frac{t\alpha}{\varrho} + \frac{u\beta}{\varrho} = t + u.$$

(4.) Oder wir können, nach II., schreiben,

$$\text{VIII.}\ldots V\frac{R\varrho - R\beta}{R\alpha - R\beta} = 0;$$

oder

$$\text{VIII.}'\ldots \frac{R\varrho - R\beta}{R\alpha - R\beta} = V^{-1}0;$$

das letzte Symbol bezeichnet, nach 204, (18.), irgend einen Skalar.

(5.) Oder noch kürzer,

$$\text{IX.}\ldots V(OABP) = 0;$$

oder

$$\text{IX.}'\ldots (OABP) = V^{-1}0.$$

(6.) Wenn die vier Punkte O, A, B, C wieder concircular sind, und wenn P irgend ein fünfter Punkt in ihrer Ebne ist, $PO_1, \ldots PC_1$ dagegen reciprok zu $PO, \ldots PC$ sind, dann haben wir, nach 259, XXI., die Beziehung,

$$\text{X.}\ldots (O_1A_1B_1C_1) = K(OABC) = (OABC) = V^{-1}0;$$

die vier neuen Punkte $O_1 \ldots C_1$ sind daher im Allgemeinen concircular.

(7.) Wenn der Punkt P indessen ebenfalls auf dem Kreise $OABC$ liegt, so sind die vier neuen Punkte (nach dem gegenwärtigen Artikel) collinear; sie sind die Durchschnitte des Büschels $P.OABC$ mit einer Parallelen zur Tangente durch P. In diesem Falle haben wir daher die Gleichung,

$$\text{XI.}\ldots (P.OABC) = (O_1A_1B_1C_1) = (OABC);$$

und somit sehn wir, dass die anharmonische Constante des Büschels (35) gleich dem ist, was wir [259, (9.)] als die Anharmonische der Gruppe definirt haben.

Digitized by Google

(8.) Und da die Anharmonische einer kreisförmigen Gruppe ein Skalar ist, so ist sie [nach 187, (8.)] ihrem eignen Tensor gleich, letzterer entweder positiv oder negativ genommen; wir können daher, für irgend ein eingeschriebenes Vierseit, $OABC$, die Formel hinschreiben,

$$\text{XII.} \ldots (OABC) = \mp T(OABC) = \mp (\overline{OA}.\,\overline{BC}):(\overline{AB}.\,\overline{CO}).$$

$= \mp$ einem Quotienten aus den Rechtecken der gegenüberliegenden Seiten; das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem der Punkt B' zwischen die Punkte A' und C' fällt oder nicht; das heisst, je nachdem die Seiten des Vierseits $OABC$ sich schneiden oder nicht.

(9.) Daher ist es leicht, daraus zu schliessen, dass wir für irgend eine kreisförmige Gruppe O, A, B, C, die Gleichung haben,

$$\text{XIII.} \ldots U\frac{OA}{AB} = \pm U\frac{CO}{CB};$$

das obere Vorzeichen gilt, wenn die Aufeinanderfolge $OABC$ eine directe ist, das heisst, wenn sich die Seiten des Vierseits $OABC$ nicht schneiden; und das untere Vorzeichen gilt im entgegengesetzten Falle, nämlich wenn die Aufeinanderfolge eine (wie wir sie nennen können) indirecte ist, oder wenn sich die Seiten des Vierseits schneiden; und umgekehrt die Gleichung XIII. reicht aus zu beweisen, wenn sie irgendwo vorkommt, dass die Anharmonische $(OABC)$ ein negativer oder ein positiver Skalar ist, und dass daher nach (5.) die Gruppe kreisförmig (wenn nicht gradlinig) ist, wie vorher.

(10.) Wenn A, B, C, D, E irgend fünf homosphärische Punkte (oder Punkte auf der Oberfläche einer Kugel) sind, und wenn O irgend ein sechster Punkt im Raume ist, OA', .. OE' dagegen die Reciproken zu OA, .. OE sind, dann sind die fünf neuen Punkte A' .. E' im Allgemeinen (zu einander) homosphärisch; aber wenn O zufällig auf der Kugel $ABCDE$ liegt, dann sind A' .. E' complanar; ihre gemeinsame Ebne ist parallel zur Tangentialebne an die gegebene Kugel in O; und wir haben anharmonische Beziehungen, bei denen wir hier nicht verweilen können.

261. Ein interessanter Fall der vorhergehenden Theorie ist derjenige, wenn die im Allgemeinen skalar Anharmonische einer kreisförmigen Gruppe gleich der negativen Einheit wird; in diesem Falle (vergl. 26) heisst die Gruppe harmonisch. Einige wenige Bemerkungen über solche kreisförmige und harmonische Gruppen mögen hier in Kürze hinzugefügt werden; es mag dem Leser überlassen bleiben, die Hinweise selbst weiter auszuführen, was ihm ja jetzt eine leichte Rechenübung sein muss.

(1.) Für eine solche Gruppe (vergl. wieder Fig. 58) haben wir also die Gleichung,

$$\text{I.}\ldots\ (OABC) = -1;$$

und daher

$$\text{II.}\ldots\ A'B' = B'C';$$

oder

$$\text{III.}\ldots\ R\beta = \tfrac{1}{2}(R\alpha + R\gamma);$$

und unter dieser Bedingung wollen wir den Vector β das harmonische Mittel zwischen den beiden Vectoren, α und γ, nennen [vergl. 216, (5.)].

(2.) Dividirt man und nimmt die Conjugirten [vergl. 260, (3.), und 216, (5.)], so erhalten wir somit die Gleichung,

$$\text{IV.}\ldots\ \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} = 2;$$

oder

$$\text{V.}\ldots\ \beta = \frac{2\alpha}{\gamma+\alpha}\gamma + \frac{2\gamma}{\gamma+\alpha}\alpha;$$

oder

$$\text{VI.}\ldots\ \beta = \frac{\alpha}{\varepsilon}\gamma = \frac{\gamma}{\varepsilon}\alpha,$$

wenn

$$\text{VII.}\ldots\ \varepsilon = \tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha);$$

ε bezeichnet somit hier den Vector OE (Fig. 58) des Mittelpunktes der Sehne AC. Wir können daher sagen, dass das harmonische Mittel zwischen irgend zwei Linien (wie in der Algebra) die vierte Proportionale zu ihrer halben Summe und zu ihnen selbst ist.

(3.) Geometrisch haben wir somit die ähnlichen Dreiecke:

$$\text{VIII}\ldots\ \Delta AOB \propto EOC;$$

Digitized by Google

$$\text{VIII.}' \ldots \Delta AOE \propto BOC;$$

und daraus können wir schliessen, da entweder die Winkel OBA und OCA, oder die Winkel OAC und OBC gleich sind, dass [vergl. 260, (5.)], wenn die Gleichung I. erfüllt ist, die vier Punkte O, A, B, C, concircular sind, wenn nicht collinear.

(4.) Wir haben also die Aehnlichkeiten,

$$\text{IX.} \ldots \Delta OEC \propto CEB,$$

und

$$\text{IX.}' \ldots \Delta OEA \propto AEB;$$

oder die Gleichungen,

$$\text{X.} \ldots \frac{\beta - \varepsilon}{\gamma - \varepsilon} = \frac{\gamma - \varepsilon}{-\varepsilon},$$

und

$$\text{X.}' \ldots \frac{\beta - \varepsilon}{\alpha - \varepsilon} = \frac{\alpha - \varepsilon}{-\varepsilon};$$

in der That haben wir, nach VI. und VII.,

$$\text{XI.} \ldots \frac{\alpha}{\varepsilon} + \frac{\gamma}{\varepsilon} = 2;$$

$$\text{XII.} \ldots \frac{\beta - \varepsilon}{-\varepsilon}\left(= 1 - \frac{\beta}{\alpha}\frac{\alpha}{\varepsilon} = 1 - \frac{\gamma}{\varepsilon}\alpha\right) = \left(1 - \frac{\alpha}{\varepsilon}\right)^2.$$

(5.) Daher ist die Linie EC, in Fig. 58, die mittlere Proportionale (227) zwischen den Linien EO und EB; oder in Worten, die halbe Summe (OE), die halbe Differenz (EC), und der Ueberschuss (BE) der halben Summe über das harmonische Mittel (OB), bilden (wie in der Algebra) eine stetige Proportion (227).

(6.) Umgekehrt, wenn irgend drei coinitiale Vectoren EO, EC, EB in dieser Weise eine stetige Proportion bilden, und wenn wir $EA = CE$ machen, dann bilden die vier Punkte $OABC$ eine kreisförmige und harmonische Gruppe; zum Beispiel, die Punkte $APBP'$ in Fig. 57 sind so angeordnet, dass sie eine solche Gruppe* bilden.

---

* Vergleiche die Anmerkung zu 255, (2.). In diesem Nebenartikel würde der Text somit haben lauten können: dessen Mittelpunkt C (wie wir hinzufügen können) auf dem Kreise OAB liegt, u. s. w. In Fig. 58

(7.) Es ist leicht zu beweisen, dass in dem eingeschriebenen Vierseit $OABC$ der Figur 58 die Rechtecke aus den gegenüberliegenden Seiten einzeln gleich der Hälfte des Rechtecks aus den Diagonalen sind; diese geometrische Beziehung entspricht jeder der beiden anharmonischen Gleichungen [vergl. 259, (10.)]:

$$\text{XIII.}\ldots(OBAC) = +2;$$
$$\text{XIII}'\ldots(OCAB) = +\tfrac{1}{2}.$$

(8.) Daraus, oder auf anderen Wegen, kann man schliessen, dass die Diagonalen, OB, AC, conjugirte Sehnen des Kreises sind, zu dem sie gehören; in dem Sinne, dass jede durch den Pol der anderen geht, und dass daher die Linie DB die zweite Tangente vom Punkte D aus ist, in dem die verlängerte Sehne AC die Tangente in O schneidet.

(9.) Unter denselben Bedingungen haben wir, wie leicht entweder durch Quaternionen oder durch geometrische Betrachtung zu beweisen ist, die harmonischen Gleichungen:

$$\text{XIV.}\ldots(ABCO) = (BCOA) = (COAB) = -1;$$

so dass AC das harmonische Mittel zwischen AB und AO ist; BO ist ein solches Mittel zwischen BC und BA; und CA zwischen CO und CB.

(10.) In irgend einer solchen Gruppe kann man irgend zwei gegenüberliegende Punkte (oder gegenüberliegende Ecken des Vierseits), wie zum Beispiel O und B, zu einander harmonisch conjugirt nennen, in Bezug auf die beiden anderen Punkte A und C; und wir sehn, dass wenn die beiden Punkte A und C gegeben sind, dann jedem dritten Punkte O (mag er in einer gegebenen Ebne oder im Raume liegen) dabei stets ein vierter Punkt B entspricht, der in diesem Sinne zu jenem dritten Punkte conjugirt ist; dieser vierte Punkt ist stets complanar mit den drei Punkten A, C, O, und er ist auch concircular mit ihnen, wenn er nicht grade collinear mit jedem anderen ist; in diesem äussersten (oder Grenz-) Falle ist der

---

ist der Mittelpunkt des Kreises $OABC$ mit den drei Punkten O, E, B concircular.

Digitized by Google

vierte Punkt B noch bestimmt, aber er ist jetzt mit den anderen (wie in 26, u. s. w.) collinear.

(11.) Wenn wir, nachdem wir so zwei* Punkte, A und C, ausgewählt haben, oder sie als gegebene oder feste behandeln, die harmonisch conjugirten B, B', B'', in Bezug auf sie, von irgend drei angenommenen Punkten, O, O', O'', bestimmen (10.), so kann man sagen, die drei Punktpaare, O, B; O', B'; O'', B''; bilden eine Involution**, entweder auf der graden Linie AC, (in diesem Falle ist sie nur von einer schon wohlbekannten Art), oder in einer Ebne durch diese Linie, oder auch allgemein im Raume; und die beiden Punkte A, C können in allen diesen Fällen die beiden Doppelpunkte (oder Brennpunkte) der Involution heissen. Doch das Feld, das hiermit der geometrischen Forschung durch Quaternionen eröffnet ist, ist viel zu ausgedehnt, um hier mehr als erwähnt zu werden.

(12.) Wir werden daher jetzt nur hinzufügen, dass der Begriff des harmonischen Mittels zwischen zwei Vectoren leicht auf irgend eine Anzahl derselben ausgedehnt werden kann, und nicht auf die Ebne beschränkt zu werden braucht; wir können daher die Definition aufstellen, dass η das harmonische Mittel der n beliebigen Vectoren $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, ist, wenn es der Gleichung genügt,

$$\text{XV.} \ldots \quad R\eta = \frac{1}{n}\,(R\alpha_1 + \ldots + R\alpha_n);$$

oder der Gleichung,

$$\text{XVI.} \ldots \quad nR\eta = \Sigma R\alpha.$$

(13.) Was endlich die Bezeichnung $R\alpha$ und die Definition (258) des Reciproken eines Vectors betrifft, so mag bemerkt werden, dass, wenn wir vorgezogen hätten, reciproke Vectoren als solche zu definiren, welche gleiche (anstatt entgegengesetzte) Richtungen haben, wir in der That das positive Vorzeichen

* Es giebt einen Sinn, in welchem das hier besprochene geometrische Verfahren angewandt werden kann, auch wenn die beiden ersten Punkte, oder Brennpunkte, imaginär sind. Vergleiche die Géometrie Supérieure von Chasles, Seite 136.

** Vergleiche die Anmerkung zu 259, (11.).

in der Gleichung 258, VII. erhalten hätten; aber wir würden gezwungen gewesen sein, anstatt 258, IX., die viel weniger einfache Formel,

$$RIv = -IRv,$$

zu schreiben.

Kapitel III.

Ueber diplanare Quaternionen, oder Quotienten von Vectoren im Raume; und besonders über das associative Princip der Multiplication solcher Quaternionen.

Erster Abschnitt.

Ueber einige Entwickelungen der associativen Eigenschaft, oder des associativen Princips, der Multiplication diplanarer Quaternionen.

262. In dem vorhergehenden Kapitel haben wir uns fast völlig, wie wir beabsichtigt hatten (224, 225), auf die Betrachtung von Quaternionen in einer gegebenen Ebne (derjenigen von i) beschränkt; und wir haben nur in einigen Beispielen auf mögliche Ausdehnungen* der dort erhaltenen Resultate Bezug genommen. Aber wir müssen jetzt, wie im ersten Kapitel des zweiten Theils, zur Betrachtung allgemeiner Quotienten von Vectoren zurückkehren, und besonders zu ihrer associativen Multiplication (223), die bisher nur in Verbindung mit dem distributiven Princip (212), und den Gesetzen der Symbole i, j, k (183) bewiesen worden ist. Und zuerst werden wir eine neue geometrische Entwicklung des associativen Princips geben, die unabhängig vom distributiven ist, und bei der es genügen

* So in 227, (3.); 242, (7.); 254, (7.); 257, (6.) und (7.); 259, (8.), (9.), (10.), (11.); 260, (10); und 261, (11.) und (12.).

Digitized by Google

wird, die Multiplication von Versoren in Betracht zu ziehn (vergl. 191); denn die Multiplication von Tensoren ist augenscheinlich eine associative Operation, da sie einfach der arithmetischen Multiplication entspricht, oder der Zusammensetzung von Verhältnissen in der Geometrie.* Wir werden daher in diesem ganzen Kapitel annehmen, dass q, r, s gewisse drei gegebene, aber willkürliche Versoren, in drei gegebenen und verschiedenen Ebnen** seien; und unser Zweck wird sein, einiges weitere Licht durch neue Entwickelungen in diesem Abschnitt, und durch neue Beweise im nächsten auf die sehr wichtige, wenn auch sehr einfache, associative Formel (223, II.) zu werfen, die so geschrieben werden kann:

$$\text{I.} \ldots s r . q = s . r q;$$

oder vollständiger in dieser Weise,

$$\text{II.} \ldots q' q = t, \quad \text{wenn } q' = s r, \quad s' = r q, \text{ und } t = s s';$$

q', s', und t sind hier drei neue und abgeleitete Versoren, in drei neuen und abgeleiteten Ebnen.

263. Wir können schon übersehn, dass der associative Lehrsatz der Multiplication, in allen seinen Formen, eine wesentliche Beziehung zu einem System von sechs Ebnen hat, nämlich zu den Ebnen der sechs Versoren,

$$\text{III.} \ldots q, \quad r, \quad s, \quad r q, \quad s r, \quad s r q,$$

oder

$$\text{IV.} \ldots q, \quad r, \quad s, \quad s', \quad q', \quad t;$$

von der verständigen Auswahl und Anordnung derselben muss

---

* Oder allgemeiner, für irgend drei Paare von Grössen, von denen jedes im Besonderen homogen ist.

** Wenn die Factoren q, r, s complanar würden, so könnten wir sie stets (nach 120) auf die Formen bringen,

$$q = \frac{\beta}{\alpha}, \qquad r = \frac{\gamma}{\beta}, \qquad s = \frac{\delta}{\gamma};$$

und dann hätten wir [vergl. 183, (1.)] die beiden gleichen Producte von je dreien,

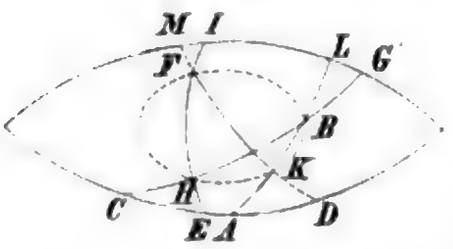
$$s r . q = \frac{\delta}{\beta} \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma} \frac{\gamma}{\alpha} = s . r q;$$

so dass sich in diesem Falle (vergl. 224) die associative Eigenschaft ohne irgend welche Schwierigkeit beweisen liesse.

die Klarheit und Eleganz jeder geometrischen Begründung oder jedes geometrischen Beweises des Satzes in hohem Grade abhängen; und der versor Charakter der Factoren (allein in dem Theil des Satzes, für den ein Beweis erforderlich ist) führt uns dazu, auf eine Kugel Bezug zu nehmen, nämlich auf diejenige, welche wir die Einheitskugel (128) genannt haben. Und die drei folgenden Anordnungen der sechs Ebnen scheinen die natürlichsten und einfachsten, die man in Betracht ziehn kann; nämlich erstens die Anordnung, bei der die Ebnen alle durch den Mittelpunkt der Kugel gehn; zweitens diejenigen, bei der sie sämmtlich ihre Oberfläche berühren; und drittens diejenige, bei der sie die sechs Flächen eines eingeschriebenen Körpers sind. Wir gehn jetzt dazu über, diese drei Anordnungen der Reihe nach der Betrachtung zu unterziehn.

264. Wenn die erste Anordnung (263) angenommen wird, so ist es natürlich, Bogen von grössten Kreisen als Darstellungen der Versoren anzuwenden, im Sinne des Artikels 162. Stellen wir also den Factor q durch den Bogen AB dar, und r durch den darauf folgenden Bogen BC, so wird (167) ihr Product rq, oder s', durch AC dargestellt; oder durch irgend einen gleichen Bogen (165), als welchen wir, zum Beispiel, DE, in Fig. 59, annehmen können. Stellen wir s durch EF dar, so haben wir ferner DF als den darstellenden Bogen des ternären Productes $s.rq$, oder ss', oder t, in seiner einen Anordnung der Association. Um das andere ternäre Product $sr.q$, oder $q'q$, darzustellen, können wir zuerst drei neue Punkte, G, H, I, durch Bogengleichungen (165) zwischen GH, BC, und zwischen HI, EF, bestimmen, so dass sich BC, EF in H schneiden, wie sich die Bogen, welche s' und s darstellen, in E schnitten; und dann können wir, nachdem wir auf diesem Wege einen Bogen GI gefunden haben, der sr, oder q', darstellt, drei weitere Punkte, K, L, M, durch Gleichungen zwischen KL, AB, und zwischen LM, GI, bestimmen, so dass die beiden neuen Bogen, KL, LM, q und q'

Fig. 59.



darstellen, und dass sich AB, GI in L schneiden; auf diesem Wege werden wir aber einen Bogen, nämlich KM, erhalten, der $q'q$ darstellt, wie gewünscht wurde. Und es gilt dann der Satz, dass dieser letztere Bogen KM gleich dem vorigen Bogen DF, im vollen Sinne des Art. 165, ist; oder dass, wenn (wie es unter den vorhergehenden Constructionsbedingungen der Fall ist) die fünf Bogengleichungen bestehn,

$$\text{I.}\ldots \quad \frown AB = \frown KL, \qquad \frown BC = \frown GH,$$
$$\frown EF = \frown HI, \qquad \frown AC = \frown DE,$$
$$\frown GI = \frown LM,$$

dann auch die sechste Gleichung von derselben Art befriedigt wird,

$$\text{II.}\ldots \quad \frown DF = \frown KM;$$

die beiden Punkte, K und M, liegen beide auf demselben grössten Kreise, wie die beiden vorher bestimmten Punkte D und F; oder D und M liegen auf dem grössten Kreise, der durch F und K geht, und die beiden Bogen, DF und KM, dieses grössten Kreises, oder die beiden punktirten Bogen DK, FM in der Figur, sind gleich lang und gleich gerichtet (165).

(1.) Oder nach der Bestimmung der neun Punkte $A..I$ in der Weise, dass sie die drei mittleren Gleichungen I. befriedigen, könnten wir die drei weiteren Punkte K, L, M, ohne irgend welche weiteren Bogengleichungen als Durchschnitte der drei Bogenpaare AB, DF; AB, GI; DF, GI bestimmen. Und dann würde der Satz lauten, dass (wenn die drei letzten Punkte in passender Weise von den ihnen auf der Kugel gegenüberliegenden unterschieden werden) die beiden äusseren Gleichungen I., und die Gleichung II., gelten.

(2.) Derselbe geometrische Satz kann auch in folgender Weise ausgesprochen werden: Wenn die erste, dritte und fünfte Seite (KL, GH, ED) eines sphärischen Sechsecks $KLGHED$ bezüglich, in dem für Bogen geltenden Sinne der ersten, zweiten und dritten Seite (AB, BC, CA) eines sphärischen Dreiecks ABC gleich sind, dann sind die zweite, vierte und sechste Seite (LG, HE, DK) desselben Sechsecks den

drei aufeinanderfolgenden Seiten (MI, IF, FM) eines anderen sphärischen Dreiecks MIF gleich.

(3.) Man kann auch sagen, dass wenn fünf aufeinanderfolgende Seiten (KL,.. ED) eines sphärischen Sechsecks bezüglich in dem für Bogen geltenden Sinne gleich den fünf aufeinanderfolgenden Diagonalen (AB, MI, BC, IF, CA) eines anderen solchen Sechsecks ($AMBICF$) sind, dann die sechste Seite (DK) des ersten der sechsten Diagonale (FM) des zweiten gleich ist.

(4.) Oder, wenn wir den in 180, (3.) erwähnten Begriff einer Bogensumme annehmen, und eine solche Summe dadurch bezeichnen, dass wir + zwischen den Symbolen der beiden Summanden einfügen, und denjenigen Bogen, der hinzuaddirt werden soll, linker Hand schreiben, so können wir den Satz, in Verbindung mit der vorigen Fig. 59, durch die Formel darstellen:

$$\text{III.}\ldots \frown DF + \frown BA = \frown EF + \frown BC,$$

wenn

$$\frown DA = \frown EC;$$

hier mögen B und F irgend zwei Punkte auf der Kugel bezeichnen.

(5.) Wir können auch dasselbe Princip, wenn auch etwas weniger einfach, in folgender Weise [siehe wieder Fig. 59, und vergleiche den Nebenart. (2.)] ausdrücken*:

$$\text{IV.}\ldots \quad \text{wenn} \quad \frown ED + \frown GH + \frown KL = 0,$$

dann ist

$$\frown DK + \frown HE + \frown LG = 0.$$

(6.) Wenn wir, für einen Augenblick, übereinkommen, zu schreiben (vergl. Art. 1),

$$\text{V.}\ldots \frown AB = \overset{\frown}{B-A},$$

---

* Einige von diesen Formeln und Figuren, in Verbindung mit dem associativen Princip, sind, wenn auch meistentheils mit Abänderungen, der sechsten Vorlesung des Verfassers über Quaternionen entnommen, in welcher der ganze Gegenstand sehr ausführlich behandelt ist. Vergleiche die Anmerkung auf Seite 205.

Digitized by Google

so können wir die vorige Fassung IV. ein wenig klarer in folgender Weise ausdrücken:

$$\text{VI. . . wenn } \widehat{D-E} + \widehat{H-G} + \widehat{L-K} = 0,$$

dann ist

$$\widehat{K-D} + \widehat{E-H} + \widehat{G-L} = 0.$$

(7.) Oder noch einfacher, wenn $\frown$, $\frown'$, $\frown''$, irgend drei diplanare Bogen bezeichnen, die nach der Regel [180, (3.)] addirt werden, auf die wir uns vorher bezogen haben, so kann der Satz so ausgesprochen werden, dass

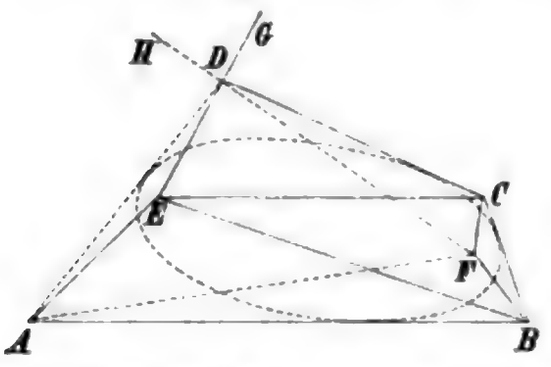
$$\text{VII. . . } (\frown'' + \frown') + \frown = \frown'' + (\frown' + \frown);$$

oder in Worten, dass die Addition von Bogen auf einer Kugel eine associative Operation ist.

(8.) Umgekehrt, wenn irgend ein unabhängiger Beweis von der Wahrheit irgend eines der vorhergehenden Sätze gegeben wird, wenn man sie als den Ausdruck von Sätzen betrachtet, die in der sphärischen Geometrie* gelten, so wird dadurch ein neuer Beweis der associativen Eigenschaft der Multiplication von Quaternionen geliefert.

265. Bei der zweiten Anordnung (263) der sechs Ebnen ist es naturgemäss, anstatt die drei gegebenen Versoren, und die Producte aus einzelnen von ihnen oder aus allen, durch Bogen darzustellen, sie (174, II.) durch Winkel auf der Kugel darzustellen. Denken wir uns daher, dass die beiden Versoren, q und r, durch die beiden sphärischen Winkel, EAB und ABE, in Fig. 60 dargestellt werden; und dass daher (175) ihr Product, rq oder s', durch den Aussenwinkel an

Fig. 60.



* Ein solcher Beweis, nämlich eine Ableitung der Gleichung II. aus den fünf Gleichungen I., durch bekannte Eigenschaften der sphärischen Kegelschnitte wird in Kürze im folgenden Abschnitt gegeben werden.

der Spitze des Dreiecks ABE bei E dargestellt wird. Es möge der zweite Versor r auch durch den Winkel FBC dargestellt werden, und der dritte Versor s durch BCF; dann wird das andere binäre Product, sr oder q', durch den Aussenwinkel des neuen Dreiecks BCF bei F dargestellt. Um ferner das erste ternäre Product, $t = ss' = s.rq$, darzustellen, haben wir nur den Aussenwinkel des Dreiecks ECD bei D zu nehmen, wenn D ein Punkt ist, der durch die beiden Bedingungen bestimmt wird, dass der Winkel ECD gleich BCF, und DEC supplementär zu BEA sein soll. Wenn wir uns andererseits einen Punkt D' denken, der durch die Bedingungen bestimmt ist, dass $D'AF$ gleich EAB sein soll, und AFD' supplementär zu CFB, so stellt der Aussenwinkel des Dreiecks AFD' bei D' das zweite ternäre Product, $q'q = sr.q$, dar, das (nach dem associativen Princip) gleich dem ersten sein muss. Denken wir uns nun ED bis G, und FD' bis H verlängert, so müssen die beiden sphärischen Winkel, GDC und $AD'H$, in jeder Hinsicht gleich sein; ihre Scheitel D und D' fallen zusammen, und die Drehungen (174, 177), welche sie darstellen, müssen nicht nur von gleichem Betrag, sondern auch gleich gerichtet sein. Oder, um dieselbe Sache in anderer Weise auszudrücken, wir können das associative Princip in der Form ausdrücken (262), dass wir sagen, wenn die drei Winkelgleichungen,

$$\text{I.}\ldots\ ABE = FBC, \quad BCF = ECD,$$
$$DEC = \pi - BEA,$$

erfüllt sind, so sind auch die drei weiteren Gleichungen,

$$\text{II.}\ldots\ DAF = EAB, \quad FDA = CDE,$$
$$AFD = \pi - CFB,$$

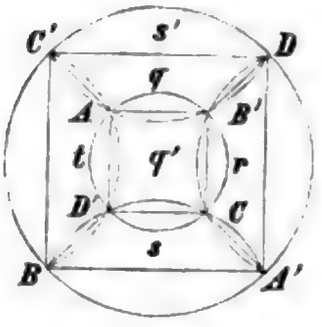
erfüllt. Denn es ist nicht nur dieser Satz der sphärischen Geometrie eine Folgerung aus dem associativen Princip der Multiplication von Quaternionen, sondern umgekehrt irgend ein von ihnen unabhängiger Beweis* des Satzes ist zu gleicher Zeit ein Beweis des Princips.

* Wie wir es im folgenden Abschnitt mit Hülfe der bekannten Eigenschaften der sphärischen Kegelschnitte in Kürze ausführen werden. Vergleiche die Anmerkung zum vorhergehenden Artikel.

Digitized by Google

266. Die dritte Anordnung (263) der sechs Ebnen kann dadurch erläutert werden, dass man sich ein windschiefes Sechseck, $AB'CA'BC'$, in eine Kugel eingeschrieben denkt, der Art, dass der Durchschnitt D der drei Ebnen, $C'AB'$, $B'CA'$, $A'BC'$, auf der Oberfläche liegt; und dass daher die drei kleinen Kreise, welche durch die drei letzten aus drei Buchstaben bestehenden Symbole bezeichnet werden, in einem Punkte D zusammentreffen; der zweite Durchschnittspunkt der beiden anderen kleinen Kreise, $AB'C$, $CA'B$, mag durch den Buchstaben D' bezeichnet werden, wie es in der nebenstehenden Fig. 61 geschehn ist. Wir wollen auch der Einfachheit wegen zuerst annehmen, dass (wie in der Figur) die fünf kreisförmigen Gruppen,

Fig. 61.



$$\text{I.}\ldots C'AB'D,\ AB'CD',\ B'CA'D,\ CA'BD',\ A'BC'D,$$

sämmtlich direct sind; oder dass die fünf eingeschriebenen Vierseite, welche durch die Symbole I. bezeichnet werden, sämmtlich nicht gekreuzt sind. Dann ist es [nach 260, (9.)] erlaubt, drei Versoren, q, r, s, einzuführen, von denen jeder in zweifacher Weise, wie folgt, ausgedrückt werden kann:

$$\text{II.}\ldots q = U\frac{B'D}{DC} = +U\frac{AB'}{AC};$$
$$r = U\frac{DA'}{B'D} = +U\frac{CA'}{CB'};$$
$$s = U\frac{CD'}{CA'} = +U\frac{BD'}{A'B};$$

und (nach dem erwähnten Nebenartikel) würden die letzten Glieder der drei Formeln das negative Vorzeichen annehmen, wenn die erste, dritte und vierte der Gruppen I. indirect werden würden, oder wenn die entsprechenden Vierseite gekreuzte wären. Wir haben somit (nach 191) die abgeleiteten Ausdrücke:

$$\text{III.}\ldots s' = rq = U\frac{DA'}{DC'} = U\frac{A'B}{BC};$$
$$q' = sr = U\frac{CD'}{CB'} = U\frac{D'A}{AB};$$

Digitized by Google

hierbei würden indessen die beiden Versoren in der ersten Formel verschiedene Vorzeichen haben, wenn die fünfte Gruppe I. eine indirecte wäre; und ebenso die in der zweiten Formel, wenn die zweite Gruppe es wäre. Daher ist,

$$\text{IV.} \ldots t = ss' = s \,.\, rq = U\frac{BD'}{BC'};$$

$$q'q = sr \,.\, q = U\frac{D'A}{AC'};$$

und da die beiden letzten Versoren, nach dem associativen Princip, gleich sind, so folgt, dass die vier Punkte B, C', A, D', unter den angenommenen Constructionsbedingungen, eine kreisförmige und directe Gruppe bilden; oder dass das Vierseit $BC'AD'$ eben, einem Kreise eingeschrieben,* und nicht gekreuzt ist.

267. Es ist leicht, durch passende Wahl der Vorzeichen, die letzte Betrachtung dem Falle anzupassen, wenn einige oder alle Gruppen I. indirecte sind; und so, aus dem associativen Princip, den folgenden Satz der sphärischen Geometrie zu schliessen: Wenn $AB'CA'BC'$ ein sphärisches Sechseck ist, so dass die drei kleinen Kreise $C'AB'$, $B'CA'$, $A'BC'$ in einem Punkte D zusammentreffen, dann treffen erstens die drei anderen kleinen Kreise $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ in einem anderen Punkte, D', zusammen; und zweitens, ist die Anzahl derjenigen von den sechs kreisförmigen Gruppen, 226, I., und $BC'AD'$, welche indirecte sind, stets grade (mit Einschluss der Null). Und umgekehrt, irgend ein unabhängiger Nachweis** dieses geometrischen Satzes würde ein neuer Beweis des associativen Princips sein.

268. Dasselbe fruchtbare Princip der associativen Multiplication kann auf andere Weise ausgesprochen werden, ohne

---

* Folglich würde, da die vier Punkte $B'C'AD'$, wie bekannt, homosphärisch [vergl. 260, (10.)] sind, die Möglichkeit, um das Vierseit einen Kreis zu beschreiben, daraus folgen, dass es eben ist, wenn letzteres auf andere Weise bewiesen worden wäre; aber es ist hier aus der Gleichheit der beiden Versoren IV., im Sinne von 260, (9.), abgeleitet.

** Einen elementaren Beweis, durch stereographische Projection, werde ich im folgenden Abschnitt geben.

Digitized by Google

die Factoren auf Versoren zu beschränken, und ohne den Begriff einer Kugel einzuführen. So können wir sagen [vergl. 264, (2.)], dass wenn $O.ABCDEF$ (vergl. 35) irgend ein Büschel aus sechs Strahlen im Raume ist, und $O.A'B'C'$ irgend ein Büschel aus drei Strahlen, und wenn die drei Winkel AOB, COD, EOF des ersten Büschels bezüglich den Winkeln $B'OC'$, $C'OA'$, $A'OB'$ des zweiten gleich sind, dann ein anderes Büschel aus drei Strahlen, $O.A''B''C''$, angegeben werden kann, so dass die drei anderen Winkel BOC, DOE, FOA des ersten Büschels den Winkeln $B''OC''$, $C''OA''$, $A''OB''$ des dritten gleich sein werden; Gleichheit von Winkeln (die denselben Scheitelpunkt haben) wird hier so verstanden (vergl. 165), dass sie die Complanarität und gleiche Richtung der Drehungen einschliesst.

(1.) Wir können ferner [vergl. 264, (4.)] die folgende Formel aufstellen, in der die vier Vectoren $\alpha\beta\gamma\delta$ eine complanare Proportion (226) bilden, aber ε und ζ irgend zwei Linien im Raume sind:

$$\text{I.}\ldots \frac{\zeta}{\gamma}\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\zeta}{\alpha}\frac{\beta}{\varepsilon},$$

wenn

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\beta}{\alpha};$$

denn unter der letzten Bedingung haben wir (vergl. 125),

$$\text{II.}\ldots \frac{\zeta}{\gamma}\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\zeta}{\alpha}\frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon} = \frac{\zeta}{\alpha}\cdot\frac{\beta}{\delta}\frac{\delta}{\varepsilon}.$$

(2.) Eine andere Fassung des associativen Princips ist die folgende:

$$\text{III.}\ldots \text{wenn } \frac{\delta}{\gamma}\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\zeta}{\varepsilon},$$

dann ist

$$\frac{\varepsilon}{\alpha}\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\zeta}{\delta};$$

denn wenn wir sechs neue Vectoren, $\eta\theta\iota$ und $\varkappa\lambda\mu$, bestimmen (120), so dass

$$\text{IV.}\ldots \begin{cases} \dfrac{\theta}{\eta} = \dfrac{\delta}{\gamma}, \quad \dfrac{\eta}{\iota} = \dfrac{\beta}{\alpha}, \quad \text{wonach } \dfrac{\theta}{\iota} = \dfrac{\zeta}{\varepsilon}, \\ \text{und} \\ \dfrac{\lambda}{\varkappa} = \dfrac{\varepsilon}{\alpha}, \quad \dfrac{\varkappa}{\mu} = \dfrac{\beta}{\gamma}, \end{cases}$$

so haben wir die Transformationen,

$$\text{V.}\ldots \frac{\lambda}{\zeta} = \frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\iota}{\theta} = \frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\frac{\iota}{\eta}\frac{\eta}{\theta} = \frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\iota}{\eta}\cdot\frac{\eta}{\theta} = \frac{\varkappa}{\beta}\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\mu}{\delta},$$

oder

$$\text{VI.}\ldots \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\zeta}{\delta}.$$

(3.) Umgekehrt, die Behauptung, dass die letzte Gleichung oder Proportion VI. wahr ist, stets wenn die zwölf Vectoren $\alpha \ldots \mu$ durch die fünf Proportionen IV. verbunden sind, ist eine Form des Ausspruchs des associativen Princips; denn sie führt (vergl. IV. und V.) zu der Gleichung,

$$\text{VII.}\ldots \frac{\lambda}{\varepsilon}\cdot\frac{\iota}{\eta}\frac{\eta}{\theta} = \frac{\lambda}{\varepsilon}\frac{\iota}{\eta}\cdot\frac{\eta}{\theta},$$

wenigstens wenn

$$\varepsilon \parallel \iota, \theta;$$

aber auch mit dieser letzten Beschränkung können die drei Factor-Quotienten in VII. irgend welche drei Quaternionen vorstellen.

Zweiter Abschnitt.

Ueber einige geometrische Beweise der associativen Eigenschaft der Multiplication von Quaternionen, welche unabhängig vom distributiven* Princip sind.

269. Wir beabsichtigen in diesem Abschnitt drei geometrische Beweise des associativen Princips im Zusammenhang mit den drei Figuren (59 – 61) zu geben, die im letzten Abschnitt angewandt wurden, um verschiedene Fassungen dieses Princips auszusprechen; und im Zusammenhang mit den drei Anordnungen der sechs Ebnen, die in Art. 263 beschrieben wurden. In den beiden ersten Beweisen werde ich die Kenntniss einiger wenigen Eigenschaften der sphärischen Kegelschnitte [196, (11.)] voraussetzen; in dem dritten werde ich dagegen nur die Lehre von der stereographischen Projection anwenden, und er ist daher von einem mehr ausschliesslich

* Vergleiche 224 und 262; und die zweite Anmerkung zu Seite 313.

Digitized by Google

elementaren Charakter. Das Princip selbst ist indessen von solch grosser Wichtigkeit in unserer Rechnung, dass sein Wesen und seine augenscheinliche Richtigkeit von kaum zu vielen verschiedenen Gesichtspunkten aus ins rechte Licht gesetzt werden kann.

270. Die einzigen Eigenschaften, welche wir in diesem Artikel von einem sphärischen Kegelschnitt als bekannt* voraussetzen wollen, sind die drei folgenden: erstens, dass durch irgend drei gegebene Punkte auf einer gegebenen Kugel, die nicht auf einem grössten Kreise liegen, ein Kegelschnitt beschrieben werden kann (der im Allgemeinen aus zwei entgegengesetzten Ovalen besteht), der einen gegebenen grössten Kreis zu einem seiner beiden cyklischen Bogen hat; zweitens, dass, wenn ein transversaler Bogen diese beiden Bogen und den Kegelschnitt schneidet, die in passender Weise gemessenen Abschnitte auf dem transversalen Bogen gleich sind; und drittens, dass, wenn der Scheitel eines sphärischen Winkels sich auf dem Kegelschnitte entlang bewegt, während seine Schenkel stets durch zwei feste Punkte desselben gehn, diese Schenkel einen constanten Zwischenraum auf jedem besonders genommenen cyklischen Bogen umfassen. Wenn wir diese drei Eigenschaften als bekannt voraussetzen, so sehn wir, dass, wenn wir uns, in Fig. 59, einen sphärischen Kegelschnitt so beschrieben denken, dass er durch die drei Punkte B, F, H geht und den grössten Kreis $DAEC$ zu einem cyklischen Kreise hat, dann die zweite und dritte Gleichung I. in 264 beweisen, dass der Bogen $GLIM$ der andere cyklische Bogen zu diesem Kegelschnitt ist; die erste Gleichung I. beweist zunächst, dass der Kegelschnitt durch K geht; und wenn man die Bogensehne FK zieht und verlängert, so beweisen die beiden übrigen Gleichungen, dass er die cyklischen Bogen in D und M trifft; und daraus ergiebt sich die Gleichung II. desselben

* Der Leser mag die Uebersetzung (Dublin, 1841, pp. 46, 50, 55) zweier Abhandlungen von Chasles, über Kegel zweiten Grades, und über sphärische Kegelschnitte, vom jetzigen Dekan Graves zu Rathe ziehn.

Art. 264 unmittelbar, wenigstens bei der in der Figur angenommenen Anordnung.*

(1.) Die erste Eigenschaft entspricht, wie man leicht sieht, der Möglichkeit, um ein gegebenes ebnes Dreieck einen Kreis zu beschreiben, nämlich um das Dreieck, dessen Ecken die Durchschnittspunkte einer zu der Ebne des gegebenen cyklischen Bogens parallelen Ebne mit den drei Radien sind, die zu den drei gegebenen Punkten auf der Kugel gehn; dagegen mag es von Werth sein, die zweite Eigenschaft, der Uebung wegen, hier durch Quaternionen zu beweisen.

(2.) Man nehme daher die Gleichung eines cyklischen Kegels, 196, (8.), die (nach 196, XII.) in folgender Weise geschrieben werden kann:

$$\text{I.} \ldots S\frac{\varrho}{\alpha}\, S\frac{\varrho}{\beta} = N\frac{\varrho}{\beta};$$

und es sei

$$\text{II.} \ldots S\frac{\varrho'}{\alpha}\, S\frac{\varrho'}{\beta} = N\frac{\varrho'}{\beta};$$

ϱ und ϱ' sind somit zwei Strahlen (oder Seiten) des Kegels, die auch als die Vectoren der beiden Punkte P und P' eines sphärischen Kegelschnitts angesehn werden können, wenn man annimmt, dass die Länge eines jeden gleich der Einheit sei. Es seien τ und τ' die Vectoren der beiden Punkte T und T' auf den beiden cyklischen Bogen, in denen die Bogensehne PP' sie trifft; so dass

$$\text{III.} \ldots S\frac{\tau}{\alpha} = 0, \qquad S\frac{\tau'}{\beta} = 0,$$

und

$$\text{IV.} \ldots T\tau = T\tau' = 1.$$

Der Satz kann dann in folgender Weise aufgestellt werden: dass

$$\text{V.} \ldots \text{wenn } \varrho = x\tau + x'\tau',$$

dann

$$\text{VI.} \ldots \varrho' = x'\tau + x\tau';$$

oder dass der Ausdruck VI. die Gleichung II. befriedigt, wenn

* Man kann sich Aenderungen denken, denen sich indessen die vorige Betrachtung leicht anpassen liesse.

Digitized by Google

die Gleichungen I., III., IV., V. erfüllt werden. Nun haben wir, nach III., V., VI.,

$$\text{VII.}\ldots\ S\frac{\varrho}{\alpha} = x'S\frac{\tau'}{\alpha} = \frac{x'}{x}S\frac{\varrho'}{\alpha},$$

$$S\frac{\varrho}{\beta} = xS\frac{\tau}{\beta} = \frac{x}{x'}S\frac{\varrho'}{\beta};$$

daraus folgt, dass die ersten Glieder von I. und II. gleich sind, und es bleibt nur noch übrig, zu beweisen, dass ihre zweiten Glieder ebenfalls gleich sind, oder dass $T\varrho' = T\varrho$, wenn $T\tau' = T\tau$.

Wir haben demgemäss, nach V. und VI.,

$$\text{VIII.}\ldots\ \frac{\varrho'-\varrho}{\varrho'+\varrho} = \frac{x'-x}{x'+x}\cdot\frac{\tau-\tau'}{\tau+\tau'} = S^{-1}0,$$

nach 200, (11.), und 204, (19.); und die fragliche Eigenschaft ist bewiesen.

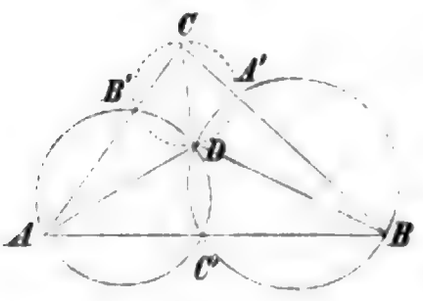
271. Um das associative Princip mit Hülfe der Fig. 60 zu beweisen, sollen drei andere Eigenschaften eines sphärischen Kegelschnitts als bekannt* vorausgesetzt werden: erstens, dass für jede solche Curve zwei Focalpunkte existiren, die verschiedene wichtige Beziehungen zu ihm haben; eine von ihnen ist, dass wenn diese beiden Brennpunkte und ein berührender Bogen gegeben sind, der Kegelschnitt construirt werden kann; zweitens, dass wenn, von irgend einem Punkte auf der Kugel aus, zwei Tangenten zum Kegelschnitt gezogen werden, und auch zwei Bogen zu den Brennpunkten, dann der eine Focalbogen mit der einen Tangente denselben Winkel macht, wie der andere Focalbogen mit der anderen Tangente; und drittens, dass wenn ein sphärisches Vierseit einem solchen Kegelschnitt umschrieben wird (den wir hier der Einfachheit wegen als eine sphärische Ellipse annehmen, oder bei dem wir die entgegengesetzte Ellipse vernachlässigen), gegenüberliegende Seiten supplementäre Winkel umspannen, in jedem der beiden (inneren) Brennpunkte. Lässt

* Der Leser mag wieder die Seiten 46 und 50 der kürzlich angeführten Uebersetzung zu Rathe ziehn. Streng genommen giebt es daher vier Brennpunkte, von denen sich je zwei gegenüberliegen.

man diese bekannten Eigenschaften zu und nimmt an, dass die Anordnung so wie in Fig. 60 sei, so können wir uns einen Kegelschnitt beschrieben denken, der E und F zu seinen beiden Brennpunkten hat und den Bogen BC berührt: und dann beweisen die beiden ersten von den Gleichungen L, in 265, dass er auch die Bogen AB und CD berührt, und die dritte von diesen Gleichungen beweist, dass er AD berührt, so dass $ABCD$ ein umschriebenes* Vierseit ist; und danach sind die drei Gleichungen II. desselben Artikels Folgerungen aus denselben Eigenschaften der Curve.

272. Um endlich dasselbe wichtige Princip auf einem vollständigeren elementaren Wege zu beweisen, vermittelst der Anordnung, die in Fig. 61 dargestellt ist, oder um den Satz der sphärischen Geometrie zu beweisen, der in Art. 267 ausgesprochen ist, können wir den Punkt D als den Pol einer stereographischen Projection annehmen, in welcher die drei kleinen Kreise durch diesen Punkt durch grade Linien dargestellt werden, aber die drei anderen durch Kreise, die alle in ein und derselben Ebne liegen. Und dann kann der Satz (indem man die Accente vertauscht) in folgender Weise ausgesprochen werden: Wenn A', B', C' irgend drei Punkte (vergl. Fig. 62) auf den Seiten BC, CA, AB irgend eines ebnen Dreiecks sind, oder auf den Verlängerungen derselben, dann treffen erstens, die drei Kreise,

Fig. 62.



$$\text{I.}\ldots\ C'AB',\quad A'BC',\quad B'CA',$$

in einem Punkte D zusammen; und zweitens, ist eine grade Anzahl (wenn überhaupt eine) der sechs (gradlinigen oder kreisförmigen) Gruppen:

$$\text{II.}\ldots\ AB'C,\quad BC'A,\quad CA'B,$$

* Der Verfasser hat an anderem Orte die Bezeichnung EF (..) $ABCD$ vorgeschlagen, um die Beziehung der Brennpunkte E,F zu dem umschriebenen Vierseit zu bezeichnen.

Digitized by Google

und

$$\text{II.}' \ldots C'AB'D, \quad A'BC'D, \quad B'CA'D$$

eine directe; eine grade Anzahl derselben (wenn überhaupt eine) ist daher auch eine indirecte. Aber unter dieser Form* kann der Satz durch sehr elementare Betrachtungen bewiesen werden und ohne irgend wie das distributive Princip (224, 262) anzuwenden.

(1.) Der erste Theil des Satzes, wie er oben aufgestellt wurde, erhellt aus dem dritten Buche des Euklid; doch um beide Theile zusammen zu beweisen, scheint es mir nützlich, in folgender Weise vorzugehn, mit Hülfe des Begriffs (235) der Amplituden, oder von Winkeln, welche Drehungen darstellen, diese mögen irgend welche Werthe, positive oder negative, haben und zu einander mit Rücksicht auf ihre Vorzeichen addirt werden.

(2.) Wir können also die drei Gleichungen hinschreiben:

$$\begin{aligned} \text{III.} \ldots \quad AB'C &= n\,\pi, \\ BC'A &= n'\,\pi, \\ CA'B &= n''\,\pi, \end{aligned}$$

um die drei Collineationen $AB'C$, u. s. w. der Fig. 62 auszudrücken; die ganze Zahl n ist grade oder ungrade, je nachdem der Punkt B' auf der begrenzten Linie AC oder auf deren Verlängerung liegt; oder mit anderen Worten, je nachdem die erste Gruppe II. direct oder indirect ist; und gleiches gilt für die beiden anderen Coëfficienten n' und n''.

(3.) Wenn ferner $OPQR$ irgend vier Punkte in einer Ebne sind, so können wir die Formel aufstellen:

---

* Das associative Princip der Multiplication wurde fast unter dieser Form in Paragraph XXII. einer Mittheilung des Verfassers aufgestellt und durch dieselbe einfache Zeichnung erläutert, einer Mittheilung, welche den Titel „Briefe über Quaternionen" führt, und in der ersten und zweiten Ausgabe der Cyclopaedia of the Physical Sciences (London und Glasgow, 1857 und 1860) des verstorbenen Dr. Nichol abgedruckt ist. Dieselbe Mittheilung enthält weitere Erläuterungen und Folgerungen aus demselben Princip, die ich nicht für nöthig gehalten habe, hier noch einmal anzuführen (vergleiche indessen Anmerkung C); und andere kann man in der sechsten der schon erwähnten Vorlesungen des Verfassers über Quaternionen (Dublin, 1853) finden, aus der (wie schon bemerkt wurde) einige von den Formeln und Figuren dieses Kapitels entnommen worden sind.

$$\text{IV.}\ldots\ POQ + QOR = POR + 2m\pi;$$

hier haben wir denselben Begriff der Addition von Amplituden. Wenn dann D irgend ein Punkt in der Ebne des Dreiecks ABC ist, so können wir schreiben,

$$\text{V.}\ldots\ \begin{aligned} AB'D + DB'C &= n\pi, \\ BC'D + DC'A &= n'\pi, \\ CA'D + DA'B &= n''\pi; \end{aligned}$$

und daher,

$$\text{VI.}\ldots\ (AB'D + DC'A) + (BC'D + DA'B) + (CA'D + DB'C) = (n + n' + n'')\pi.$$

(4.) Wenn ferner irgend vier Punkte $OPQR$ nicht nur complanar, sondern auch concircular sind, so haben wir die allgemeine Formel,

$$\text{VII.}\ldots\ OPQ + QRO = p\pi,$$

die ganze Zahl p ist grade oder ungrade, je nachdem die Gruppe $OPQR$ eine directe oder indirecte ist; wenn wir dann mit D den zweiten Durchschnittspunkt des ersten und zweiten Kreises I. bezeichnen, deren erster Durchschnittspunkt C' ist, so erhalten wir

$$\text{VIII.}\ldots\ \begin{aligned} AB'D + DC'A &= p\pi, \\ BC'D + DA'B &= p'\pi; \end{aligned}$$

p und p' sind ungrade, wenn die beiden ersten Gruppen II.′ directe sind, im entgegengesetzten Falle dagegen grade.

(5.) Daher haben wir, nach VI.,

$$\text{IX.}\ldots\ CA'D + DB'C = p''\pi,$$

wo

$$\text{X.}\ldots\ p + p' + p'' = n + n' + n'';$$

die dritte Gruppe II.′ ist daher stets kreisförmig, oder der dritte Kreis I. geht durch den Durchschnittspunkt D der beiden ersten; und sie ist direct oder indirect, das heisst, p'' ist ungrade oder grade, je nachdem die Anzahl der graden Coëfficienten unter den fünf vorher betrachteten selbst grade oder ungrade ist; oder mit anderen Worten, je nachdem die Anzahl der indirecten Gruppen unter den fünf vorher betrachteten grade (mit Einschluss der Null), oder ungrade ist.

Digitized by Google

(6.) In jedem Falle ist daher die Gesammtanzahl der Gruppen von jeder Art grade, und beide Theile des Satzes sind bewiesen; die Wichtigkeit des zweiten Theils desselben (in Betreff der graden Theilung, wenn überhaupt einer, der sechs Gruppen II. II.') entspringt aus der Nothwendigkeit zu beweisen, dass wir stets, wie in der Algebra, haben,

$$\text{XI.} \ldots sr.q = +s.rq,$$

und niemals

$$\text{XII.} \ldots sr.q = -s.rq,$$

wenn q, r, s irgend drei wirkliche Quaternionen sind.

(7.) Das associative Princip der Multiplication kann auch, ohne das distributive Princip, durch gewisse Betrachtungen über Drehungen eines Systems bewiesen werden, auf die wir hier nicht eingehn können.

Dritter Abschnitt.

Ueber einige zusätzliche Formeln.

273. Bevor ich den zweiten Theil abschliesse, mögen einige wenige zusätzliche Bemerkungen hinzugefügt werden, in Betreff einiger der Bezeichnungen und Umformungen, die uns schon begegnet sind, oder anderer, die ihnen entsprechen. Und was zuerst die Bezeichnung betrifft, so sind wir, obwohl wir die Deutung von Ausdrücken, wie $\beta\alpha$, oder α^2, dem dritten Theile vorbehalten haben, doch in 210, (9.) übereingekommen, das häufig vorkommende Symbol $(T\alpha)^2$ in $T\alpha^2$ abzukürzen; und ich schlage jetzt vor, es noch weiter in $N\alpha$ abzukürzen, und dies Quadrat des Tensors (oder der Länge) eines Vectors, α, die Norm dieses Vectors zu nennen; so wie wir (in 190, u. s. w.) die Gleichung $Tq^2 = Nq$, hatten und Nq die Norm des Quaternions q [in 145, (11.)] nannten. Wir werden daher jetzt allgemein, für irgend einen Vector α, die Formel schreiben,

$$\text{I.} \ldots (T\alpha)^2 = T\alpha^2 = N\alpha.$$

Digitized by Google

(1.) Die Gleichungen [vergl. 186, (1.) (2.) (3.) (4.)],

$$\text{II.}\ldots N\varrho = 1;$$
$$\text{III.}\ldots N\varrho = N\alpha;$$
$$\text{IV.}\ldots N(\varrho-\alpha) = N\alpha;$$
$$\text{V.}\ldots N(\varrho-\alpha) = N(\beta-\alpha),$$

stellen, bezüglich, die Einheitskugel dar; und zwar die Kugel durch A mit dem Mittelpunkt O; die Kugel durch O mit dem Mittelpunkt A; und die Kugel durch B, mit demselben Mittelpunkt A.

(2.) Die Gleichungen [vergl. 186, (6.) (7.)],

$$\text{VI.}\ldots N(\varrho+\alpha) = N(\varrho-\alpha);$$
$$\text{VII.}\ldots N(\varrho-\beta) = N(\varrho-\alpha),$$

stellen, bezüglich, die Ebne durch O senkrecht zur Linie OA dar; und die Ebne, die senkrecht zur Linie AB ist und sie halbirt.

274. Was die Transformationen betrifft, so mögen die wenigen, welche folgen, hier hinzugefügt werden; sie beziehen sich zum Theil auf die quaternion Formen (204, 216, u. s. w.) der Gleichung des Ellipsoids.

(1.) Vertauscht man $K(\varkappa:\varrho)$ mit $R\varrho:R\varkappa$, nach 259, VIII., in der Gleichung 217, XVI. des Ellipsoids, und beachtet, dass die drei Vectoren ϱ, $R\varrho$, und $R\varkappa$ complanar sind, während $1:T\varrho = TR\varrho$ nach 258, so wird die Gleichung, wenn sie durch $TR\varrho$ dividirt wird, und wenn der Werth 217, (5.) für t^2 genommen, und die Bezeichnung 273 angewendet wird:

$$\text{I.}\ldots T\left(\frac{\iota}{R\varrho}+\frac{\varrho}{R\varkappa}\right) = N\iota - N\varkappa;$$

das erste Glied derselben lässt sich, wie wir bald sehn werden, schreiben* $T(\iota\varrho+\varrho\varkappa)$, und das zweite Glied $\varkappa^2-\iota^2$.

(2.) Wenn wir, in Verbindung mit den früheren Formen

---

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 309.

Digitized by Google

(204, 216) der Gleichung derselben Oberfläche, einen neuen Hülfsvector, σ oder OS, einführen, so dass (vergl. 216, VIII.)

$$\text{II.} \ldots \sigma = \left(S\frac{\varrho}{\alpha} + V\frac{\varrho}{\beta} \right)\beta = \varrho + 2\beta\, S\frac{\varrho}{\delta},$$

so kann die Gleichung, nach 204, (14.), auf die folgende ausserordentlich einfache Form gebracht werden:

$$\text{III.} \ldots T\sigma = T\beta;$$

sie drückt aus, dass der Ort des neuen Hülfspunktes S die, wie wir sie genannt haben, mittlere Kugel, 216, XIV., ist; während die Linie PS, oder $\sigma - \varrho$, welche irgend zwei entsprechende Punkte, P und S, auf dem Ellipsoid und der Kugel verbindet, der festen Linie β, wie wir sehn, parallel ist; und das ist ein Theil der Homologie, die in 216, (10.) erwähnt wurde.

(3.) Es ist leicht zu beweisen, dass

$$\text{IV.} \ldots S\frac{\sigma}{\delta} = S\frac{\beta}{\alpha}\, S\frac{\varrho}{\delta},$$

und daher

$$\text{V.} \ldots S\frac{\sigma'}{\delta} : S\frac{\sigma}{\delta} = S\frac{\varrho'}{\delta} : S\frac{\varrho}{\delta},$$

wenn ϱ' und σ' die Vectoren zweier neuen, aber correspondirenden Punkte, P' und S', auf dem Ellipsoid und der Kugel sind; und daraus folgert sich leicht der zweite Theil der Homologie, dass irgend zwei entsprechende Sehnen, PP' und SS', der beiden Oberflächen einander auf der cyklischen Ebne schneiden, deren cyklische Normale [vergl. 216, (7.)] δ ist; in der That schneiden sie sich im Punkte T, dessen Vector ist,

$$\text{VI.} \ldots \tau = \frac{x\varrho + x'\varrho'}{x + x'} = \frac{x\sigma + x'\sigma'}{x + x'},$$

wenn

$$x = S\frac{\varrho'}{\delta}, \quad \text{und} \quad x' = -S\frac{\varrho}{\delta};$$

uud dieser Punkt liegt auf der eben erwähnten (vergl. 216, XI.) Ebne, denn es ist

$$\text{VII.} \ldots S\frac{\tau}{\delta} = 0.$$

(4.) Ganz ähnliche Resultate würde man erhalten haben, wenn wir angenommen hätten,

$$\text{VIII.}\ldots\ \sigma = \left(-S\frac{\varrho}{\alpha} + V\frac{\varrho}{\beta}\right)\beta = \varrho - 2\beta S\frac{\varrho}{\gamma},$$

denn das hätte wieder, wie in III., ergeben,

$$\text{IX.}\ldots\ T\sigma = T\beta,$$

aber ausserdem

$$\text{X.}\ldots\ S\frac{\sigma}{\gamma} = -S\frac{\beta}{\alpha}S\frac{\varrho}{\gamma};$$

und es hätte daher [wie in 216, (10.) behauptet wurde] die andere cyklische Ebne, deren Normale γ anstatt δ ist, als eine weitere Ebne der Homologie des Ellipsoids und der Kugel genommen werden können, mit demselben Mittelpunkt der Homologie wie vorher; nämlich dem Punkte in der Unendlichkeit auf der Linie β, oder auf der Achse [204, (15.)] des einen der beiden umschriebenen Umdrehungscylinder [vergl. 220, (4.)].

(5.) Dasselbe Ellipsoid ist, auf zwei anderen Wegen, derselben mittleren Kugel homolog, wobei dieselben beiden cyklischen Ebnen wieder Ebnen der Homologie sind, aber der Mittelpunkt der Homologie ein anderer ist, nämlich der unendlich entfernte Punkt auf der Achse des zweiten umschriebenen Cylinders (oder auf der Linie AB' des zuletzt erwähnten Nebenartikels).

(6.) Die folgenden allgemeinen Transformationen mögen hier (vergl. 199, XII., und 204, XXXIV.') angegeben werden, obwohl sie mit dem Ellipsoid in keinem besonderen Zusammenhang stehn:

$$\text{XI.}\ldots\ TV\sqrt{q} = \sqrt{\{\tfrac{1}{2}(Tq - Sq)\}}$$

$$\text{XII.}\ldots\ \tan\tfrac{1}{2}\angle q = (TV{:}\,S)\sqrt{q} = \sqrt{\frac{Tq - Sq}{Tq + Sq}}.$$

(7.) Die Gleichungen 204, XVI. und XXXV., ergeben leicht,

$$\text{XIII.}\ldots\ UVq = UVUq;$$
$$\text{XIV.}\ldots\ UIVq = \text{Ax.}\,q;$$
$$\text{XV.}\ldots\ TIVq = TVq;$$

Digitized by Google

oder die mehr symbolischen Formeln,

$$\text{XIII.}'\ldots UVU = UV;$$
$$\text{XIV.}'\ldots UIV = \text{Ax.};$$
$$\text{XV.}'\ldots TIV = TV;$$

und die Identität 200, IX. wird einleuchtender, wenn man beachtet, dass

$$\text{XVI.}\ldots q - Nq = q(1 - Kq).$$

(8.) Wir haben auch allgemein [vergl. 200, (10.) und 218, (10.)],

$$\text{XVII.}\ldots \frac{q-1}{q+1} = \frac{(q-1)(Kq+1)}{(q+1)(Kq+1)} = \frac{Nq-1+2Vq}{Nq+1+2Sq}.$$

(9.) Die Formel,*

$$\text{XVIII.}\ldots U(rq + Kqr) = U(Sr.Sq + Vr.Vq) = r^{-1}(r^2q^2)^{\frac{1}{2}}q^{-1},$$

in der q und r irgend zwei Quaternionen sein können, ist vielleicht an sich selbst nicht von so grosser Wichtigkeit, aber wir werden finden, dass sie dem Leser mehrfach nützliche Uebung in Transformationen verschafft.

(10.) Wenn ich, in 257, (1.), sagte, dass die Null nur sich selbst zur Quadratwurzel hat, so war (vergl. 225) damit gemeint, dass kein zweigliedriger Ausdruck von der Form $x + iy$ (228) der Gleichung,

$$\text{XIX.}\ldots 0 = q^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy,$$

genügen würde, mit irgend welchen reellen oder imaginären Werthen der beiden skalar Coëfficienten x und y, die von null** verschieden wären; denn wenn Biquaternionen [214, (8.)] zugelassen werden, und wenn h wieder, wie in 256, (2.), die Imaginäre der Algebra bezeichnet, dann können wir [vergl. 257, (6.) und (7.)] allgemein, da der reelle Werth $0^{\frac{1}{2}} = 0$ ist, den imaginären Ausdruck hinschreiben,

$$\text{XX.}\ldots 0^{\frac{1}{2}} = v + hv',$$

wenn

---

* Diese Formel wurde, doch ebenfalls ohne Beweis, auf Seite 587 der Vorlesungen über Quaternionen vom Verfasser gegeben.

** Vergleiche die Anmerkung auf Seite 371.

Digitized by Google

$$Sv = Sv' = Svv' = Nv' - Nv = 0;$$

v und v' sind somit irgend zwei reelle rechte Quaternionen, in zu einander senkrechten Ebnen, deren Normen (oder deren Tensoren) gleich sind.

(11.) Zum Beispiel haben wir, nach 256, (2.) und nach den Gesetzen (183) von ijk, die Transformationen,

$$\text{XXI.} \ldots (i + hj)^2 = i^2 - j^2 + h(ij + ji) = 0 + h0 = 0;$$

so dass der Biquaternion $i + hj$ einer der imaginären Werthe des Symbols $0^{\frac{1}{2}}$ ist.

(12.) Im Allgemeinen kann, wenn wir Biquaternionen in der Rechnung zulassen, nicht nur das Quadrat eines solchen, sondern auch das Product von zwei solchen Factoren verschwinden, ohne dass jeder einzelne Biquaternion im Besonderen verschwindet; ein Umstand, der einiges Licht auf die Existenz derjenigen imaginären (oder symbolischen) Wurzeln der Gleichungen wirft, die in 257 behandelt wurden.

(13.) Zum Beispiel, obwohl die Gleichung,

$$\text{XXII.} \ldots q^2 - 1 = (q-1)(q+1) = 0,$$

keine reellen Wurzeln ausser ± 1 hat, und daher nicht durch die Substitution irgend eines anderen reellen Skalars, oder reellen Quaternions, für q verificirt werden kann, so wird doch die Gleichung XXII. verificirt, wenn wir für q den Biquaternion* $v + hv'$ unter den Bedingungen 257, XIII. einsetzen.

(14.) Wir werden indessen finden, dass, wenn zwei imaginäre, aber nicht-verschwindende, Factoren in voriger Weise ein Product gleich null ergeben, die Norm eines jeden null ist; vorausgesetzt, dass wir übereinkommen, die Formel $Nq = Sq^2 - Vq^2$ (204, XXII.) auf Biquaternionen auszudehnen; oder als Definition aufzustellen, dass die Norm eines Biquaternions (ebenso wie die eines gewöhnlichen oder reellen Quaternions) gleich dem Quadrat des skalar Theils ist, weniger dem Quadrat

* Das schliesst den Ausdruck $\pm hi$, von 257, (1.), für eine symbolische Quadratwurzel der positiven Einheit ein. Andere solche Wurzeln sind $\pm hj$, und $\pm hk$.

Digitized by Google

des rechten Theils; jeder von diesen beiden Theilen ist im Allgemeinen imaginär, und der erstere ist, wie wir sagten, ein Biscalar.

(15.) Mit dieser Definition können wir, wenn q und q' irgend zwei reelle Quaternionen sind, und wenn h, wie vorher, die gewöhnliche Imaginäre der Algebra ist, die Formel aufstellen:

$$\text{XXIII.} \ldots N(q + hq') = (Sq + hSq')^2 - (Vq + hVq')^2;$$

oder (vergl. 200, VII., und 210, XX.),

$$\text{XXIV.} \ldots N(q + hq') = Nq - Nq' + 2h\,S.q\,Kq'.$$

(16.) Was die Norm der Summe irgend zweier reellen Quaternionen, oder reellen Vectoren (273), betrifft, so sind die folgenden Transformationen gelegentlich von Nutzen [vergl. 220, (2.)]:

$$\text{XXV.} \ldots N(q' + q) = N(Tq'.Uq + Tq.Uq');$$
$$\text{XXVI.} \ldots N(\beta + \alpha) = N(T\beta.U\alpha + T\alpha.U\beta);$$

in jeder von ihnen ist es erlaubt, die Normen mit den Tensoren zu vertauschen, deren Quadrate sie sind, oder T für N zu schreiben.

Digitized by Google

Elemente der Quaternionen.

Theil III.

Ueber Quaternionen als Producte oder Potenzen von Vectoren;
und über einige Anwendungen der Quaternionen.

Kapitel I.

Ueber die Deutung eines Productes von Vectoren, oder der Potenz eines Vectors, als Quaternion.

Erster Abschnitt.

Art. 275. Im ersten Theile dieser Elemente habe ich die Bedeutung: I. der Differenz irgend zweier graden Linien im Raume von bestimmter Richtung (4) angegeben; II. die der Summe von zwei oder von mehreren solchen Linien (5—9); III. diejenige des Productes einer solchen Linie, welche durch oder in eine positive oder negative Zahl multiplicirt wird (15); IV. die Bedeutung des Quotienten einer solchen Linie, die durch eine solche Zahl (16), oder — wie wir sie allgemein genannt haben — durch einen Skalar (17) dividirt ist; und V. haben wir die Bedeutung der Summe eines Systems solcher Linien angegeben, von denen jede mit einem skalar Coefficienten (99) behaftet ist (97), und nach der sie in jedem Falle selbst (im Allgemeinen) eine Linie* von bestimmter Richtung im Raume, oder ein Vector (1), wie wir sie genannt haben, ist.

276. Im zweiten Theile war es der Hauptgrundsatz oder der leitende Begriff, dass der Quotient zweier solchen Vectoren, allgemein, ein Quaternion (112, 116) ist. Es ist indessen daran zu erinnern, dass wir unter diesem allgemeinen Begriff, der gemeiniglich zu einem — wie wir sagen können — schiefen Quotienten in Beziehung steht, oder zu einem Quotienten zweier

* Wir haben seitdem auch die vierte Proportionale zu irgend drei complanaren Linien als eine andere Linie in derselben Ebne gedeutet (226).

Linien im Raume, die entweder einen spitzen oder einen stumpfen Winkel mit einander machen (130), die drei folgenden besonderen Fälle einschliessen: I. den Grenzfall, wenn der Winkel null wird, oder wenn die beiden Linien gleichgerichtet sind; in diesem Falle entartet (131) der Quotient zu einem positiven Skalar; II. den anderen Grenzfall, wenn der Winkel gleich zwei rechten Winkeln ist, oder wenn die Linien entgegengesetzt gerichtet sind; der Quotient entartet in Folge dessen wieder, aber jetzt zu einem negativen Skalar; und III. den zwischenliegenden Fall, wenn der Winkel ein Rechter ist, oder wenn die beiden Linien zu einander senkrecht (132), anstatt einander parallel (15) sind, und wenn daher ihr Quotient das wird, was wir einen rechten Quotienten, oder einen rechten Quaternion, genannt haben (132); es war, wie wir gesehn haben, ein nicht weniger wichtiger Fall als die beiden vorhergehenden

277. In keinem der beiden vorhergehenden Theile haben wir eine Deutung für ein Product von zwei oder mehr Vectoren angegeben; oder für das Quadrat, oder eine andere Potenz eines Vectors. Die Symbole,

$$\text{I.}\,..\,\beta\alpha,\quad \gamma\beta\alpha,..\qquad \text{und}\qquad \text{II.}\,..\,\alpha^2,\ \alpha^3,..\,\alpha^{-1},\,...\,\alpha^t,$$

in denen α, β, γ .. Vectoren bezeichnen, dagegen t einen Skalar vorstellt, bleiben bis jetzt noch völlig ungedeutet; und wir haben daher vollkommene Freiheit, auf dieser Stufe diesen neuen Symbolen, oder neuen Verbindungen der Symbole, irgend welche Bedeutungen beizulegen, die einander nicht widersprechen, und in Uebereinstimmung mit dem Herkömmlichen und mit Analogem zu sein scheinen. Und diese Bedeutungen zu geben, wird der Hauptzweck dieses ersten Kapitels des dritten und letzten Theils des ersten Bandes der Elemente sein; er ist bestimmt, viel kürzer zu werden als einer der beiden vorhergehenden.

278. Als ein Anfang zu solchem Deutungsversuch wollen wir hier als Definition aufstellen, dass ein Vector α durch einen anderen Vector β multiplicirt wird, oder dass mit diesem letzteren Vector in* den ersteren multiplicirt wird, oder

* Vergleiche die Anmerkungen auf den Seiten 188, 204.

Digitized by Google

dass man das Product $\beta\alpha$ erhält, wenn man die Multiplicatorlinie β durch den Reciproken $R\alpha$ (258) der Multiplicandlinie α dividirt; grade so, wie wir bewiesen (136) hatten, dass mit einem Quaternion in einen anderen multiplicirt wird, wenn man ihn durch den Reciproken des letzteren dividirt. In Zeichen werden wir daher, als eine erste Definition, die Formel schreiben:

$$\text{I.} \ldots \beta\alpha = \beta : R\alpha;$$

wo

$$\text{II.} \ldots R\alpha = -U\alpha : T\alpha \quad (258, \text{VII.}).$$

Wir wollen jetzt dazu übergehn, im folgenden Abschnitt einige von den allgemeinen Folgerungen aus dieser Definition, oder Deutung, eines Productes von zwei Vectoren, nach der es einem gewissen Quotienten, oder Quaternion, gleich ist, in Betracht zu ziehn.

Zweiter Abschnitt.

Ueber einige Folgerungen der vorhergehenden Deutung.

279. Die Definition (278) ergiebt die Formel:

$$\text{I.} \ldots \beta\alpha = \frac{\beta}{R\alpha};$$

und ebenso,

$$\text{I}'. \ldots \alpha\beta = \frac{\alpha}{R\beta};$$

sie ergiebt daher, nach 259, VIII., die allgemeine Beziehung,

$$\text{II.} \ldots \beta\alpha = K\alpha\beta;$$

oder

$$\text{II}'. \ldots \alpha\beta = K\beta\alpha.$$

Die Producte zweier Vectoren, die in zwei entgegengesetzten Anordnungen genommen werden, sind daher conjugirte Quaternionen; und die Multiplication von Vectoren ist, ebenso wie die von Quaternionen (168), eine (im Allgemeinen) nicht-commutative Operation.

(1.) Es folgt aus II. [nach 196, vergl. 223, (1.)], dass

$$\text{III.} \ldots S\beta\alpha = +S\alpha\beta = \tfrac{1}{2}(\beta\alpha + \alpha\beta).$$

(2.) Es folgt auch [nach 204, vergl. ferner 223, (1.)], dass

$$\text{IV.} \ldots V\beta\alpha = -V\alpha\beta = \tfrac{1}{2}(\beta\alpha - \alpha\beta).$$

280. Ferner haben wir, nach derselben allgemeinen Formel 259, VIII., die Transformationen,

$$\text{I.}\ldots \frac{\beta}{R(\alpha+\alpha')} = K\frac{\alpha+\alpha'}{R\beta} = K\frac{\alpha}{R\beta} + K\frac{\alpha'}{R\beta} = \frac{\beta}{R\alpha} + \frac{\beta}{R\alpha'};$$

es folgt, daher, nach der Definition (278), dass

$$\text{II.}\ldots \beta(\alpha+\alpha') = \beta\alpha + \beta\alpha';$$

und daher haben wir auch, wenn wir die Conjugirten (279) nehmen, die weitere allgemeine Gleichung

$$\text{III.}\ldots (\alpha+\alpha')\beta = \alpha\beta + \alpha'\beta.$$

Multiplication von Vectoren ist daher, ebenso wie die von Quaternionen (212), eine doppelt distributive Operation.

281. Da wir bis jetzt noch keine Bedeutung für ein Product je dreier Vectoren angegeben haben, wie $\gamma\beta\alpha$ eines ist, so sind wir noch nicht dazu vorbereitet, auszusprechen, ob sich das associative Princip (223) der Multiplication von Quaternionen auf die Vector-Multiplication erstreckt oder nicht. Dagegen können wir schon verschiedene andere Folgerungen aus der Definition (278) eines binären Productes, $\beta\alpha$, ableiten; unter diesen möge man die Aufmerksamkeit auf den skalar Charakter eines Products zweier parallelen Vectoren lenken; und auf den rechtwinkligen Charakter eines Productes zweier senkrechten Vectoren, oder zweier Linien, die rechte Winkel mit einander bilden.

(1.) Die Definition (278) kann in folgender Weise geschrieben werden,

$$\text{I.}\ldots \beta\alpha = -T\beta.T\alpha.U(\beta:\alpha);$$

sie ergiebt daher

$$\text{II.}\ldots T\beta\alpha = T\beta.T\alpha;$$
$$\text{III.}\ldots U\beta\alpha = -U(\beta:\alpha) = U\beta.U\alpha;$$

der Tensor und Versor des Productes zweier Vectoren ist somit (wie bei den Quaternionen, 191) bezüglich gleich dem Producte der Tensoren, und gleich dem Producte der Versoren.

(2.) Schreiben wir zur Abkürzung (vergl. 208),

$$\text{IV.}\ldots a = T\alpha, \qquad b = T\beta,$$
$$\gamma = \mathrm{Ax.}(\beta:\alpha), \qquad x = \angle(\beta:\alpha),$$

so haben wir,

Digitized by Google

$$\text{V.} \quad . \; T\beta\alpha = ba;$$
$$\text{VI.} \ldots S\beta\alpha = S\alpha\beta = -ba\cos x;$$
$$\text{VII.} \ldots SU\beta\alpha = SU\alpha\beta = -\cos x;$$
$$\text{VIII.} \ldots \angle\beta\alpha = \pi - x;$$

so dass (vergl. 198) der Winkel des Productes irgend zweier Vectoren das Supplement des Winkels ihres Quotienten ist.

(3.) Wir erhalten zunächst die Transformationen (vergl. wieder 208),

$$\text{IX.} \ldots TV\beta\alpha = TV\alpha\beta = ba\sin x;$$
$$\text{X.} \ldots TVU\beta\alpha = TVU\alpha\beta = \sin x;$$
$$\text{XI.} \ldots IV\beta\alpha = -\gamma ba\sin x;$$
$$\text{XI}'\ldots IV\alpha\beta = +\gamma ab\sin x;$$
$$\text{XII.} \ldots IUV\beta\alpha = \text{Ax.}\beta\alpha = -\gamma;$$
$$\text{XII}'\ldots IUV\alpha\beta = \text{Ax.}\alpha\beta = +\gamma;$$

so dass die Drehung um die Achse eines Products zweier Vectoren, vom Multiplicator zum Multiplicandus, positiv ist.

(4.) Es folgt auch, nach IX., dass der Tensor des rechten Theils eines solchen Productes, $\beta\alpha$, gleich dem Parallelogramm aus den Factoren ist; oder gleich dem Doppelten der Fläche des Dreiecks OAB, in dem die beiden Factoren α, β, oder OA, OB, zwei coinitiale Seiten sind; so dass wir, wenn wir die hier zuletzt erwähnte Fläche durch das Symbol

$$\Delta OAB$$

bezeichnen, die Gleichung hinschreiben können,

$$\text{XIII.} \ldots TV\beta\alpha = \text{dem Parallelogramm von } \alpha, \beta,$$
$$= 2\Delta OAB;$$

und der Index, $IV\beta\alpha$, ist eine grade Linie senkrecht zur Ebne dieses Parallelogramms, und ihre Länge stellt seinen Flächeninhalt in dem Sinne dar, dass sie beide in demselben Verhältniss zu ihren respectiven Einheiten (der Längen- und Flächeneinheit) stehn.

(5.) Daher ist, nach 279, IV.,

$$\text{XIV.} \ldots T(\beta\alpha - \alpha\beta) = 2 \times \text{dem Parallellogramm}$$
$$= 4\Delta OAB.$$

(6.) Für irgend zwei Vectoren, α, β, ist

$$\text{XV.} \ldots S\beta\alpha = -N\alpha.S(\beta{:}\alpha);$$
$$\text{XVI.} \ldots V\beta\alpha = -N\alpha.V(\beta{:}\alpha);$$

oder kurz*,

$$\text{XVII.}\ldots \beta\alpha = -N\alpha.(\beta:\alpha),$$

und $N\alpha$ hat hierbei die Bedeutung (273), dass es $(T\alpha)^2$ bezeichnet.

(7.) Wenn die beiden Factor-Linien zu einander senkrecht sind, so dass x ein rechter Winkel ist, so wird das Parallelogramm (4.) ein Rechteck, und das Product $\beta\alpha$ wird ein rechter Quaternion (132); so dass wir schreiben können,

$$\text{XVIII.}\ldots S\beta\alpha = S\alpha\beta = 0,$$

wenn $\beta \perp \alpha$, und umgekehrt.

(8.) Unter derselben Bedingung der Rechtwinkligkeit ist,

$$\text{XIX.}\ldots \angle\,\beta\alpha = \angle\,\alpha\beta = \tfrac{\pi}{2};$$

$$\text{XX.}\ldots I\beta\alpha = -\gamma ba;$$

$$\text{XXI.}\ldots I\alpha\beta = +\gamma ab.$$

(9.) Wenn andrerseits die beiden Factor-Linien parallel sind, so verschwindet der rechte Theil ihres Productes, oder das Product reducirt sich auf einen Skalar, der negativ oder positiv ist, je nachdem die beiden mit einander multiplicirten Vectoren gleiche oder entgegengesetzte Richtungen haben; wir können daher die Formel aufstellen,

$$\text{XXII.}\ldots \text{wenn } \beta \parallel \alpha, \quad \text{dann ist} \quad V\beta\alpha = 0, \quad V\alpha\beta = 0;$$

und unter derselben Bedingung des Parallelismus ist

$$\text{XXIII.}\ldots \beta\alpha = \alpha\beta = S\beta\alpha = S\alpha\beta = \mp ba;$$

das obere oder untere Vorzeichen wird genommen, je nachdem $x = 0$, oder $= \pi$ ist.

(10.) Wir können auch [nach 279, (1.) und (2.)] die folgende Formel für Rechtwinkligkeit, und die Formel für Parallelismus hinschreiben:

$$\text{XXIV.}\ldots \text{wenn } \beta \perp \alpha,$$

dann ist

$$\beta\alpha = -\alpha\beta,$$

und umgekehrt;

* Alle Folgerungen der Deutung (278), des Productes $\beta\alpha$ zweier Vectoren, hätten aus der Formel XVII. abgeleitet werden können; es würde indessen nicht so naturgemäss gewesen sein, sie als eine Definition dieses Symbols anzunehmen, als es natürlich war, die Formel 278, I. anzunehmen.

Digitized by Google

XXV. . . wenn $\beta \parallel \alpha$,

dann ist

$$\beta\alpha = +\alpha\beta,$$

und rückbezüglich.

(11.) Wenn α, β, γ irgend drei Einheitslinien sind, die man als die Vectoren der Ecken A, B, C eines sphärischen Dreiecks ansehn kann, dessen Seiten drei neuen positiven Skalaren a, b, c gleich sind, dann erlauben uns, da, nach XVII., $\beta\alpha = -\beta:\alpha$, und $\gamma\beta = -\gamma:\beta$, die Nebenartikel zu 208 zu schreiben,

XXVI. . . $S(V\gamma\beta.V\beta\alpha) = \sin a \sin c \cos B$;

XXVII. . . $IV(V\gamma\beta.V\beta\alpha) = \pm\beta \sin a \sin c \sin B$;

XXVIII. . . $(IV:S)(V\gamma\beta.V\beta\alpha) = \pm\beta \tan B$;

die oberen oder unteren Vorzeichen werden, in den beiden letzten Formeln, genommen, je nachdem die Drehung um β von α nach γ, oder die um B von A nach C, positiv oder negativ ist.

(12.) Die Gleichung 274, I., des Ellipsoids kann jetzt in folgender Weise geschrieben werden:

XXIX. . . $T(\iota\varrho + \varrho\varkappa) = T\iota^2 - T\varkappa^2$;

oder

XXX. . . $T(\iota\varrho + \varrho\varkappa) = N\iota - N\varkappa$.

282. Unter der allgemeinen Rubrik eines Productes zweier parallelen Vectoren finden sich zwei interessante Fälle, welche zwei erste Beispiele von Potenzen von Vectoren liefern: nämlich I. der Fall, wenn die beiden Factoren gleich sind; er ergiebt das bemerkenswerthe Resultat, dass das Quadrat eines Vectors stets gleich einem negativen Skalar ist; und II. der Fall, wenn die Factoren (in dem schon definirten Sinne, 258) zu einander reciprok sind; in diesem Falle folgt aus der Definition (278), dass ihr Product gleich der positiven Einheit ist, so dass jeder, in diesem Falle, betrachtet werden kann als gleich der Einheit dividirt durch den anderen, oder gleich der Potenz des andern, welche die negative Einheit zu ihrem Exponenten hat.

(1.) Wenn $\beta = \alpha$ ist, so reducirt sich das Product $\beta\alpha$ selbst auf das Quadrat von α, wie wir es nennen können; und wir können es durch α^2 bezeichnen; und somit können wir, als

einen besonderen aber wichtigen Fall von 281, XXIII., die Formel (vergl. 273) hinschreiben,

$$\text{I.}\ldots\ \alpha^2 = -\alpha^2 = -(T\alpha)^2 = -N\alpha;$$

so dass das Quadrat irgend eines Vectors α gleich der negativ genommenen Norm (273) dieses Vectors ist; oder gleich dem negativ genommenen Quadrat der Zahl $T\alpha$, welche die Länge desselben Vectors ausdrückt (185).

(2.) Unmittelbarer ergiebt die Definition (278),

$$\text{II.}\ldots\ \alpha^2 = \alpha\alpha = \alpha : R\alpha = -(T\alpha)^2 = -N\alpha,$$

wie vorher.

(3.) Daher ist (vergleiche die Bezeichnungen 161, 190, 199, 204),

$$\text{III.}\ldots\ S.\alpha^2 = -N\alpha;$$
$$\text{IV.}\ldots\ V.\alpha^2 = 0;$$

und

$$\text{V.}\ldots\ T.\alpha^2 = T(\alpha^2) = +N\alpha = (T\alpha)^2 = T\alpha^2;$$

die Fortlassung der Parenthesen, oder des Punktes, in dem letzten Symbol eines Tensors* ist somit für das Quadrat eines Vectors sowohl, wie für das Quadrat eines Quaternions (190), gerechtfertigt; und ebenso können wir schreiben,

$$\text{VI.}\ldots\ U.\alpha^2 = U(\alpha^2) = -1 = (U\alpha)^2 = U\alpha^2;$$

das Quadrat eines Einheitsvectors (129) ist stets gleich der negativen Einheit, und Klammern (oder Punkte) können wieder ausgelassen werden.

(4.) Die Gleichung,

$$\text{VII.}\ldots\ \rho^2 = \alpha^2,$$

ergiebt

$$\text{VII}'.\ldots\ N\rho = N\alpha,$$

oder

$$\text{VII}''.\ldots\ T\rho = T\alpha;$$

sie stellt daher, nach 186, (2.), die Kugel mit dem Mittelpunkte O dar, welche durch den Punkt A geht.

(5.) Die allgemeinere Gleichung,

$$\text{VIII.}\ldots\ (\rho - \alpha)^2 = (\beta - \alpha)^2, \quad [\text{vergl.}^{**}\ 186, (4.)]$$

---

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 271.

** Vergleiche auch die Nebenartikel zu 273.

Digitized by Google

stellt die Kugel mit dem Mittelpunkt A dar, welche durch den Punkt B geht.

(6.) Zum Beispiel, die Gleichung,

$$\text{IX.}\ldots(\varrho-\alpha)^2=\alpha^2,\quad\text{[vergl. 186, (3.)]}$$

stellt die Kugel mit dem Mittelpunkt A dar, welche durch den Anfangspunkt O geht.

(7.) Die Gleichungen [vergl. 186, (6.), (7.)],

$$\text{X.}\ldots(\varrho+\alpha)^2=(\varrho-\alpha)^2,$$
$$\text{XI.}\ldots(\varrho-\beta)^2=(\varrho-\alpha)^2,$$

stellen, bezüglich, die Ebne durch O, senkrecht zur Linie OA, dar; und die Ebne, welche zur Linie AB senkrecht ist, und sie halbirt.

(8.) Das distributive Princip der Vector-Multiplication (280), und die Formel 279, III., befähigen uns, allgemein [vergl. 210, (9.)] die Formel aufzustellen,

$$\text{XII.}\ldots(\beta\pm\alpha)^2=\beta^2\pm 2S\beta\alpha+\alpha^2;$$

die vorigen Gleichungen IX. und X. können daher in folgender Weise transformirt werden:

$$\text{IX}'\ldots\varrho^2=2S\alpha\varrho;$$

und

$$\text{X}'\ldots S\alpha\varrho=0.$$

(9.) Die Gleichungen,

$$\text{XIII.}\ldots\varrho^2+a^2=0,$$
$$\text{XIV.}\ldots\varrho^2+1=0,$$

stellen die Kugeln mit dem Mittelpunkte O dar, deren Radien bezüglich a und 1 sind; so dass die so einfache Formel,

$$\varrho^2+1=0,$$

eine Form der Gleichung der Einheitskugel (128) ist [vergl. 186, (1.)], und sie ist, als solche, von grosser Wichtigkeit in unserer Rechenart.

(10.) Die Gleichung,

$$\text{XV.}\ldots\varrho^2-2S\alpha\varrho+c=0,$$

kann in die folgende Gleichung umgewandelt werden,

$$\text{XVI.}\ldots N(\varrho-\alpha)=-(\varrho-\alpha)^2=c-\alpha^2=c+N\alpha;$$

oder

$$\text{XVI}'\ldots T(\varrho-\alpha)=\sqrt{(c-\alpha^2)}=\sqrt{(c+N\alpha)};$$

sie stellt daher eine (reelle oder imaginäre) Kugel dar, deren

Mittelpunkt A ist, und deren Radius die letzte Wurzel ist, wenn sie reell ist.

(11.) Diese Kugel ist daher nothwendig reell, wenn c ein positiver Skalar ist; oder wenn die skalar Constante c, obwohl negativ, (algebraisch) grösser als α^2 ist, oder grösser als $-N\alpha$; sie wird dagegen imaginär, wenn $c + N\alpha < 0$.

(12.) Die radical Ebne der beiden Kugeln,

$$\text{XVII.} \ldots \rho^2 - 2S\alpha\rho + c = 0,$$
$$\rho^2 - 2S\alpha'\rho + c' = 0,$$

hat zur Gleichung,

$$\text{XVIII.} \ldots 2S(\alpha' - \alpha)\rho = c' - c;$$

sie ist daher stets reell, wenn die gegebenen Vectoren α, α' und die gegebenen Skalare c, c' es sind, auch wenn die eine oder die beiden Kugeln selbst imaginär sind.

(13.) Die Gleichung 281, XXIX., oder XXX., des Central-Ellipsoids (oder des Ellipsoids, dessen Mittelpunkt als Anfangspunkt der Vectoren genommen ist) kann jetzt noch weiter vereinfacht* werden, wie folgt:

$$\text{XIX.} \ldots T(\iota\rho + \rho\varkappa) = \varkappa^2 - \iota^2.$$

(14.) Die Definition (278) ergiebt auch,

$$\text{XX.} \ldots \alpha R\alpha = \alpha : \alpha = 1;$$

oder

$$\text{XX}'. \ldots R\alpha . \alpha = R\alpha : R\alpha = 1;$$

und daher ist es natürlich zu schreiben**,

$$\text{XXI.} \ldots R\alpha = 1 : \frac{1}{\alpha} = \alpha^{-1},$$

wenn wir die allgemeine Theorie der Potenzen von Vectoren, auf die wir vorher hingedeutet haben (277), soweit vorwegnehmen, dass wir das letztere Symbol benutzen, um den Quotienten aus der Einheit dividirt durch den Vector α zu bezeichnen; so dass wir als Identität, oder für jeden Vector, die Gleichung haben,

$$\text{XXII.} \ldots \alpha . \alpha^{-1} = \alpha^{-1} . \alpha = 1.$$

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 309.

** Vergleiche die zweite Anmerkung auf Seite 377.

(15.) Es folgt, nach 258, VII., dass

$$\text{XXIII.}\ldots \alpha^{-1} = -U\alpha : T\alpha;$$

und

$$\text{XXIV.}\ldots \beta\alpha = \beta : \alpha^{-1}.$$

(16.) Wenn wir die Gleichung XXIII. als eine Definition* des Symbols α^{-1} angenommen hätten, so hätten wir die Formel XXIV. als eine Formel für die Deutung des Symbols $\beta\alpha$ gebrauchen können. Doch wir wollen dazu übergehn, eine völlig verschiedene Methode in Betracht zu ziehn, um zu derselben (oder einer gleichbedeutenden) Deutung dieses letzteren Symbols zu gelangen; oder eines binären Productes von Vectoren, das einem Quaternionen gleich aufgefasst wird.

Dritter Abschnitt.

Ueber eine zweite Methode, zu derselben Deutung eines binären Productes von Vectoren zu gelangen.

283. Ein aufmerksamer Leser des zweiten Theils wird sicher bemerkt haben, wie eng und innig der Zusammenhang** zwischen einem rechten Quaternion (132) und seinem Index, oder Index-Vector (133), war, dessen Vorhandensein wir aufgefunden hatten. So haben wir schon gesehn, dass, wenn v und v' [wie in 223, (1.), u. s. w.] irgend zwei rechte Quaternionen bezeichnen, und wenn Iv, Iv', wie üblich, ihre Indices bezeichnen,

$$\text{I.}\ldots Iv' = Iv,$$

ist, wenn $v' = v$, und umgekehrt (133);

$$\text{II.}\ldots I(v' \pm v) = Iv' \pm Iv \quad (206);$$

$$\text{III.}\ldots Iv' : Iv = v' : v \quad (193);$$

und dazu kann die neuere Formel hinzugefügt werden,

$$\text{IV.}\ldots RIv = IRv \quad (258, \text{IX.}).$$

284. Es hätte daher nicht befremdlich erscheinen können, wenn wir vorgeschlagen hätten, die neue Formel von derselben Art,

$$\text{I.}\ldots Iv'.Iv = v'.v = v'v,$$

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 420.

** Vergleiche die Anmerkung auf Seite 223.

Digitized by Google

als eine Definition aufzustellen (wobei wir annehmen, dass uns die vorige Definition 278 nicht begegnet wäre), und nach ihr das Product irgend zweier Indices rechter Quaternionen, als dem Producte dieser beiden Quaternionen selbst gleich, zu deuten. Und dann hätten wir uns, um das Product $\beta\alpha$ irgend zweier gegebenen Vectoren, in einer gegebenen Anordnung genommen, zu deuten, nur vorstellen brauchen (wie wir es stets können), dass die beiden vorgeschlagenen Factoren, α und β, die Indices zweier rechten Quaternionen, v und v', sind, und diese letzteren in derselben Anordnung nur zu multipliciren brauchen. Denn dann würden wir zur Aufstellung der Formel gelangt sein,

$$\text{II.} \ldots \beta\alpha = v'v,$$

wenn

$$\alpha = Iv, \qquad \text{und} \qquad \beta = Iv';$$

oder wir würden die ein wenig mehr symbolische Gleichung erhalten haben,

$$\text{III.} \ldots \beta\alpha = \beta.\alpha = I^{-1}\beta.I^{-1}\alpha;$$

in der die Symbole,

$$I^{-1}\alpha \qquad \text{und} \qquad I^{-1}\beta,$$

als Bezeichnungen der beiden rechten Quaternionen aufzufassen sind, deren Indices die beiden Linien α und β sind.

(1.) Um zu zeigen, dass die beiden Deutungen, 278 und 284, eines binären Vectorenproducts $\beta\alpha$ dem Wesen nach identisch sind, wenn auch die Form der Definitionsgleichungen, durch die sie ausgedrückt wurden, eine verschiedene ist, haben wir nur zu beachten, dass wir den Satz (194) gefunden hatten, dass

$$\text{IV.} \ldots v'v = Iv' : I(1 : v) = Iv' : IRv;$$

aber die Definition (258) von $R\alpha$ ergab uns die kurz zuvor citirte Gleichung, $RIv = IRv$; wir haben daher, nach der vorigen Formel II., die Gleichung,

$$\text{V.} \ldots Iv'.Iv = Iv' : RIv;$$

oder

$$\text{VI.} \ldots \beta.\alpha = \beta : R\alpha,$$

wie in 278, I.; α und β bezeichnen wieder irgend zwei Vectoren. Die beiden Deutungen fallen daher, wenigstens in ihren

Digitized by Google

Resultaten, zusammen, wenn sie auch durch verschiedenes Verfahren, oder durch verschiedene Hülfsbetrachtungen, erhalten worden sind, und durch zwei verschiedene Formeln ausgedrückt werden.

(2.) Das Resultat 279, II., in Betreff conjugirter Producte von Vectoren, entspricht somit dem Resultat 191, (2.), oder der ersten Formel von 223, (1.).

(3.) Die beiden Formeln von 279, (1.) und (2.), die sich auf den skalar und rechten Theil des Products $\beta\alpha$ beziehn, entsprechen den beiden anderen Formeln desselben Nebenartikels, 223, (1.), die auf die entsprechenden Theile von $v'v$ Bezug haben.

(4.) Die doppelt distributive Eigenschaft (280) der Vector-Multiplication ist, wie wir sehn, in diesem Sinne in der entsprechenden aber allgemeineren Eigenschaft (212) der Multiplication von Quaternionen mitenthalten.

(5.) Wenn wir IVq, IVq', t, t' und δ, mit α, β, a, b, und γ in denjenigen Formeln des Art. 208 vertauschten, die seinen Nebenartikeln vorhergehn, so würden wir, mit der vorigen Definition (oder Deutung) II. von $\beta\alpha$, verschiedene von den zuletzt (in den Nebenart. zu 281) gegebenen Folgerungen, als Resultate aus der vorigen Definition, 278, I., erhalten. So entsprechen die Gleichungen,

VI., VII., VIII., IX., X., XI., XII., XXII.,
und XXIII.,

in 281 den Formeln

V., VI., VIII., XI., XII., XXII., XX., XIV.,
und XVI., XVIII.,

in 208, und können (mit Hülfe unserer letzten Definition) aus ihnen abgeleitet werden. [Einige von den Folgerungen aus den Nebenartikeln zu 208 haben wir schon in 281, (11.) in Betracht gezogen.]

(6.) Die geometrischen Eigenschaften der Linie $IV\beta\alpha$, welche aus der ersten Definition (278) von $\beta\alpha$ in 281, (3.) und (4.) abgeleitet wurden, (nämlich, die positive Drehung um diese Linie, von β nach α; dass sie zur Ebne der letzteren senkrecht ist; und die Darstellung des Parallelogramms aus diesen

beiden Factoren durch dieselbe Linie, wobei man einerseits auf die Einheit der Länge, anderseits auf die Einheit des Flächeninhalts Bezug zu nehmen hat) hätten auch aus 223, (4.) abgeleitet werden können, vermittelst der zweiten Definition (284) desselben Productes, $\beta\alpha$.

Vierter Abschnitt.

Ueber die symbolische Identificirung eines rechten Quaternions mit seinem Index; und über die Construction eines Productes zweier zu einander rechtwinkligen Linien durch eine dritte Linie, die senkrecht zu ihnen beiden ist.

285. So haben wir denn gesehn, dass die vorige Formel 284, II. oder III., die Formel 278, I. ersetzen kann, als eine zweite Definition eines Productes zweier Vectoren, die zu denselben Folgerungen führt, und daher schliesslich zu derselben Deutung eines solchen Productes, wie die erste. Jetzt haben wir, in der zweiten Formel, das Product, $\beta\alpha$, dadurch gedeutet, dass wir die beiden Factor-Linien, α und β, mit den beiden rechten Quaternionen, v und v', oder mit $I^{-1}\alpha$ und $I^{-1}\beta$, vertauschten, deren Indices sie sind; und dadurch, dass wir als Definition aufstellten, dass das gesuchte Product $\beta\alpha$ gleich dem Product $v'v$ dieser beiden rechten Quaternionen ist. Es wird daher von Wichtigkeit sein, nachdem wir soweit vorgeschritten sind, zu untersuchen, wie weit eine solche Substitution, von $I^{-1}\alpha$ für α, oder von v für Iv, zusammen mit der umgekehrten Substitution, in unserem Rechensystem erlaubt ist, in Uebereinstimmung mit schon aufgestellten Principien. Denn es ist augenscheinlich, dass, wenn sich zeigen lässt, dass solche Substitutionen allgemein berechtigt, oder erlaubt sind, wir dadurch befähigt sein werden, das vorhandene Gebiet der Deutung beträchtlich zu erweitern: und, in allen Fällen, Functionen von Vectoren so zu behandeln, als ob sie, zu gleicher Zeit, Functionen von rechten Quaternionen wären.

286. Wir haben zuerst, nach 133 (vergl. 283, I.) die Gleichheit,

$$\text{I.}\ldots J^{-1}\beta = J^{-1}\alpha, \quad \text{wenn} \quad \beta = \alpha.$$

Digitized by Google

wir haben sodann, nach 206 (vergl. 283, II.) die Formel für Addition oder Subtraction,

$$\text{II.}\ldots I^{-1}(\beta \pm \alpha) = I^{-1}\beta \pm I^{-1}\alpha;$$

und die allgemeineren Resultate derselben Art (vergl. 207 und 99),

$$\text{III.}\ldots I^{-1}\Sigma\alpha = \Sigma I^{-1}\alpha;$$
$$\text{IV.}\ldots I^{-1}\Sigma x\alpha = \Sigma x I^{-1}\alpha.$$

Drittens haben wir, nach 193 (vergl. 283, III.), für die Division die Formel,

$$\text{V.}\ldots I^{-1}\beta : I^{-1}\alpha = \beta : \alpha;$$

und die zweite Definition (284) der Multiplication von Vectoren, von der wir bewiesen hatten, dass sie mit der ersten Definition (278) in Uebereinstimmung ist, hat uns die analoge Gleichung ergeben,

$$\text{VI.}\ldots I^{-1}\beta\,.\,I^{-1}\alpha = \beta\,.\,\alpha = \beta\alpha.$$

Es möchte daher scheinen, dass wir sofort so hätten vorgehn können, als Definition aufzustellen, zu dem Zwecke, irgend eine vorgeschlagene Function von Vectoren als einen Quaternion zu deuten, dass die folgende allgemeine Gleichung besteht:

$$\text{VII.}\ldots I^{-1}\alpha = \alpha;$$

oder

$$\text{VIII.}\ldots Iv = v; \qquad \text{wenn} \qquad v = \frac{\pi}{2};$$

oder noch kürzer und symbolischer, wenn man bemerkt, dass der Gegenstand der Operation I stets ein rechter Quaternion ist, dass

$$\text{IX.}\ldots I = 1.$$

Aber, ehe wir diesen Schluss endgültig annehmen, müssen wir einen Fall (oder besser eine Gruppe von Fällen) nothwendigerweise prüfen, um sicher zu sein, dass kein Widerspruch mit früheren Resultaten dadurch irgendwie begründet wird.

287. Die allgemeinste Form einer vector Function, oder eines Vectors, der als eine Function von anderen Vectoren und Skalaren in Betracht gezogen wird, die wir im ersten Theil betrachteten, war die Form (99, vergl. 275),

$$\text{I.}\ldots \varrho = \Sigma x\alpha;$$

und wir haben gesehn, dass, wenn wir in dieser Form jeden Vector α mit dem entsprechenden rechten Quaternion $I^{-1}\alpha$ vertauschen, und dann den Index des neuen rechten Quaternions nehmen, der so resultirt, wir dann zu genau demselben Vector ϱ gelangen, wie der war, welchen wir auf andere Weise vorher erhalten hatten; oder in Zeichen, dass

$$\text{II.}\ldots \Sigma x\alpha = I\Sigma x I^{-1}\alpha \quad \text{(vergl. 286, IV.)}.$$

Aber wir haben eine andere Form einer vector Function im zweiten Theil betrachtet; nämlich die Form,

$$\text{III.}\ldots \varrho = \ldots \frac{\varepsilon}{\delta}\frac{\gamma}{\beta}\alpha \quad \text{(226, III.)};$$

in der $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ irgend eine ungrade Anzahl complanarer Vectoren sind. Und bevor wir die Gleichung VII. oder VIII. oder IX. von 286, als eine allgemeingültige, acceptiren, müssen wir untersuchen, ob wir die Freiheit haben, unter denselben Bedingungen der Complanarität, und mit derselben Bedeutung des Vectors ϱ, die Gleichung hinzuschreiben,

$$\text{IV.}\ldots \varrho = I\left(\ldots \frac{I^{-1}\varepsilon}{I^{-1}\delta}\cdot\frac{I^{-1}\gamma}{I^{-1}\beta}\cdot I^{-1}\alpha\right).$$

288. Um dies zu prüfen, mögen zuerst nur drei complanare Vectoren, $\gamma \parallel \alpha, \beta$, gegeben sein; in diesem Falle giebt es stets (nach 226) einen vierten Vector ϱ in derselben Ebne, der die Function $(\gamma:\beta).\alpha$ darstellt, oder construirt; nämlich die vierte Proportionale zu β, γ, α. Nehmen wir nun die inversen Index-Functionen, wie wir sagen wollen, oder operiren wir an den vier Vectoren $\alpha, \beta, \gamma, \varrho$ mit der Charakteristik I^{-1}, so erhalten wir vier collineare und rechte Quaternionen (209), die mit v, v', v'', v''' bezeichnet werden können; und wir erhalten die Gleichung,

$$\text{V.}\ldots v''' : v = (\varrho:\alpha = \gamma:\beta =)\, v'' : v';$$

oder

$$\text{VI.}\ldots v''' = (v'' : v').v;$$

und das beweist, was gesucht wurde. Oder, symbolischer,

$$\text{VII.}\ldots \frac{I^{-1}\varrho}{I^{-1}\alpha} = \frac{\varrho}{\alpha} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{I^{-1}\gamma}{I^{-1}\beta};$$

$$\text{VIII.}\ldots \frac{\gamma}{\beta}.\alpha = \varrho = I(I^{-1}\varrho) = I\left(\frac{I^{-1}\gamma}{I^{-1}\beta}.I^{-1}\alpha\right).$$

Digitized by Google

Und es ist leicht, diese Betrachtung auf den Fall auszudehnen, in welchem irgend eine grössere ungrade Anzahl von Vectoren in einer Ebne gegeben ist, so dass wir die vorige Formel IV. jetzt als bewiesen ansehn können.

289. Wir werden daher die symbolischen Gleichungen VII., VIII., IX. von 286, als allgemeingültige, adoptiren; und werden uns damit in den Stand setzen, in einem sogleich folgenden Abschnitt, ternäre (oder mehrgliedrige) Producte von Vectoren, und ebenso auch Potenzen und andere Functionen von Vectoren, dahin zu deuten, dass sie allgemein Quaternionen sind; wenn sie auch, in besonderen Fällen, in Skalare degeneriren (131), oder rechte Quaternionen (132) werden können: in diesem letzteren Falle können sie, vermöge desselben Princips, durch ihre eignen Indices (133) dargestellt und ihnen gleichgesetzt werden, und können somit als Vectoren behandelt werden. In Zeichen werden wir allgemein für irgend eine Reihe von Vectoren $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ und für irgend eine Function f, die Gleichung hinschreiben können,

$$\text{I.} \ldots f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = f(I^{-1}\alpha, I^{-1}\beta, I^{-1}\gamma, \ldots) = q,$$

wenn q ein gewisser Quaternion ist; während wir in dem besonderen Falle, wenn dieser Quaternion ein rechter ist, oder wenn

$$q = v = S^{-1}0 = I^{-1}\varrho,$$

auch schreiben werden, und gemeiniglich mit Vorliebe (für diesen Fall) die Formel,

$$\text{II.} \ldots f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = If(I^{-1}\alpha, I^{-1}\beta, I^{-1}\gamma, \ldots) = \varrho,$$

wenn ϱ ein Vector ist.

290. Zum Beispiel, anstatt zu sagen (wie in 281), dass das Product irgend zweier rechtwinkligen Vectoren ein rechter Quaternion ist, mit bestimmten, schon ausgesprochenen [284, (6.)] Eigenschaften seines Index, können wir jetzt sagen, dass ein solches Product diesem Index gleich ist. Und daraus ergiebt sich die wichtige Folgerung, dass das Product irgend zweier rechtwinkligen Linien im Raume gleich einer dritten Linie ist (oder durch sie construirt werden kann), die rechtwinklig zu beiden ist; die Drehung um diese Product-Linie, von der Multiplicator-Linie zur Multiplicand-Linie, ist positiv:

und die Länge des Productes ist gleich dem Product der Längen der Factoren, oder sie stellt (mit gebührender Rücksichtnahme auf die Einheiten) die Fläche des Rechtecks aus denselben dar. Und jetzt können wir allgemein, für alle Zwecke der Berechnung und Ausdrucksweise, einen rechten Quaternion mit seinem eigenen Index identificiren.*

Fünfter Abschnitt.

Ueber einige Vereinfachungen der Bezeichnung, oder der Ausdrucksweise, welche sich aus dieser Identificirung ergeben; und über die Auffassung einer Einheitslinie als rechten Versor.

291. Eine unmittelbare Folgerung der symbolischen Gleichung 286, IX. ist die, dass wir jetzt die Charakteristik I des Index eines rechten Quaternions in all den Formeln fortlassen können, in denen sie vorkam; und so die Bezeichnung vereinfachen können. So können wir, anstatt zu schreiben,

$\mathrm{Ax.}\, q = IUVq$, oder $\mathrm{Ax.} = IUV$, wie in 204, (23.),

oder

$\mathrm{Ax.}\, q = UIVq$, $\mathrm{Ax.} = UIV$, wie in 274, (7.),

jetzt einfach** schreiben,

$$\mathrm{I.\,.\,Ax.}\, q = UVq; \quad \text{oder} \quad \mathrm{II.\,.\,Ax.} = UV.$$

Das charakteristische Zeichen Ax., für die Operation die Achse eines Quaternions [132, (6.)] zu nehmen, kann daher hinfort, wenn wir uns irgendwo von ihm zu befreien wünschen, durch die Combination der beiden anderen charakteristischen Zeichen, U und V, ersetzt werden, welche von grösserer und allgemeinerer Nützlichkeit sind, und von denen man sich in der That in der Praxis unseres Rechensystems nicht*** frei machen kann.

* Vergleiche die Anmerkungen auf Seite 154, 175, 223, 246, 259.

** Vergleiche die erste Anmerkung auf Seite 153, und die Anmerkung auf Seite 259.

*** Folglich kann jeder, der es vorzieht, neue Symbole erfinden, um dieselben Operationen an Quaternionen zu bezeichnen, wie diejenigen sind,

292. Wird sind jetzt auch in den Stand gesetzt, die Anzahl der technischen Ausdrücke bis zu einem gewissen Betrage zu verringern, die in dem vorigen Theile angewandt worden sind. So können wir, während wir, in 202, definirten, dass der rechte Quaternion Vq der rechte Theil des Quaternions q sei, oder der Summe $Sq + Vq$, jetzt, nach 290, diesen Theil mit seinem eigenen Index-Vector IVq identificiren, und so gelangen wir dazu, ihn den Vector-Theil zu nennen, oder einfach den Vector* des Quaternions q, ohne hinfort von dem rechten Theile zu sprechen: obwohl der Plan der Auseinandersetzung, der im zweiten Theil adoptirt wurde, erforderte, dass wir es für einige Zeit thaten. Und so wird ein Ausspruch, den wir auf einer früheren Stufe dieses Werkes thaten, nämlich, am Ende des ersten Kapitels des ersten Theils, oder die Behauptung (17) dass

„ein Skalar plus einem Vector gleich einem Quaternion"

sei, ganz verständlich, und bekommt eine vollkommen bestimmte Bedeutung. Denn wir werden auf diese Weise dazu geführt, uns vorzustellen, dass eine Zahl (positiv oder negativ) zu einer Linie** addirt wird, wenn sie (nach schon aufgestellten Regeln) zu demjenigen rechten Quotienten (132) addirt wird, dessen

---

welche in diesen Elementen, und den an anderer Stelle erwähnten Vorlesungen, durch die Buchstaben U und V bezeichnet werden; aber in irgend einer Form müssen solche Zeichen gebraucht werden, und es scheint von anderen Schriftstellern bisher für passend gehalten worden zu sein, nicht hastig an Bezeichnungen zu neuern, die schon in mehreren veröffentlichten Untersuchungen angewandt worden sind, und als ihrem Zweck entsprechend erfunden wurden. Was die Buchstabenform betrifft, die für sie und für die analogen Charakteristiken K, S, T gebraucht werden, so ist das augenscheinlich rein eine Sache des Geschmacks und der Uebereinkunft: und sie sind in der That sämmtlich als kleine italische Buchstaben in einigen Prüfungsarbeiten vom Verfasser gedruckt.

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 246.

** Wegen dieser Möglichkeit, sich einen Quaternion als die Summe einer Zahl und einer Linie vorzustellen, war bei dem Verfasser dieses Buches zu einer Zeit die Absicht herrschend, dass ein Quaternion auch ein Grammarithme genannt werden könnte, durch eine Combination der beiden griechischen Worte γραμμή und ἀριθμός, die bezüglich eine Linie und eine Zahl bedeuten.

Index die Linie ist. In Zeichen werden wir somit dazu geführt, die Formel aufzustellen,

$$\text{I.} \ldots q = a + \alpha,$$

wenn

$$\text{II.} \ldots q = a + I^{-1}\alpha;$$

welcher Skalar und welcher Vector auch immer mit a und α bezeichnet werden mögen. Und da jeder von diesen beiden Theilen, oder Summanden, im Besonderen verschwinden kann, so sind wir berechtigt zu sagen, dass **beide Skalare und Vectoren, oder Zahlen und Linien, in dem Begriff eines Quaternions eingeschlossen sind, so wie er jetzt erweitert oder modificirt ist.**

293. Ferner führt dieselbe symbolische Identificirung von Iv mit v (286, VIII.) zur Bildung einer neuen Vorstellung von einer Einheitslinie, oder von einem Einheitsvector (129), nach der er auch ein rechter Versor (153) ist; oder ein Operator, der bewirkt, dass sich eine Linie, in einer zu ihm senkrechten Ebne, um einen positiven Quadranten dreht: und der daher die Operand-Linie zwingt, eine neue Richtung anzunehmen, welche zu ihrer früheren Richtung rechtwinklig ist, aber ohne ihre Länge irgendwie zu ändern. Und dann werden die Bemerkungen (154) über die Gleichung $q^2 = -1$, in der q ein rechter Versor in dem früheren Sinne (der auch jetzt noch erlaubt ist) war, nach dem er ein rechter radialer Quotient (147) ist, oder der Quotient zweier gleich langen zu einander rechtwinkligen Linien, unmittelbar auf die Deutung der Gleichung,

$$\rho^2 = -1,$$

oder

$$\rho^2 + 1 = 0 \quad (282, \text{XIV.}),$$

anwendbar, in der ρ wieder ein Einheitsvector ist.

(1.) So haben wir (vergl. Fig. 41), wenn α irgend eine Linie senkrecht zu einem solchen Vector ρ ist, die Gleichungen

$$\text{I.} \ldots \rho\alpha = \beta;$$
$$\text{II.} \ldots \rho^2\alpha = \rho\beta = \alpha' = -\alpha;$$

β ist eine andere Linie senkrecht zu ρ, welche zu gleicher Zeit rechtwinklig zu α ist, und dieselbe Länge hat, wie diese; und aus ihr wird eine dritte Linie α' oder $-\alpha$, von entgegen-

Digitized by Google

gesetzter Richtung wie α, aber wieder gleich lang, durch eine Wiederholung der Operation gebildet, welche durch die (wie wir sie hier nennen wollen) Charakteristik ρ bezeichnet wird; oder welche den Einheitsvector ρ zum Operator hat, oder zum angewandten Operationsmittel, oder als eine Art von Arm, oder Achse* der Drehung.

(2.) Allgemeiner (vergl. 290), wenn α, β, γ irgend drei zu einander rechtwinklige Linien sind, und wenn die Länge von γ numerisch gleich dem Product aus den Längen von α und β ist, dann stellt (nach dem, was vorhergeht) die Linie γ das Product der beiden anderen Linien dar, oder sie construirt es, oder ist ihm gleich, wenigstens wenn eine gewisse Reihenfolge der Factoren (vergl. 279) beobachtet wird: so dass wir die Gleichung (vergl. 281, XXI.) schreiben können,

$$\text{III.} \ldots \alpha\beta = \gamma,$$

wenn

$$\text{IV.} \ldots \beta \perp \alpha, \qquad \gamma \perp \alpha, \qquad \gamma \perp \beta,$$

und

$$\text{V.} \ldots T\alpha \,.\, T\beta = T\gamma,$$

vorausgesetzt, dass die Drehung um α, von β nach γ, oder diejenige um γ von α nach β, u. s. w., diejenige Richtung hat, die wir zur positiven genommen haben.

(3.) In diesem allgemeineren Falle können wir uns wieder vorstellen, dass die Multiplicator-Linie α an der Multiplicand-Linie β so operirt hat, dass sie die Product-Linie γ hervorbringt (oder erzeugt); aber jetzt nicht allein durch eine Drehungsoperation, da der Tensor von β (im Allgemeinen) mit demjenigen von α multiplicirt wird, in der Weise, dass er, nach V., den Tensor des Products γ bildet.

(4.) Und wenn wir (vergl. Fig. 41, bis, in der α zuerst mit β vertauscht wurde, und dann mit α') diese zusammengesetzte Operation wiederholen, die aus einer Spannung und einer Drehung zusammengesetzt (vergl. 189) ist, oder wenn wir wieder mit α multipliciren, so erhalten wir eine vierte Linie β', in der Ebne von β, γ, welche aber die entgegengesetzte Richtung wie β, und eine im Allgemeinen verschiedene Länge hat: nämlich die Linie,

* Vergleiche die erste Anmerkung auf Seite 175.

$$\text{VI.} \ldots \alpha\gamma = \alpha\alpha\beta = \alpha^2\beta = \beta' = -a^2\beta,$$

wenn

$$a = T\alpha.$$

(5.) Der Operator α^2, oder $\alpha\alpha$, ist daher seiner Wirkung auf β nach gleichbedeutend mit dem negativen Skalar $-a^2$, oder mit $-(T\alpha)^2$, oder $-N\alpha$, wenn man ihn als einen Coëfficienten, oder als einen (skalar) Multiplicator (15) auffasst: und daraus kann wieder die Gleichung,

$$\text{VII.} \ldots \alpha^2 = -N\alpha \quad (282, \text{I.}),$$

abgeleitet werden, aber jetzt mit neuer Bedeutung, die indessen, wie wir sehn, vollständig in allen ihren Folgerungen mit der zuerst vorgeschlagenen (282) übereinstimmt.

Sechster Abschnitt.

Ueber die Deutung eines Products von drei oder mehr Vectoren als Quaternion.

294. Es hat jetzt keine Schwierigkeit, ein ternäres Product von Vectoren (vergl. 277, I.), oder ein Product von mehr als drei Vectoren, die stets in einer gewissen gegebenen Aufeinanderfolge genommen werden, zu deuten; nämlich als das Resultat (289, I.) der Substitution der entsprechenden rechten Quaternionen in jenem Product: und dieses Resultat ist allgemein ein, wie wir gesagt haben (276), schiefer Quotient, oder ein Quaternion, dessen Winkel entweder ein spitzer oder ein stumpfer ist (130); aber er kann zu einem Skalar entarten (131), oder kann selbst ein rechter Quaternion (132) werden, und kann dann durch einen neuen Vector construirt (289, II.) werden. Es folgt daraus (vergl. 281), dass die Multiplication von Vectoren, ebenso wie die von Quaternionen (223), in der sie, wie wir jetzt sehn, mitenthalten ist, eine associative Operation ist: oder dass wir allgemein (vergl. 223, II.) für irgend drei Vectoren, α, β, γ, die Formel hinschreiben können,

$$\text{I.} \ldots \gamma\beta.\alpha = \gamma.\beta\alpha.$$

Digitized by Google

(1.) Die Formeln 223, III. und IV., werden jetzt durch die folgenden ersetzt:

$$\text{II.}\ldots V.\gamma V\beta\alpha = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha;$$
$$\text{III.}\ldots V\gamma\beta\alpha = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta;$$

hier ist $V\gamma\beta\alpha$, der Einfachheit wegen, anstatt $V(\gamma\beta\alpha)$, oder $V.\gamma\beta\alpha$ geschrieben; und es wird sich für den Leser, der unsere Rechenart eingehend studiren will, nützlich erweisen, wenn er sich mit dieser Formel, und mit den früheren Gleichungen, auf die sie Bezug hat, recht vertraut macht.

(2.) Eine andere nützliche Form der Gleichung II. ist die folgende:

$$\text{IV.}\ldots V(V\alpha\beta.\gamma) = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha.$$

(3.) Die Gleichungen IX., X., XIV. in 223 setzen uns in den Stand für irgend drei Vectoren die Formel hinzuschreiben:

$$\begin{aligned}\text{V.}\ldots S\gamma\beta\alpha &= -S\alpha\beta\gamma = S\alpha\gamma\beta = -S\beta\gamma\alpha\\ &= S\beta\alpha\gamma = -S\gamma\alpha\beta\\ &= \pm \text{ dem Volumen des Parallelepipeds aus } \alpha,\beta,\gamma,\\ &= \pm 6\times \text{ dem Volumen der Pyramide } OABC;\end{aligned}$$

das obere oder untere Vorzeichen wird genommen, je nachdem die Drehung um α von β nach γ positiv oder negativ ist; oder mit anderen Worten, der Skalar $S\gamma\beta\alpha$, des ternären Vectoren-Products $\gamma\beta\alpha$, ist im ersteren Falle positiv, im zweiten dagegen negativ.

(4.) Die Bedingung der Complanarität der drei Vectoren α, β, γ wird daher durch die Gleichung (vergl. 223, XI.):

$$\text{VI.}\ldots S\gamma\beta\alpha = 0,$$

oder durch

$$\text{VI}'.\ldots S\alpha\beta\gamma = 0, \text{ u. s. w.},$$

ausgedrückt.

(5.) Wenn α, β, γ irgend drei, complanare oder diplanare, Vectoren sind, so ergiebt der Ausdruck,

$$\text{VII.}\ldots \delta = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha,$$
$$\text{VIII.}\ldots S\gamma\delta = 0,$$

und

$$\text{IX.}\ldots S\alpha\beta\delta = 0;$$

er stellt daher (vergl. II. und IV.) einen vierten Vector δ dar, welcher zu γ senkrecht, aber mit α und β complanar ist;

oder in Zeichen,

$$\text{X.}\ldots \delta \perp \gamma,$$

und

$$\text{XI.}\ldots \delta \parallel\!\!\parallel \alpha, \beta.$$

(Vergleiche die Bezeichnungen in 123, 129.)

(6.) Für irgend vier Vectoren haben wir nach II. und IV. die Transformationen,

$$\text{XII.}\ldots V(V\alpha\beta . V\gamma\delta) = \delta S\alpha\beta\gamma - \gamma S\alpha\beta\delta;$$
$$\text{XIII.}\ldots V(V\alpha\beta . V\gamma\delta) = \alpha S\beta\gamma\delta - \beta S\alpha\gamma\delta;$$

und jeder von diesen drei äquivalenten Ausdrücken stellt einen fünften Vector ε dar, welcher zugleich complanar mit α, β und mit γ, δ ist; oder eine Linie OE, welche im Durchschnitt der beiden Ebnen, OAB und OCD, liegt.

(7.) Vergleichen wir sie, so sehn wir, dass irgend ein beliebiger Vector ϱ als eine lineare Function von irgend drei gegebenen diplanaren Vectoren, α, β, γ, durch die Formel:

$$\text{XIV.}\ldots \varrho S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\varrho + \beta S\gamma\alpha\varrho + \gamma S\alpha\beta\varrho$$

ausgedrückt werden kann; sie ist, wie wir finden werden, von weittragendster Nützlichkeit.

(8.) Eine andere sehr nützliche Formel, von derselben Art, ist die folgende:

$$\text{XV.}\ldots \varrho S\alpha\beta\gamma = V\beta\gamma . S\alpha\varrho + V\gamma\alpha . S\beta\varrho + V\alpha\beta . S\gamma\varrho;$$

im zweiten Gliede derselben können die Punkte fortgelassen werden.

(9.) Ein Weg, die Richtigkeit der letzten Formel XV. zu prüfen, ist der, an beiden Gliedern derselben mit den drei Symbolen, oder Operationszeichen,

$$\text{XVI.}\ldots S.\alpha, \quad S.\beta, \quad S.\gamma,$$

zu operiren; die gemeinsamen Resultate auf beiden Seiten sind bezüglich die drei skalar Producte

$$\text{XVII.}\ldots S\alpha\varrho . S\alpha\beta\gamma, \quad S\beta\varrho . S\alpha\beta\gamma, \quad S\gamma\varrho . S\alpha\beta\gamma;$$

die Punkte können hier wieder fortgelassen werden.

(10.) Wir wenden hier den Grundsatz an, dass, wenn die drei Vectoren α, β, γ wirklich und diplanar sind, dann kein wirklicher Vector λ zugleich den drei skalar Gleichungen,

$$\text{XVIII.}\ldots S\alpha\lambda = 0, \quad S\beta\lambda = 0, \quad S\gamma\lambda = 0,$$

Digitized by Google

genügen kann; denn er kann nicht zu jenen drei diplanaren Vectoren zu gleicher Zeit senkrecht sein.

(11.) Wenn wir daher, in irgend einer Untersuchung mit Quaternionen, ein System von der Form XVIII. antreffen, so können wir sofort schliessen, dass

$$\text{XIX.}\ldots \lambda = 0,$$

wenn

$$\text{XX.}\ldots S\alpha\beta\gamma \gtrless 0;$$

und umgekehrt, wenn λ ein wirklicher Vector ist, so müssen α, β, γ complanare Vectoren, oder $S\alpha\beta\gamma = 0$ sein, wie in VI'.

(12.) Daher ergeben, unter derselben Bedingung XX., die drei skalar Gleichungen,

$$\text{XXI.}\ldots S\alpha\lambda = S\alpha\mu, \quad S\beta\lambda = S\beta\mu, \quad S\gamma\lambda = S\gamma\mu,$$

auch

$$\text{XXII.}\ldots \lambda = \mu.$$

(13.) Operirt man [vergl. (9.)] an der Gleichung XV. mit dem Symbol, oder der Charakteristik, $S.\delta$, in dem δ irgend ein neuer Vector ist, so finden wir ein Resultat, welches in folgender Weise (mit oder ohne Punkte) geschrieben werden kann:

$$\text{XXIII.}\ldots 0 = S\alpha\rho\,.\,S\beta\gamma\delta - S\beta\rho\,.\,S\gamma\delta\alpha + S\gamma\rho\,.\,S\delta\alpha\beta - S\delta\rho\,.\,S\alpha\beta\gamma;$$

wo α, β, γ, δ, ρ fünf beliebige Vectoren bezeichnen können.

(14.) Als wir diesen letzten Schluss zogen, nahmen wir an, dass die Gleichung XV. statt hat, selbst wenn die drei Vectoren α, β, γ complanar sind; und das muss in der That, als Grenzfall, wahr sein, da wir, nach (9.) und (12.), bewiesen haben, dass sie richtig ist, wenn γ noch so wenig ausserhalb der Ebne von α und β liegt.

(15.) Wir haben daher die neue Formel:

$$\text{XXIV.}\ldots V\beta\gamma\,S\alpha\rho + V\gamma\alpha\,S\beta\rho + V\alpha\beta\,S\gamma\rho = 0,$$

wenn

$$S\alpha\beta\gamma = 0;$$

in ihr kann ρ irgend einen vierten Vector bedeuten, der innerhalb, oder ausserhalb, der gemeinsamen Ebne von α, β, γ liegt.

(16.) Wenn ρ senkrecht zu dieser Ebne ist, so ist die letzte Formel augenscheinlich richtig, und jedes Glied der linken Seite verschwindet, nach 281, (7.), im Besonderen; und

wenn wir ϱ mit einem Vector δ in der Ebne von α, β, γ vertauschen, so gelangen wir zur folgenden Gleichung, als einer Deutung derselben Formel XXIV., welche einen bekannten Satz der ebnen Trigonometrie ausdrückt, der verschiedene andere in sich enthält:

$$\text{XXV.} \ldots \sin BOC . \cos AOD + \sin COA . \cos BOD + \sin AOB . \cos COD = 0,$$

für irgend vier complanare und coinitiale Linien OA, OB, OC, OD.

(17.) Geht man von OD zu einer Linie über, welche zu ihr senkrecht ist, aber in der den vier Linien gemeinsamen Ebne liegt, so erhalten wir weiter die bekannte* Gleichung:

$$\text{XXVI.} \ldots \sin BOC \sin AOD + \sin COA \sin BOD + \sin AOB \sin COD = 0;$$

sie lässt ebenso, wie die frühere, mannigfache Transformationen zu, wird aber hier nur erwähnt, da sie sich unserer Beachtung von selbst naturgemäss darbot, als wir die Formel XXIV., die wir vorher durch Quaternionen erhielten, zu deuten suchten.

(18.) Operirt man an dieser Formel mit $S.\delta$, und vertauscht ϱ mit ε, so erhalten wir die neue Gleichung:

$$\text{XXVII.} \ldots 0 = S\alpha\varepsilon S\beta\gamma\delta + S\beta\varepsilon S\gamma\alpha\delta + S\gamma\varepsilon S\alpha\beta\delta,$$

wenn

$$S\alpha\beta\gamma = 0;$$

und das hätte in der That sofort aus XXIII. abgeleitet werden können.

(19.) Die Gleichung XIV. sowohl, wie XV., muss im Grenzfalle ihre Gültigkeit behalten, wenn α, β, γ complanar sind; daher ist

$$\text{XXVIII.} \ldots \alpha S\beta\gamma\varrho + \beta S\gamma\alpha\varrho + \gamma S\alpha\beta\varrho = 0,$$

wenn

$$S\alpha\beta\gamma = 0.$$

(20.) Diese letzte Formel ist, nach (4.), augenscheinlich richtig, wenn ϱ in der gemeinsamen Ebne der drei andern Vectoren liegt; und wenn wir annehmen, dass sie zu dieser Ebne senkrecht ist, so dass

$$\text{XXIX.} \ldots \varrho \parallel V\beta\gamma \parallel V\gamma\alpha \parallel V\alpha\beta,$$

* Vergleiche Seite 20 der Géométrie Supérieure von Chasles.

Digitized by Google

und daher, nach 281, (9.), da

$$S(S\beta\gamma\,.\,\varrho) = 0,$$

$$\text{XXX.}\ldots\ S\beta\gamma\varrho = S(V\beta\gamma\,.\,\varrho) = V\beta\gamma\,.\,\varrho,\ \text{u. s. w.},$$

so können wir jedes Glied durch ϱ dividiren, und erhalten so weiter die Formel,

$$\text{XXXI.}\ldots\ \alpha V\beta\gamma + \beta V\gamma\alpha + \gamma V\alpha\beta = 0,$$

wenn

$$S\alpha\beta\gamma = 0.$$

(21.) Der Vector (292) dieses letzten Ausdrucks verschwindet daher nach II., im Allgemeinen; der Ausdruck ist daher seinem eignen Skalar gleich, und wir können schreiben,

$$\text{XXXII.}\ldots\ \alpha V\beta\gamma + \beta V\gamma\alpha + \gamma V\alpha\beta = 3\,S\alpha\beta\gamma,$$

welche drei Vectoren auch immer durch α, β, γ bezeichnet werden mögen.

(22.) Wenn wir in dem Falle, dass Complanarität stattfindet, annehmen, dass die drei Vectoren gleich lang sind, so haben wir die Proportion,

$$\text{XXXIII.}\ldots\ V\beta\gamma : V\gamma\alpha : V\alpha\beta = \sin BOC : \sin COA : \sin AOB;$$

und die Formel XXXI. wird somit,

$$\text{XXXIV.}\ldots\ OA\,.\sin BOC + OB\,.\sin COA + OC\,.\sin AOB = 0;$$

wo OA, OB, OC irgend drei Radien eines Kreises sind, und die Gleichung ebenso gedeutet wird, wie in den Artikeln 10, 11, u. s. w.

(23.) Die Gleichung XXIII. hätte aus XIV., anstatt aus XV., abgeleitet werden können, indem man zuerst mit $S\,.\,\delta$ operirt, und dann δ und ϱ vertauscht hätte.

(24.) Ein Vector ϱ kann im Allgemeinen als von drei Skalaren (den Coordinaten seines Endpunktes) abhängig angesehn werden (221); er kann daher nicht durch weniger als drei skalar Gleichungen bestimmt werden; oder er kann nicht aus weniger als vieren eliminirt werden.

(25.) Als Beispiel einer solchen Bestimmung eines Vectors mögen α, β, γ wieder irgend drei gegebene und diplanare Vectoren sein; und die drei gegebenen Gleichungen mögen sein:

$$\text{XXXV.}\ldots \begin{aligned} S\alpha\varrho &= a,\\ S\beta\varrho &= b,\\ S\gamma\varrho &= c; \end{aligned}$$

a, b, c sollen in ihnen drei gegebene Skalare bedeuten. Dann ist der Ausdruck für den gesuchten Vector ϱ, nach XV.,

$$\text{XXXVI.}\ldots \varrho = e^{-1}(aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta),$$

wenn

$$\text{XXXVII.}\ldots e = S\alpha\beta\gamma.$$

(26.) Ein weiteres Beispiel mögen die drei Gleichungen,

$$\text{XXXVIII.}\ldots \begin{aligned} S\beta\gamma\varrho &= a',\\ S\gamma\alpha\varrho &= b',\\ S\alpha\beta\varrho &= c', \end{aligned}$$

sein; dann haben wir bei derselben Bedeutung des Skalars e, nach XIV.,

$$\text{XXXIX.}\ldots \varrho = e^{-1}(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma).$$

(27.) Als ein Beispiel für die Elimination eines Vectors mögen hier die vier skalar Gleichungen,

$$\text{XL.}\ldots \begin{aligned} S\alpha\varrho &= a,\\ S\beta\varrho &= b,\\ S\gamma\varrho &= c,\\ S\delta\varrho &= d, \end{aligned}$$

gegeben sein; dann haben wir, nach XXIII., die folgende resultirende Gleichung, in der ϱ nicht vorkommt, sondern nur die vier Vectoren, $\alpha \ldots \delta$, und die vier Skalare, $a \ldots d$:

$$\text{XLI.}\ldots a.S\beta\gamma\delta - b.S\gamma\delta\alpha + c.S\delta\alpha\beta - d.S\alpha\beta\gamma = 0.$$

(28.) Diese letztere Gleichung kann daher als die Bedingung für das Zusammentreffen der vier, durch die vier skalar Gleichungen XL. dargestellten Ebnen in ein und demselben Punkte angesehn werden; denn es folgt, obwohl es vorher nicht ausdrücklich ausgesprochen worden ist, augenscheinlich aus der Definition 278 eines binären Products von Vectoren, in Verbindung mit 196, (5.), dass jede skalar Gleichung von der linearen Form (vergl. 282, XVIII.),

$$\text{XLII.}\ldots S\alpha\varrho = a,$$

oder

$$S\varrho\alpha = a,$$

Digitized by Google

in der $\alpha = OA$, und $\varrho = OP$ ist, wie gewöhnlich eine Ebne, als Ort des Punktes P, darstellt; der Vector des Fusspunktes S des Lothes, welches vom Anfangspunkt auf diese Ebne gefällt ist, ist

$$\text{XLIII.} \ldots OS = \sigma = aR\alpha = a\alpha^{-1} \quad (282, \text{XXI.}).$$

(29.) Wenn wir uns das Volumen einer Pyramide (68) so vorstellen, als ob es einen algebraischen (oder skalar) Charakter habe, so dass es entweder ein positives oder ein negatives Verhältniss zum Volumen einer gegebenen Pyramide, mit einer gegebenen Anordnung seiner Eckpunkte, haben kann, so können wir das doppelte Vorzeichen in dem letzten Ausdruck (3.) für den Skalar eines ternären Vectorenproductes fortlassen: und können somit, allgemein, wenn $OABC$ ein solches Volumen bezeichnet, die Formel hinschreiben,

$$\text{XLIV.} \ldots S\alpha\beta\gamma = 6 \, . \, OABC,$$

= einem positiven oder einem negativen Skalar, je nachdem die Drehung um OA von OB nach OC negativ oder positiv ist.

(30.) Allgemeiner, wenn wir O mit D, und OA oder α mit $\alpha - \delta$, u. s. w., vertauschen, so haben wir die Formel:

$$\begin{aligned} \text{XLV.} \ldots 6 \, . \, DABC &= S(\alpha - \delta)(\beta - \delta)(\gamma - \delta) \\ &= S\alpha\beta\gamma - S\beta\gamma\delta + S\gamma\delta\alpha - S\delta\alpha\beta; \end{aligned}$$

in ihr ist zu beachten, dass sich der Ausdruck in den ihm entgegengesetzten verwandelt, oder negativ wird, oder mit -1 multiplicirt wird, wenn irgend zwei von den vier Vectoren, α, β, γ, δ, oder wenn irgend zwei von den vier Punkten, A, B, C, D, ihre Stellen mit einander vertauschen; und ihr erster Werth wird daher durch einen zweimaligen solchen Austausch von je zweien wiedererhalten.

(31.) Bezeichnen wir daher den neuen Anfangspunkt von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ mit E, so haben wir erstens, nach XLIV., XLV., die Gleichung,

$$\begin{aligned} \text{XLVI.} \ldots DABC = EABC &- EBCD \\ &+ ECDA - EDAB; \end{aligned}$$

und können dann das Resultat (vergl. 68) unter der mehr symmetrischen Form (da $-EBCD = BECD =$ u. s. w.) schreiben:

Digitized by Google

$$\text{XLVII.}\ldots BCDE + CDEA + DEAB + EABC + ABCD = 0;$$

hier können A, B, C, D, E irgend welche fünf Punkte im Raume bezeichnen.

(32.) Und eine entsprechende Formel (69, III.) des ersten Theils für irgend sechs Punkte $OABCDE$, nämlich die Gleichung (vergl. 65, 70),

$$\text{XLVIII.}\ldots OA.BCDE + OB.CDEA + OC.DEAB + OD.EABC + OE.ABCD = 0,$$

in der die Additionen den Regeln für Vectoren gemäss gebildet werden, während die Volumina als skalar Coëfficienten zu behandeln sind, wird leicht aus den vorhergehenden Grundsätzen und Resultaten wiederentdeckt. In der That kann die letzte Formel, nach XLVII., in folgender Weise geschrieben werden:

$$\text{XLIX.}\ldots ED.EABC = EA.EBCD + EB.ECAD + EC.EABD;$$

oder, wenn man α, β, γ, δ an Stelle von EA, EB, EC, ED setzt,

$$\text{L.}\ldots \delta S\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma\delta + \beta S\gamma\alpha\delta + \gamma S\alpha\beta\delta;$$

sie ist nur eine andere Form von XIV., und mit ihr sollte sich der Leser recht vertraut machen.

(33.) Die Formel 69, II. kann von XXXI. abgeleitet werden, wenn man beachtet, dass wir, wenn die drei Vectoren α, β, γ complanar sind, die Proportion haben,

$$\text{LI.}\ldots V\beta\gamma : V\gamma\alpha : V\alpha\beta : V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = OBC : OCA : OAB : ABC,$$

wenn man auf die Vorzeichen der Flächen (oder die algebraischen oder skalar Verhältnisse) achtet (28, 63); und die Formel 69, I., für den Fall dreier collinearen Punkte A, B, C, kann jetzt wie folgt geschrieben werden:

$$\text{LII.}\ldots \alpha(\beta-\gamma) + \beta(\gamma-\alpha) + \gamma(\alpha-\beta) = 2V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta) = 2V(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) = 0,$$

wenn die drei coinitialen Vectoren α, β, γ termino-collinear (24.) sind.

Digitized by Google

(34.) Der Fall, wenn vier coinitiale Vectoren $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ termino-complanar (64) sind, oder wenn sie in vier complanaren Punkten A, B, C, D endigen, wird dadurch ausgedrückt, dass man das zweite oder das dritte Glied der Formel XLV. der Null gleichsetzt.

(35.) Endlich haben wir, für ein ternäres Vectorenproduct im Allgemeinen, die Formel:

$$\text{LIII.}\ldots\ \alpha^2\beta^2\gamma^2 + (S\alpha\beta\gamma)^2 = (V\alpha\beta\gamma)^2$$
$$= (\alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha + \gamma S\alpha\beta)^2$$
$$= \alpha^2(S\beta\gamma)^2 + \beta^2(S\gamma\alpha)^2 + \gamma^2(S\alpha\beta)^2$$
$$- 2\,S\beta\gamma\, S\gamma\alpha\, S\alpha\beta.$$

295. Die Identität (290) eines rechten Quaternions mit seinem Index, und die Auffassung (293) einer Einheitslinie als einen rechten Versor, gestatten uns jetzt die drei wichtigen Versoren i, j, k so zu behandeln, als ob sie durch ihre eignen Achsen construirt würden, oder gerade so (nach unserer jetzt gewonnenen Anschauung), als ob sie mit ihnen identisch wären; oder mit den drei Linien OI, OJ, OK von 181, wenn man jede als eine Art Hülfsmittel, oder als einen Operator, oder als ein Mittel, um einen rechten Winkel zu drehn [293, (1.)], ansieht, welches bewirkt, dass sich irgend eine Linie, die in einer Ebne senkrecht zu ihr liegt, in dieser Ebne um einen positiven Quadranten dreht, ohne ihre Länge irgendwie zu ändern. Bei dieser Auffassung, oder Construction, sind die Gesetze der Symbole $i\ j\ k$ noch in der Grundformel des Artikels 183, nämlich der Formel,

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1, \qquad \text{(A)}$$

enthalten; und wenn wir jetzt, in Uebereinstimmung mit eben dieser Auffassung, die dreigliedrige Grundform (221) von rechten Quaternionen auf Vectoren übertragen, so dass wir allgemein einen Ausdruck von der Form,

$$\text{I.}\ldots\ \varrho = ix + jy + kz,$$

oder

$$\text{I}'\ldots\ \alpha = ia + jb + kc, \text{ u. s. w.},$$

hinschreiben können, in dem xyz und abc Skalare (nämlich rechtwinklige Coordinaten) sind, so können wir viele der vorhergehenden Resultate mit Leichtigkeit wieder auffinden: und

können sie, wenn wir es für passend erachten, mit Coordinaten in Zusammenhang bringen.

(1.) Was die Gesetze (182) betrifft, welche in der Grundformel A enthalten sind, so kann das Gesetz $i^2 = -1$, u. s. w. in dem Sinne von 293, (1.) so gedeutet werden, als ob es die Umkehrung darstellt, welche sich aus zwei quadrantalen Drehungen ergiebt.

(2.) Die beiden zu einander im Gegensatz stehenden Gesetze, oder Formeln,

$$ij = +k, \qquad ji = -k, \quad \text{(182, II. und III.)}$$

können jetzt so gedeutet werden, als ob sie ausdrückten, dass, obwohl eine positive Drehung um einen rechten Winkel, um die Linie i als Achse, eine drehbare Linie aus der Lage j in in die Lage k, oder $+k$, bringt, doch, im Gegensatz dazu, eine positive quadrantale Drehung um die Linie j, als um eine neue Achse, eine neue drehbare Linie von einer neuen Anfangslage, i, in eine neue Endlage bringt, die durch $-k$ bezeichnet wird, oder welche zur vorigen Endlage, $+k$, entgegengesetzt* ist.

(3.) Endlich kann das Gesetz $ijk = -1$ (183) in der Weise gedeutet werden, dass man sich vorstellt, wir operirten an einer Linie α, welche zuerst die Richtung von $+j$ hat, mit den drei Linien, k, j, i, der Reihe nach; das ergäbe drei neue, aber gleich lange Linien, β, γ, δ, welche die Richtungen von $-i$, $+k$, $-j$, haben, und so käme man zuletzt zu einer

* In den Vorlesungen war angenommen worden (um die Vorstellungen zu fixiren, und mit Rücksicht auf nördliche Breiten), dass die drei zu einander rechtwinkligen Einheitslinien, i, j, k, bezüglich, nach Süden, nach Westen, und nach dem Zenith gerichtet seien; und dann lässt sich der Gegensatz der beiden Formeln, $ij = +k$, $ji = -k$, in der Weise erläutern, dass man sich einmal eine bewegliche Linie, die zuerst nach Westen gerichtet ist, um eine nach Süden gerichtete Achse (oder um einen Arm) rechtsläufig (oder durch eine Schraubenbewegung) um einen rechten Winkel gedreht denkt, so dass dadurch die Endlage der Linie nach aufwärts gerichtet ist; und dass wir ein andres Mal in genau derselben Weise an einer Linie operiren, die zuerst nach Süden gerichtet ist und eine nach Westen gerichtete Achse hat, welche diese neue Linie zwingt, zum Schluss eine nach abwärts (anstatt, wie vorher, nach aufwärts) gerichtete Lage anzunehmen.

Digitized by Google

Linie $-\alpha$, welche eine zur Anfangslage entgegengesetzte Richtung hat.

(4.) Die vorhergehenden Gesetze von ijk, welche sämmtlich (wie ich hervorgehoben habe) in der Formel A enthalten (184) sind, wenn sie mit dem vorigen Ausdruck I. für ϱ in Verbindung gebracht wird, ergeben [vergl. 222, (1.)] für das Quadrat dieses Vectors den Werth:

$$\text{II.} \ldots \varrho^2 = (ix + jy + kz)^2 = -(x^2 + y^2 + z^2);$$

das Quadrat der Linie ϱ ist daher gleich dem negativ genommenen Quadrate ihrer Länge $T\varrho$ (185), oder gleich ihrer negativ genommenen Norm $N\varrho$ (273), was mit dem früheren Resultat* 282, (1.) oder (2.) übereinstimmt.

(5.) Die Bedingung für die Rechtwinkligkeit der beiden Linien ϱ und α kann, wenn sie durch die beiden Trinome I. und I'. dargestellt werden, durch die Formel,

$$\text{III.} \ldots 0 = S\alpha\varrho = -(ax + by + cz),$$

ausgedrückt werden (281, XVIII.); sie stimmt mit einem wohlbekannten Satze der Theorie der rechtwinkligen Coordinaten überein.

(6.) Die Bedingung für die Complanarität dreier Linien, ϱ, ϱ', ϱ'', welche durch die dreigliedrigen Formen,

$$\begin{aligned} \text{IV.} \ldots \quad \varrho &= ix + jy + kz, \\ \varrho' &= ix' + \text{ u. s. w.}, \\ \varrho'' &= ix'' + \text{ u. s. w.}, \end{aligned}$$

dargestellt werden, wird (nach 294, VI.) durch die Formel (vergl. 223, XIII.),

$$\begin{aligned} \text{V.} \ldots 0 = S\varrho''\varrho'\varrho = x''(z'y - y'z) + y''(x'z - z'x) \\ + z''(y'x - x'y), \end{aligned}$$

ausgedrückt; und das stimmt wiederum mit bekannten Resultaten überein.

(7.) Wenn die drei Linien ϱ, ϱ', ϱ'', oder OP, OP', OP'', nicht in einer Ebne liegen, so ergiebt der letzte Ausdruck für $S\varrho''\varrho'\varrho$, nach 294, (3.), das Volumen des Parallelepipeds [vergl. 223, (9.)], dessen Kanten sie sind; und dies Volumen,

* Vergleiche auch 222, IV.

in dieser Weise ausgedrückt, ist ein positiver oder ein negativer Skalar, je nachdem die Drehung um ϱ von ϱ' nach ϱ'' selbst positiv oder negativ ist: das heisst, je nachdem sie dieselbe Richtung hat, wie die um $+x$ von $+y$ nach $+z$ (oder wie diejenige um i von j nach k), oder die zu ihr entgegengesetzte Richtung.

(8.) Es mag hier bemerkt werden [vergl. 223, (13.)], dass, wenn α, β, γ irgend drei Vectoren sind, wir dann (nach 294, III. und V.) haben:

$$\text{VI.}\ldots S\alpha\beta\gamma = -S\gamma\beta\alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma - \gamma\beta\alpha);$$
$$\text{VII.}\ldots V\alpha\beta\gamma = +V\gamma\beta\alpha = \tfrac{1}{2}(\alpha\beta\gamma + \gamma\beta\alpha).$$

(9.) Allgemeiner [vergl. 223, (12.)], da ein Vector, als Darstellung eines rechten Quaternions (290) aufgefasst, stets (nach 144) der Entgegengesetzte seines eignen Conjugirten ist, so dass wir die wichtige Formel*,

$$\text{VIII.}\ldots K\alpha = -\alpha,$$

haben, und daher

$$\text{IX.}\ldots K\Pi\alpha = \pm\Pi'\alpha,$$

so können wir für irgend eine Anzahl von Vectoren die Transformationen hinschreiben,

$$\text{X.}\ldots S\Pi\alpha = \pm S\Pi'\alpha = \tfrac{1}{2}(\Pi\alpha \pm \Pi'\alpha),$$
$$\text{XI.}\ldots V\Pi\alpha = \mp V\Pi'\alpha = \tfrac{1}{2}(\Pi\alpha \mp \Pi'\alpha),$$

wobei die oberen oder unteren Vorzeichen zu nehmen sind, je nachdem die Anzahl grade oder ungrade ist: hierbei hat man sich zu denken, dass

$$\text{XII.}\ldots \Pi'\alpha = \ldots\gamma\beta\alpha,$$

wenn

$$\Pi\alpha = \alpha\beta\gamma\ldots$$

(10.) Die Beziehungen der Rechtwinkligkeit,

$$\text{XIII.}\ldots \text{Ax.}\,i \perp \text{Ax.}\,j,$$
$$\text{Ax.}\,j \perp \text{Ax.}\,k,$$
$$\text{Ax.}\,k \perp \text{Ax.}\,i,$$

* Wenn wir in gleicher Weise, in unserm jetzigen Sinne, die Symbole $U\alpha$, $T\alpha$, $N\alpha$, als gleichsinnig mit $UI^{-1}\alpha$, $TI^{-1}\alpha$, $NI^{-1}\alpha$, deuten, so gelangen wir wieder zu denselben Bedeutungen (vergleiche die Anmerkungen zu Seite 176, 177) dieser Symbole wie vorher (155, 185, 273); und es ist augenscheinlich, dass wir jetzt in demselben Sinne haben,

$$S\alpha = 0, \qquad V\alpha = \alpha.$$

Digitized by Google

die sich sofort aus den Definitionen (181) ergeben, können jetzt kürzer in folgender Weise geschrieben werden:

$$\text{XIV.} \ldots \begin{array}{l} i \perp j, \\ j \perp k, \\ k \perp i; \end{array}$$

und Aehnliches gilt in anderen Fällen, wo die Achsen, oder die Ebnen, irgend zweier rechten Quaternionen zu einander rechtwinklig sind.

(11.) Dagegen hätten wir, vermittelst der Bezeichnungen aus dem zweiten Theile, auch, nach 123, 181, solche Formeln für die Complanarität hinschreiben können, wie die folgende,

$$\mathrm{Ax.} j \parallel i,$$

um auszudrücken (vergl. 225), dass die Achse von j eine Linie in der Ebne von i ist; und es könnte einige Verwirrung herbeiführen, wenn wir diese Formel jetzt in $j \parallel i$ abkürzen würden. Im Allgemeinen scheint es angemessen, dass wir von jetzt an das Zeichen $\parallel$ nur anwenden, wenn es entweder die Symbole dreier Linien in Verbindung setzt, die wieder als complanare aufzufassen sind; oder andere Symbole dreier rechten Quaternionen, die als collinear (209) anzusehn sind, weil ihre Indices (oder Achsen) complanar sind: oder endlich, irgend zwei complanare Quaternionen (123).

(12.) Andrerseits ergiebt sich nichts Unangemessenes, wenn wir das Zeichen für Parallelismus zwischen die Symbole zweier rechten Quaternionen setzen, die, in dem früheren Sinne (123), complanar sind; so können wir, zum Beispiel, in unserem gegenwärtigen Sinne schreiben,

$$\text{XV.} \ldots \begin{array}{l} xi \parallel i, \\ yj \parallel j, \\ zk \parallel k, \end{array}$$

wenn xyz irgend drei Skalare sind.

296. Es giebt einige wenige besondere, aber bemerkenswerthe Fälle von ternären und anderen Producten von Vectoren, deren Erwähnung ich hier für gut halte, und von denen einige werth sind, dass sich der Leser eine Zeit lang in Gedanken mit ihnen beschäftigt: besonders diejenigen, welche die Producte aufeinanderfolgender Seiten geschlossener Po-

lygone betreffen, welche in Kreise, oder in Kugeln, eingeschrieben sind.

(1.) Wenn A, B, C, D irgend vier concirculare Punkte sind, so wissen wir, nach den Nebenartikeln zu 260, dass ihre anharmonische Function $(ABCD)$, wie sie in 259, (9.) definirt wurde, ein Skalar ist; und sie ist auch positiv oder negativ, gemäss einem Gesetz für die Anordnung dieser vier Punkte, welches schon aufgestellt worden ist.

(2.) Aber bei dieser Definition und bei dem skalar (wenn auch negativen) Charakter des Quadrats eines Vectors (282) haben wir allgemein, für irgend ein ebnes oder windschiefes Vierseit $ABCD$, die Formel:

$$\text{I.} \ldots e^2(ABCD) = AB.BC.CD.DA$$
$$= \text{dem stetigen Product der vier Seiten;}$$

in ihm ist der Coëfficient e^2 ein positiver Skalar, nämlich das Product der beiden negativen oder der beiden positiven Quadrate, wie folgt:

$$\text{II.} \ldots e^2 = BC^2.DA^2 = \overline{BC}^2.\overline{DA}^2 > 0.$$

(3.) Wenn daher $ABCD$ ein ebnes und eingeschriebenes Vierseit ist, so haben wir, nach 260, (8.), die Formel,

$$\text{III.} \ldots AB.BC.CD.DA$$
$$= \text{einem positiven oder negativen Skalar,}$$

je nachdem dieses Vierseit in einem Kreise ein sich kreuzendes oder ein sich nicht kreuzendes ist.

(4.) Das Product $\alpha\beta\gamma$ irgend dreier complanaren Vectoren ist ein Vector, denn sein skalar Theil $S\alpha\beta\gamma$ verschwindet, nach 294, (3.) und (4.); und wenn die Factoren drei aufeinanderfolgende Seiten AB, BC, CD eines in dieser Weise in einem Kreise eingeschriebenen Vierseits sind, so hat ihr Product entweder die Richtung der vierten folgenden Seite, DA, oder die zu ihr entgegengesetzte Richtung, oder in Zeichen,

$$\text{IV.} \ldots AB.BC.CD : DA > \text{ oder } < 0,$$

je nachdem das Vierseit $ABCD$ ein solches ist, welches sich kreuzt, oder ein solches, welches sich nicht kreuzt.

(5.) Denkt man sich den vierten Punkt D, stetig und ins

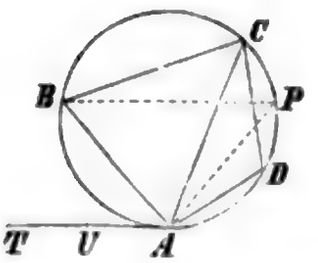
Digitized by Google

Unendliche, dem ersten Punkt A genähert, so finden wir, dass das Product der drei aufeinanderfolgenden Seiten irgend eines ebnen Dreiecks, ABC, durch eine Gleichung von der Form:

$$\text{V.}\ldots AB.BC.CA = AT,$$

gegeben ist; AT ist eine Linie (vergl. Fig. 63), welche den umschriebenen Kreis berührt, oder (vollständiger), welche das Segment ABC dieses Kreises im Punkte A berührt; oder welches die Anfangsrichtung der Bewegung, auf dem Kreisumfang von A über B nach C, darstellt: während die Länge der tangentialen Product-Linie, AT, gleich dem Product der Längen der drei Seiten desselben eingeschriebenen Dreiecks ABC ist, oder es darstellt, mit dem üblichen Bezug auf eine Längeneinheit.

Fig. 63.

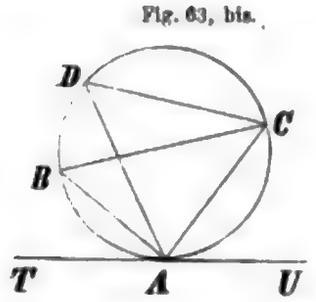


(6.) Umgekehrt, wenn angenommen wird, dass dieser Satz in Betreff des Productes der Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks anderweitig bewiesen worden ist, und wenn man desselben eingedenk ist, dann können wir, da er in derselben Weise die Gleichung,

$$\text{VI.}\ldots AC.CD.DA = AU,$$

ergiebt, wenn D irgend ein vierter, mit A, B, C, concircularer, Punkt ist, während AU, wie in den nebenstehenden Figuren 63, eine Tangente an das neue Segment ACD ist, den Satz (3.), in Betreff des Products der Seiten eines eingeschriebenen Vierseits, leicht wiederentdecken; und wir können daher zu dem entsprechenden Satze [260, (8.)] zurückkehren, welcher die anharmonische Function irgend einer solchen Figur $ABCD$ betrifft: denn wir werden somit, nach V. und VI., die Gleichung,

Fig. 63, bis.

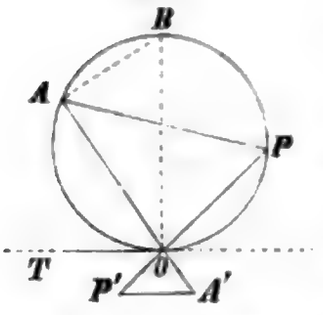


$$\text{VII.}\ldots AB.BC.CD.DA = (AT.AU):(CA.AC),$$

erhalten, in welcher der Divisor $CA.AC$ oder $N.AC$ oder $\overline{AC}^2$, stets positiv [282, (1.)] ist, der Dividend $AT.AU$ dagegen in

dem Falle, wenn das Vierseit ein sich nicht kreuzendes (Fig. 63) ist, negativ [281, (9.)] ist, und im Gegensatz dazu positiv in dem anderen Falle ist, wenn es ein sich kreuzendes (Fig. 63, bis) ist.

Fig. 64.



(7.) Wenn P irgend ein Punkt auf dem Kreise ist, welcher durch einen gegebnen Punkt A geht, und der in einem gegebenen Anfangspunkt O eine gegebne Linie $OT = \tau$ berührt, wie es in Fig. 64 dargestellt ist, so haben wir nach (5.) eine Gleichung von der Form,

$$\text{VIII.} \ldots OA \,.\, AP \,.\, PO = x \,.\, OT,$$

in der x ein gewisser skalar Coëfficient ist, welcher sich mit der Lage von P ändert. Setzt man daher $OA = \alpha$, und $OP = \varrho$, wie gewöhnlich, so erhalten wir

$$\text{IX.} \ldots \alpha(\varrho - \alpha)\varrho = -x\tau,$$

oder

$$\text{IX}'\ldots \varrho^{-1} - \alpha^{-1} = x\tau : \alpha^2\varrho^2,$$

oder

$$\text{IX}''\ldots V\tau\varrho^{-1} = V\tau\alpha^{-1};$$

und irgend eine von diesen Gleichungen kann als eine Form der Gleichung des Kreises angesehn werden, welcher durch die gegebenen Bedingungen bestimmt wird.

(8.) Geometrisch drückt die letzte Formel IX″. aus, dass die Linie $\varrho^{-1} - \alpha^{-1}$, oder $R\varrho - R\alpha$, oder $A'P'$ (siehe wieder Fig. 64), wenn $OA' = \alpha^{-1} = R\alpha = R \,.\, OA$, und $OP' = \varrho^{-1} = R \,.\, OP$ ist, parallel zur gegebenen Tangente τ an O ist; und das stimmt mit Fig. 58, und mit Art. 260 überein.

(9.) Wenn B der dem O auf dem Kreise gegenüberliegende Punkt ist, dann ist der Durchmesser OB, oder β, da er $\perp \tau$ ist, so dass $\tau\beta^{-1}$ ein Vector ist, durch die Formel,

$$\text{X.} \ldots \tau\beta^{-1} = V\tau\alpha^{-1},$$

oder

$$\text{X}'\ldots \beta = -\tau : V\tau\alpha^{-1},$$

gegeben; in ihr kann die Tangente τ, wie es sein sollte, mit irgend einem Skalar multiplicirt werden, ohne dass dadurch der Werth von β geändert wird.

Digitized by Google

(10.) Als eine weitere Verificirung ergiebt die letzte Formel,

$$\text{XI.}\ldots \overline{OB} = T\beta = T\alpha : TVU\tau\alpha^{-1}$$
$$= \overline{OA} : \sin AOT.$$

(11.) Wenn sich ein Vierseit $OABC$ in einen Kreis nicht einschreiben lässt, so können wir stets, mag es eben oder windschief sein, zwei Kreise, OAB und OBC, um die beiden Dreiecke beschreiben (wie in Fig. 65), welche dadurch entstehn, dass man die Diagonale OB zieht; und dann können wir, im Sinne von (6.), zwei Tangenten OT, OU, an die beiden Segmente OAB, OBC, ziehn, so dass sie die beiden ternären Producte,

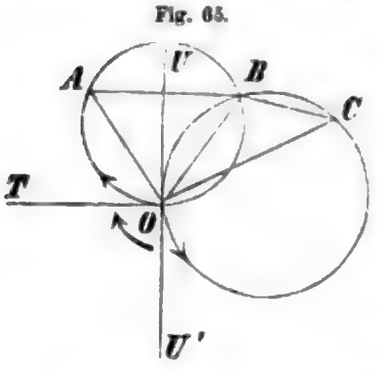
$$OA.AB.BO, \quad \text{und} \quad OB.BC.CO,$$

darstellen; und danach erhalten wir das quaternäre Product,

$$\text{XII.}\ldots OA.AB.BC.CO = OT.OU : OB^2;$$

wo der Divisor, $\overline{OB}^2$, oder $BO.OB$, oder $N.OB$, ein positiver Skalar ist, der Dividend $OT.OU$ aber, und daher auch der Quotient im zweiten Gliede, oder das Product im ersten Gliede, ein Quaternion ist.

Fig. 65.



(12.) Die Achse dieses Quaternions ist senkrecht zur Ebne TOU der beiden Tangenten; und daher zur Ebne des Vierseits $OABC$ selbst, wenn es eine ebne Figur ist; wenn es aber windschief ist, so ist die Achse senkrecht zur umschriebenen Kugel im Punkte O: und sie ist auch in allen Fällen von der Art, dass die Drehung um sie, von OT nach OU, positiv ist.

(13.) Der Winkel desselben Quaternions ist das Supplement des Winkels TOU zwischen den beiden, vorher erwähnten Tangenten; er ist daher gleich dem Winkel UOT, wenn OU das neue Segment OCB berührt, oder von O aus (siehe wieder Fig. 65) sich in einer neuen und entgegengesetzten Richtung erstreckt; er kann daher der Winkel zwischen den beiden Bogen, OAB und OCB, genannt werden, auf denen sich ein Punkt entlang bewegen müsste, um von O aus, auf den beiden

Kreisumfängen, bezüglich durch die beiden anderen Ecken, A und C, zur gegenüberliegenden Ecke B des Vierseits $OABC$ zu gelangen: oder der Winkel zwischen den Bogen OCB, OAB.

(14.) Diese Resultate, in Betreff der Achse und des Winkels des Products der vier aufeinanderfolgenden Seiten irgend eines Vierseits $OABC$, oder $ABCD$, lassen sich ohne irgend welche Aenderung auf den anharmonischen Quaternion [259, (9.)] desselben Vierseits anwenden; und obwohl für den Fall eines Vierseits in einem Kreise die Achse unbestimmt wird, weil das quaternäre Product und die anharmonische Function zusammen in Skalare degeneriren, oder weil man sich die Figur dann in unendlich viele Kugeln eingeschrieben denken kann, so kann doch der Winkel wieder nach derselben Regel bestimmt werden, wie in dem allgemeinen Falle: dieser Winkel ist $= \pi$, für das eingeschriebene und sich nicht kreuzende Vierseit (Fig. 63); dagegen $= 0$, für das eingeschriebene und sich kreuzende (Fig. 63, bis).

(15.) Beim windschiefen Vierseit $OABC$, das man sich stets in eine bestimmte Kugel eingeschrieben denken kann, können wir, nach (13.), sagen, das der Winkel des quaternion Productes, $\angle(OA.AB.BC.CO)$, dem Winkel des sichelförmigen Auschnitts gleich ist, der (im Allgemeinen) durch die beiden Bogen kleiner Kreise OAB, OCB begrenzt wird; und die Construction für den gleichen Winkel der Anharmonischen,

$$\angle(OABC), \quad \text{oder} \quad \angle(OA:AB.BC:CO),$$

ist dieselbe.

(16.) Es ist augenscheinlich, dass der allgemeine Grundsatz 223, (10.), dass es zulässig ist, quaternion Factoren unter dem Zeichen S cyklisch zu permutiren, für den Fall statt haben muss, wenn diese Quaternionen in Vectoren degeneriren (294); und es ist in noch höherem Grade ersichtlich, dass jede Permutation der Factoren unter dem Zeichen T erlaubt ist: und desshalb ist cyklische Permutation wieder unter dem weiteren Zeichen SU erlaubt; und folglich auch (vergl. 196, XVI.) unter dem Zeichen $\angle$.

(17.) Daher haben wir allgemein, für irgend vier Vectoren, die drei Gleichungen,

Digitized by Google

$$\text{XIII.}\ldots\ S\alpha\beta\gamma\delta = S\beta\gamma\delta\alpha;$$
$$\text{XIV.}\ldots\ SU\alpha\beta\gamma\delta = SU\beta\gamma\delta\alpha;$$
$$\text{XV.}\ldots\ \angle\,\alpha\beta\gamma\delta = \angle\,\beta\gamma\delta\alpha;$$

und im Besonderen haben wir, für die aufeinanderfolgenden Seiten irgend eines ebnen oder windschiefen Vierseits $ABCD$, die vier gleichen Winkel,

$$\text{XVI.}\ldots\ \angle\,(AB.BC.CD.DA) = \angle\,(BC.CD.DA.AB) = \text{u. s. w.};$$

und die entsprechende Gleichheit der Winkel der vier Anharmonischen,

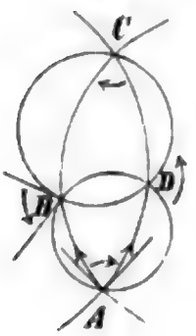
$$\text{XVII.}\ldots\ \angle\,(ABCD) = \angle\,(BCDA) = \angle\,(CDAB) = \angle\,(DABC);$$

oder derjenigen der vier reciproken Anharmonischen (259, XVII.),

$$\text{XVII}'\ldots\ \angle\,(ADCB) = \angle\,(BADC) = \angle\,(CBAD) = \angle\,(DCBA).$$

(18.) Wenn wir nun diese letzten Gleichungen, nach (13.) und (15.), deuten, so kommen wir von ihnen aus zu folgendem Satze für die Ebne, oder für den Raum: —

Fig. 66.



Es seien $ABCD$ irgend vier Punkte, welche durch vier Kreise verbunden seien, von denen jeder durch drei von diesen Punkten geht; dann ist nicht nur der Winkel bei A, zwischen den Bogen ABC, ADC, gleich dem Winkel bei C, zwischen CDA und CBA, sondern er ist auch dem Winkel bei B gleich (vergl. Fig. 66), zwischen den beiden anderen Bogen BCD und BAD, und dem Winkel bei D, zwischen den Bogen DAB, DCB.

(19.) Es sei ferner $ABCDE$ irgend ein Fünfeck, das in eine Kugel eingeschrieben ist; und man denke sich die beiden Diagonalen AC, AD gezogen. Dann haben wir drei Gleichungen, von den Formen,

$$\text{XVIII.}\ldots\ AB.BC.CA = AT;$$
$$AC.CD.DA = AU;$$
$$AD.DE.EA = AV;$$

hier sind AT, AU, AV drei Tangenten an die Kugel in A, so dass ihr Product eine vierte Tangente an diesen Punkt ist. Dagegen ergeben die Gleichungen XVIII.,

XIX. . . $AB.BC.CD.DE.EA = (AT.AU.AV) : (\overline{AC}^2 . \overline{AD}^2)$
$= AW$
= einem neuen Vector, der die Kugel in A berührt.

Wir haben daher den Satz, der mehrere andere in sich umschliesst: —

„Das Product der fünf aufeinanderfolgenden Seiten irgend eines (im Allgemeinen windschiefen) Fünfecks, welches in eine Kugel eingeschrieben ist, ist gleich einem tangentialen Vector, der von dem Punkte aus gezogen ist, in dem das Fünfeck beginnt und endet."

(20.) Es sei nun P ein Punkt auf der Kugel, die durch O, und durch drei gegebne Punkte A, B, C geht; wir haben dann die Gleichung,

$$\text{XX. . . } 0 = S(OA.AB.BC.CP.PO)$$
$$= S\alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)(\varrho-\gamma)(-\varrho)$$
$$= \alpha^2 S\beta\gamma\varrho + \beta^2 S\gamma\alpha\varrho + \gamma^2 S\alpha\beta\varrho - \varrho^2 S\alpha\beta\gamma.$$

(21.) Vergleichen wir dies mit 294, XIV., so sehn wir, dass die Bedingung dafür, dass die vier coinitialen Vectoren α, β, γ, ϱ so auf einer Kugeloberfläche endigen, welche durch ihren gemeinsamen Anfangspunkt O geht, in folgender Weise ausgedrückt werden kann:

$$\text{XXI. . . wenn } \varrho = x\alpha + y\beta + z\gamma,$$

dann ist

$$\varrho^2 = x\alpha^2 + y\beta^2 + z\gamma^2.$$

(22.) Wenn wir daher den variablen Punkt P in die Punkte A', B', C', die auf den drei gegebenen Sehnen OA, OB, OC liegen, durch drei Ebnen durch den Punkt P, welche bezüglich zu den Ebnen BOC, COA, AOB parallel sind, projiciren (vergl. 62), so erhalten wir die Gleichung:

$$\text{XXII. . . } OP^2 = OA.OA' + OB.OB' + OC.OC'.$$

(23.) Dass die Gleichung XX. in der That eine Kugel als Ort des Punktes P darstellt, erhellt allein aus ihrer Form

Digitized by Google

[vergl. 282, (10.)]; und dass diese Kugel durch die vier gegebenen Punkte, O, A, B, C geht, kann dadurch bewiesen werden, dass man beachtet, dass die Gleichung befriedigt wird, wenn man ϱ mit irgend einem der vier Vectoren, 0, α, β, γ vertauscht.

(24.) Führt man einen Hülfsvector, OD oder δ, ein, der durch die Gleichung bestimmt wird,

$$\text{XXIII.} \ldots \delta S\alpha\beta\gamma = \alpha^2 V\beta\gamma + \beta^2 V\gamma\alpha + \gamma^2 V\alpha\beta,$$

oder durch das System der drei skalar Gleichungen [vergl. 294, (25.)],

$$\text{XXIV.} \ldots \alpha^2 = S\delta\alpha, \quad \beta^2 = S\delta\beta, \quad \gamma^2 = S\delta\gamma,$$

oder

$$\text{XXIV}' \ldots S\delta\alpha^{-1} = S\delta\beta^{-1} = S\delta\gamma^{-1} = 1,$$

so wird die Gleichung XX. der Kugel einfach,

$$\text{XXV.} \ldots \varrho^2 = S\delta\varrho,$$

oder

$$\text{XXV}' \ldots S\delta\varrho^{-1} = 1;$$

so dass D der Punkt auf der Kugel ist, welcher dem O gegenüberliegt, und δ ist ein Durchmesser [vergl. 282, IX'.; und 196, (6.)].

(25.) Die Formel XXIII., welche diesen Durchmesser bestimmt, kann auf die folgende andere Weise geschrieben werden:

$$\text{XXVI.} \ldots \delta S\alpha\beta\gamma = V\alpha(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)\gamma;$$

oder

$$\text{XXVI}' \ldots 6 . OABC . OD = -V(OA . AB . BC . CO);$$

wo das Symbol $OABC$, als ein Coëfficient betrachtet, wie in 294, XLIV. zu deuten ist; nämlich, dass es das Volumen der Pyramide $OABC$ bedeutet, welche hier eine eingeschriebene ist.

(26.) Dies Resultat der Rechnung stimmt, so weit es die Richtung der Achse des Quaternions $OA . AB . BC . CO$ betrifft, mit dem Satze (12.), in Betreff des Productes der aufeinanderfolgenden Seiten eines windschiefen Vierseits, $OABC$, überein, und kann dazu dienen, ihn zu bestätigen; es schliesst die Regel über den Sinn der Drehung ein, welche diese Achse von der ihr entgegengesetzten unterscheidet.

(27.) Die Formel XXIII. für den Durchmesser δ kann auch in folgender Weise geschrieben werden:

$$\text{XXVII.}\ldots \delta . S\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1} = V(\beta^{-1}\gamma^{-1} + \gamma^{-1}\alpha^{-1} + \alpha^{-1}\beta^{-1}) = V(\beta^{-1} - \alpha^{-1})\,(\gamma^{-1} - \alpha^{-1});$$

und die Gleichung XX. der Kugel kann in folgende Form transformirt werden:

$$\text{XXVIII.}\ldots 0 = S(\beta^{-1} - \alpha^{-1})\,(\gamma^{-1} - \alpha^{-1})\,(\varrho^{-1} - \alpha^{-1});$$

sie drückt [nach 294, (34.), vergl. 260, (10.)] aus, dass die vier reciproken Vectoren,

$$\text{XXIX.}\ldots \begin{aligned} OA' &= \alpha' = \alpha^{-1}, \\ OB' &= \beta' = \beta^{-1}, \\ OC' &= \gamma' = \gamma^{-1}, \\ OP' &= \varrho' = \varrho^{-1}, \end{aligned}$$

termino-complanar (64.) sind; die Ebne $A'B'C'P'$, in der sie sämmtlich endigen, ist zur Tangentialebne an die Kugel in O parallel: denn das Loth, welches von O auf diese Ebne gefällt wird, ist

$$\text{XXX.}\ldots \delta' = \delta^{-1},$$

wie aus den drei skalar Gleichungen,

$$\text{XXXI.}\ldots S\alpha'\delta = S\beta'\delta = S\gamma'\delta = 1,$$

erhellt.

(28.) Im Allgemeinen ist, wenn D der Fusspunkt des Lothes von O auf die Ebne ABC ist,

$$\text{XXXII.}\ldots \delta = S\alpha\beta\gamma : V(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta);$$

denn dieser Ausdruck genügt den drei Gleichungen,

$$\text{XXXIII.}\ldots S\alpha\delta^{-1} = S\beta\delta^{-1} = S\gamma\delta^{-1} = 1,$$

und kann aus ihnen abgeleitet werden.

Als eine Verificirung beweist die Formel, dass die Länge $T\delta$ dieses Lothes, oder der Höhe, OD, gleich dem sechsfachen Volumen der Pyramide $OABC$ ist, dividirt durch die doppelte Fläche der dreieckigen Basis ABC. [Vergleiche 281, (4.), und 294, (3.), (33.).]

(29.) Die Gleichung XX. der Kugel $OABC$ hätte durch die Elimination des Vectors δ, aus den vier skalar Gleichungen XXIV. und XXV., in der Weise, wie sie in 291, (27.) ausgeführt wurde, erhalten werden können.

(30.) Und eine andere Form der Gleichung derselben Kugel, welche der Entwicklung von XXVIII. entspricht, kann durch die analoge Elimination desselben Vectors δ aus den vier weiteren Gleichungen, XXIV′. und XXV′., erhalten werden.

(31.) Das Product irgend einer graden Anzahl complanarer Vectoren ist im Allgemeinen ein Quaternion, dessen Achse senkrecht zu ihrer Ebne ist; aber das Product der aufeinanderfolgenden Seiten eines Sechsecks $ABCDEF$, oder irgend einer anderen in einem Kreise eingeschriebenen Figur mit einer graden Anzahl von Seiten, ist ein Skalar; denn wenn man Diagonalen AC, AD, AE vom ersten (oder letzten) Punkte A des Polygons aus zieht, so findet man, wie in (6.), dass es sich nur durch einen skalar Coëfficienten, oder Divisor, vom Product einer graden Anzahl Tangenten an diesen ersten Punkt unterscheidet.

(32.) Andrerseits ist das Product irgend einer ungraden Anzahl complanarer Vectoren stets eine Linie in derselben Ebne; und im Besonderen [vergl. (19.)] ist das Product der aufeinanderfolgenden Seiten eines Fünfecks, oder Siebenecks, u. s. w., die einem Kreise eingeschrieben sind, gleich einem tangentialen Vector, der vom ersten Punkt des eingeschriebenen Polygons mit einer ungraden Anzahl Seiten aus gezogen ist: denn er unterscheidet sich nur durch einen skalar Coëfficienten vom Product einer ungraden Anzahl solcher Tangenten.

(33.) Das Product irgend einer Anzahl von Linien im Raume ist im Allgemeinen ein Quaternion (289); und wenn sie die aufeinanderfolgenden Seiten eines Sechsecks sind, oder eines anderen Polygons mit einer graden Anzahl Seiten, welches einer Kugel eingeschrieben ist, so ist die Achse dieses Quaternions [vergl. (12.)] eine Normale zur Kugel im Anfangs- (oder End-) Punkt des Polygons.

(34.) Dagegen ist das Product der aufeinanderfolgenden Seiten eines Siebenecks, oder eines anderen Polygons mit einer ungraden Anzahl Seiten, in einer Kugel gleich [vergl. (19.)] einem Vector, der die Kugel im Anfangspunkt oder im Endpunkt berührt; denn er steht in einem skalar Verhältniss zum

Product einer ungraden Anzahl von Vectoren, die in der Tangentialebne an diesen Punkt liegen.

(35.) Die Gleichung XX., oder ihre Transformation XXVIII., kann die Bedingung oder die Gleichung für Homosphericität [vergl. 260, (10.)] der fünf Punkte O, A, B, C, P genannt werden; und die analoge Gleichung für die fünf Punkte $ABCDE$, mit den Vectoren $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ von irgend einem beliebigen Anfangspunkte O aus, kann in folgender Weise geschrieben werden:

$$\text{XXXIV.}\ldots 0 = S(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\varepsilon)(\varepsilon-\alpha);$$

oder auch,

$$\text{XXXV.}\ldots 0 = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2 + e\varepsilon^2;$$

das zweite Glied der letzten Formel ist sechsmal genommen gleich dem zweiten Gliede der vorhergehenden, wenn

$$\text{XXXVI.}\ldots a = BCDE, \quad b = CDEA, \quad c = DEAB, \quad d = EABC, \quad e = ABCD,$$

oder vollständiger, wenn

$$\text{XXXVII.}\ldots 6a = S(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\varepsilon-\beta) = S(\gamma\delta\varepsilon - \delta\varepsilon\beta + \varepsilon\beta\gamma - \beta\gamma\delta), \text{ u. s. w.;}$$

so dass wir, nach 294, XLVIII. und XLVII., auch die Gleichung haben (vergl. 65, 70.),

$$\text{XXXVIII.}\ldots 0 = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta + e\varepsilon,$$

mit folgender Beziehung zwischen den Coëfficienten,

$$\text{XXXIX.}\ldots 0 = a + b + c + d + e;$$

der Anfangspunkt der Vectoren kann hierbei (wie vorher) ein beliebiger sein.

(36.) Die Gleichung oder Bedingung XXXV. kann als das Resultat einer Elimination [294, (27.)] eines Vectors $\varkappa$, und eines Skalars g, aus fünf skalar Gleichungen von der Form 282, (10.), erhalten werden, nämlich aus den fünf folgenden Gleichungen,

$$\text{XL.}\ldots \begin{aligned} \alpha^2 - 2S\varkappa\alpha + g &= 0,\\ \beta^2 - 2S\varkappa\beta + g &= 0,\\ &\vdots\\ \varepsilon^2 - 2S\varkappa\varepsilon + g &= 0; \end{aligned}$$

Digitized by Google

$\varkappa$ ist der Vector des Mittelpunkts K der Kugel $ABCD$, deren Gleichung,

$$\text{XLI.} \ldots \rho^2 - 2S\varkappa\rho + g = 0,$$

geschrieben werden kann, wo g eine gewisse skalar Constante ist; und auf ihr liegt, nach der angegebenen Bedingung, der fünfte Punkt E.

(37.) Wenn wir diesen fünften Punkt, oder seinen Vector ε, als willkürlich behandeln, so finden wir die Bedingung oder Gleichung für die Concircularität (3.) der vier Punkte A, B, C, D wieder; oder wir finden die Formel,

$$\text{XLII.} \ldots 0 = V(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \delta)(\delta - \alpha).$$

(38.) Die Gleichung des Kreises ABC, und die Gleichung der Kugel $ABCD$, kann im Allgemeinen in folgender Weise geschrieben werden:

$$\text{XLIII.} \ldots 0 = V(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \varrho)(\varrho - \alpha);$$
$$\text{XLIV.} \ldots 0 = S(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \delta)(\delta - \varrho)(\varrho - \alpha);$$

ϱ ist, wie üblich, der Vector eines variablen Punktes P des einen oder anderen Ortes.

(39.) Die Gleichungen der Tangente an den Kreis ABC, und der Tangentialebne an die Kugel $ABCD$, im Punkte A sind bezüglich,

$$\text{XLV.} \ldots 0 = V(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)(\varrho - \alpha),$$

und

$$\text{XLVI.} \ldots 0 = S(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \delta)(\delta - \alpha)(\varrho - \alpha).$$

(40.) Je nachdem wir nun die beiden Gleichungen XLIII. und XLV., oder XLIV. und XLVI. combiniren, finden wir in jedem Falle die Gleichung,

$$\text{XLVII.} \ldots (\varrho - \alpha)^2 = 0,$$

und sie ergiebt

$$\varrho = \alpha,$$

oder

$$P = A \quad (20.);$$

hierbei ist angenommen, dass die drei Punkte A, B, C nicht collinear, und dass die vier Punkte A, B, C, D nicht complanar sind.

(41.) Wenn der Mittelpunkt der Kugel $ABCD$ als Anfangspunkt O genommen wird, so dass

$$\text{XLVIII.}\ldots \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \delta^2 = -r^2,$$

oder

$$\text{XLIX.}\ldots T\alpha = T\beta = T\gamma = T\delta = r,$$

wo der positive Skalar r den Radius bedeutet, so erhalten wir nach gewissen Reductionen die Transformation,

$$\text{L.}\ldots V(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\delta)(\delta-\alpha) = 2\alpha S(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha).$$

(42.) Wir haben daher allgemein, wenn K, wie in (36.), der Mittelpunkt der Kugel ist, die Gleichung (vergl. XXVI.),

$$\text{LI.}\ldots V(AB.BC.CD.DA) = 12\,KA.ABCD.$$

(43.) Wir können daher den Satz aussprechen:

„Der vector Theil des Products der vier aufeinanderfolgenden Seiten eines windschiefen, einer Kugel eingeschriebenen Vierseits ist gleich dem Durchmesser, der zum Anfangspunkt des Polygons gezogen ist, multiplicirt mit dem sechsfachen Volumen der Pyramide, welche seine vier Punkte bestimmen."

(44.) Zur Ausführung der Reductionen (41.) sind die folgenden allgemeinen Transformationsformeln benutzt worden, welche bei anderen Gelegenheiten von Nutzen sein können:

$$\text{LII.}\ldots \alpha q + q\alpha = 2(\alpha Sq + Sq\alpha);$$

$$\text{LII'.}\ldots \alpha q\alpha = \alpha^2 Kq + 2\alpha Sq\alpha;$$

hier kann α irgend ein Vector, und q irgend ein Quaternion sein.

Siebenter Abschnitt.

Ueber die vierte Proportionale zu drei diplanaren Vectoren.

297. Wenn irgend vier Quaternionen, q, q', q'', q''', der Gleichung für Quotienten,

$$\text{I.}\ldots q''' : q'' = q' : q,$$

genügen, oder der äquivalenten Formel,

$$\text{II.}\ldots q''' = (q' : q).q'' = q' q^{-1} q'',$$

so können wir, im Allgemeinen, sagen, dass sie eine Proportion bilden; und dass der vierte, nämlich q''', die vierte Proportionale

Digitized by Google

zum ersten, zweiten und dritten Quaternion ist, nämlich zu q, q', und q'', wenn sie in dieser gegebenen Aufeinanderfolge genommen werden. Diese Definition schliesst (nach 288) diejenige ein, welche in 226 für die vierte Proportionale zu drei complanaren Vectoren α, β, γ gegeben wurde, nämlich für den vierten Vector in ihrer Ebne, $\delta = \beta\alpha^{-1}\gamma$, den wir schon in Betracht gezogen haben; und sie setzt uns in den Stand, das Symbol

$$\text{III.}\ldots\ \beta\alpha^{-1}\gamma, \qquad \text{wenn } \gamma \text{ nicht} \parallel \alpha, \beta,$$

zu deuten (vergl. 289), als Bezeichnung freilich nicht eines Vectors, in diesem neuen Falle, aber wenigstens eines Quaternions, der (in dem gegenwärtigen allgemeinen Sinne) die vierte Proportionale zu den drei diplanaren Vectoren α, β, γ genannt werden kann. Solche vierten Proportionalen besitzen gewisse interessante Eigenschaften, besonders in Hinsicht auf ihre vector Theile, die in Kürze einer Betrachtung zu unterziehn von Nutzen ist, und wir wollen sie dadurch erläutern, dass wir ihren Zusammenhang mit der sphärischen Trigonometrie zeigen, und allgemein mit der sphärischen Geometrie.

(1.) Es seien α, β, γ [wie in 208, (1.), u. s. w.] die Vectoren der Ecken eines Dreiecks ABC auf der Einheitskugel, dessen Seiten a, b, c sind; und wir wollen schreiben,

$$\text{IV.}\ldots\ \begin{cases} l = \cos a = S\gamma\beta^{-1} = -S\beta\gamma, \\ m = \cos b = S\alpha\gamma^{-1} = -S\gamma\alpha, \\ n = \cos c = S\beta\alpha^{-1} = -S\alpha\beta; \end{cases}$$

hierbei ist gemeint, dass

$$\text{V.}\ldots\ \alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1,$$

sei, oder dass

$$\text{VI.}\ldots\ T\alpha = T\beta = T\gamma = 1;$$

es ist auch zuerst angenommen, um die Vorstellungen fixiren zu können, dass jeder der drei Cosinus, l, m, n, grösser als Null ist, oder dass jede Seite des Dreiecks ABC kleiner als ein Quadrant ist.

(2.) Führt man drei neue Vectoren, δ, ε, ζ, ein, welche durch die Gleichungen definirt werden,

$$\text{VII.}\ldots\ \begin{cases} \delta = V\beta\alpha^{-1}\gamma = V\gamma\alpha^{-1}\beta = m\beta + n\gamma - l\alpha, \\ \varepsilon = V\gamma\beta^{-1}\alpha = V\alpha\beta^{-1}\gamma = n\gamma + l\alpha - m\beta, \\ \zeta = V\alpha\gamma^{-1}\beta = V\beta\gamma^{-1}\alpha = l\alpha + m\beta - n\gamma, \end{cases}$$

so finden wir, dass diese drei abgeleiteten Vectoren sämmtlich ein und dieselbe Länge haben, nennen wir sie r, denn sie haben eine gemeinsame Norm; es ist nämlich,

VIII. . . $N\delta = N\varepsilon = N\zeta = l^2 + m^2 + n^2 - 2lmn = r^2$;

so dass

IX. . . $T\delta = T\varepsilon = T\zeta = r = \sqrt{(l^2 + m^2 + n^2 - 2lmn)}$.

(3.) Diese gemeinsame Länge, r, ist kleiner als die Einheit; denn wenn wir schreiben,

$$\text{X. . . } S\alpha\beta\gamma = S\beta\alpha^{-1}\gamma = e,$$

so erhalten wir die Beziehung,

$$\text{XI. . . } e^2 + r^2 = N\beta\alpha^{-1}\gamma = 1;$$

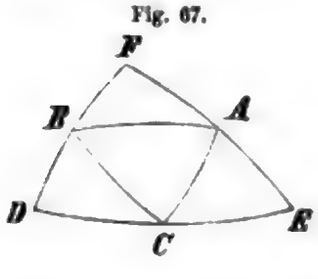
und der Skalar e ist von null verschieden, denn die Vectoren α, β, γ sind diplanar.

(4.) Dividirt man die drei Linien δ, ε, ζ durch ihre Länge, r, so verwandelt man sie in ihre Versoren (155, 156); und so erhält man ein neues Dreieck, DEF, auf der Einheitskugel, dessen Ecken durch die drei neuen Einheitsvectoren,

$$\text{XII. . . } OD = U\delta = r^{-1}\delta,$$
$$OE = U\varepsilon = r^{-1}\varepsilon,$$
$$OF = U\zeta = r^{-1}\zeta,$$

bestimmt werden.

Fig. 67.



(5.) Die dem D, E, F in diesem neuen oder abgeleiteten Dreieck gegenüberliegenden Seiten werden, wie in Fig. 67, durch die Ecken A, B, C des vorigen oder gegebenen Dreiecks halbirt; denn wir haben die drei Gleichungen,

$$\text{XIII. . . } \varepsilon + \zeta = 2l\alpha,$$
$$\zeta + \delta = 2m\beta,$$
$$\delta + \varepsilon = 2n\gamma.$$

(6.) Bezeichnet man die Hälften der neuen Seiten mit a', b', c' (so dass der Bogen $EF = 2a'$, u. s. w.), so zeigen die Gleichungen XIII., nach IV. und IX., auch, dass

Digitized by Google

$$\text{XIV.}\ldots \begin{aligned} \cos a &= r\cos a', \\ \cos b &= r\cos b', \\ \cos c &= r\cos c'; \end{aligned}$$

die Cosinus der halben Seiten des neuen (oder halbirten) Dreiecks, DEF, sind daher den Cosinus der Seiten des ersten (oder halbirenden) Dreiecks ABC proportional.

(7.) Die Gleichungen IV. ergeben, nach 279, (1.),

$$\text{XV.}\ldots \begin{aligned} 2l &= -(\beta\gamma + \gamma\beta), \\ 2m &= -(\gamma\alpha + \alpha\gamma), \\ 2n &= -(\alpha\beta + \beta\alpha); \end{aligned}$$

wir haben daher, nach VII., die drei folgenden Gleichungen zwischen Quaternionen,

$$\text{XVI.}\ldots \begin{aligned} \alpha\varepsilon &= \zeta\alpha, \\ \beta\zeta &= \delta\beta, \\ \gamma\delta &= \varepsilon\gamma; \end{aligned}$$

sie können auch in folgender Weise geschrieben werden,

$$\text{XVI}'\ldots \begin{aligned} \varepsilon\alpha &= \alpha\zeta, \\ \zeta\beta &= \beta\delta, \\ \delta\gamma &= \gamma\varepsilon, \end{aligned}$$

und sie drücken auf einem neuen Wege die Beziehungen (5.) für die Halbirung aus.

(8.) Wir erhalten daher die Gleichungen zwischen Vectoren,

$$\text{XVII.}\ldots \begin{aligned} \varepsilon &= \alpha\zeta\alpha^{-1}, \\ \zeta &= \beta\delta\beta^{-1}, \\ \delta &= \gamma\varepsilon\gamma^{-1}; \end{aligned}$$

oder

$$\text{XVII}'\ldots \begin{aligned} \zeta &= \alpha\varepsilon\alpha^{-1}, \\ \delta &= \beta\zeta\beta^{-1}, \\ \varepsilon &= \gamma\delta\gamma^{-1}. \end{aligned}$$

(9.) Daher ist auch, nach V., oder weil α, β, γ Einheitsvectoren sind,

$$\text{XVIII.}\ldots \begin{aligned} \varepsilon &= -\alpha\zeta\alpha, \\ \zeta &= -\beta\delta\beta, \\ \delta &= -\gamma\varepsilon\gamma; \end{aligned}$$

oder

Digitized by Google

$$\text{XVIII}'\ldots \zeta = -\alpha\varepsilon\alpha,$$
$$\delta = -\beta\zeta\beta,$$
$$\varepsilon = -\gamma\delta\gamma.$$

(10.) Im Allgemeinen drückt die erste Gleichung XVII., wie auch die Länge des Vectors α sein mag, aus, dass die Linie ε (vergl. 138) das Spiegelbild der Linie ζ, in Bezug auf den Vector α, ist; denn sie kann auf die Form gebracht werden (vergl. 279),

$$\text{XIX}\ldots \zeta\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\varepsilon = K\varepsilon\alpha^{-1},$$

oder

$$\text{XIX}'\ldots \varepsilon\alpha^{-1} = K\zeta\alpha^{-1}.$$

(11.) Eine andere Art, zu derselben Deutung der Gleichung $\varepsilon = \alpha\zeta\alpha^{-1}$ zu gelangen, ist es, wenn man sich ζ in zwei Summandvectoren, ζ' und ζ'', zerlegt denkt, von denen der eine parallel und der andere senkrecht zu α ist, so dass also

$$\text{XX}\ldots \zeta = \zeta' + \zeta'',$$
$$\zeta' \parallel \alpha,$$
$$\zeta'' \perp \alpha;$$

denn dann erhalten wir, nach 281, (10.), die Transformationen,

$$\text{XXI}\ldots \varepsilon = \alpha\zeta'\alpha^{-1} + \alpha\zeta''\alpha^{-1} = \zeta'\alpha\alpha^{-1} - \zeta''\alpha\alpha^{-1}$$
$$= \zeta' - \zeta'';$$

der Theil von ζ, welcher dem α parallel ist, bleibt somit erhalten, dagegen wird der Theil senkrecht zu α durch die Operation $\alpha(\ )\alpha^{-1}$ umgekehrt.

(12.) Oder wir können von der Form $\varepsilon = \alpha\zeta\alpha^{-1}$ zur Form $\varepsilon\alpha = \alpha\zeta$ zurückkehren, das heisst, zu der ersten Gleichung XVI'.; und daher beweist diese Gleichung zwischen Quaternionen, wie durch die Ausführungen in (7.) unterstützt wird, dass wir, was auch immer die Länge von α sein mag, haben müssen,

$$\text{XXII}\ldots T\varepsilon = T\zeta,$$
$$\text{Ax.}^*\,\varepsilon\alpha = \text{Ax.}\,\alpha\zeta,$$
$$\angle\,\varepsilon\alpha = \angle\,\alpha\zeta;$$

---

* Es wurde in 291 bemerkt, dass das charakteristische Zeichen Ax. fortgelassen werden kann, weil es sich durch UV ersetzen lässt; doch wenn es angemessen scheint, wollen wir es künftig noch gelegentlich anwenden.

Digitized by Google

so dass die beiden Linien ε, ζ gleich lang sind, und die Drehung von ε nach α gleich derjenigen von α nach ζ ist; diese beiden Drehungen sind gleich gerichtet und liegen in ein und derselben Ebne.

(13.) Wir können auch die Gleichungen XVII., XVII′. in den Formen,

$$\text{XXIII.}\ldots\ \varepsilon = \alpha^{-1}\,\zeta\alpha, \quad \text{u. s. w.},$$
$$\text{XXIII}'\ldots\ \zeta = \alpha^{-1}\,\varepsilon\alpha, \quad \text{u. s. w.},$$

hinschreiben.

(14.) Setzt man diesen letzten Ausdruck für ζ in die zweite Gleichung XVII′. ein, so leitet man aus ihr die neue Gleichung ab,

$$\text{XXIV.}\ldots\ \delta = \beta\alpha^{-1}\,\varepsilon\alpha\beta^{-1};$$

oder

$$\text{XXIV}'\ldots\ \varepsilon = \alpha\beta^{-1}\,\delta\beta\alpha^{-1};$$

das heisst, kürzer,

$$\text{XXV.}\ldots\ \delta = q\varepsilon q^{-1},$$

und

$$\text{XXV}'\ldots\ \varepsilon = q^{-1}\,\delta q,$$

wenn

$$\text{XXVI.}\ldots\ q = \beta\alpha^{-1}.$$

(15.) Ein Ausdruck von folgender Form, nämlich einer mit einem Symbol, wie das folgende,

$$\text{XXVII.}\ldots\ q(\ )q^{-1},$$

als einem Operator, begegnete uns vorher in 179, (1.), und in 191, (5.); und wir sahn, dass er eine konische Drehung der Achse des Operand-Quaternions (dessen Symbol man sich innerhalb der Parenthesen geschrieben denken muss) um die Achse von q um einen Winkel $= 2\angle q$ anzeigt, ohne irgend welche Aenderung des Winkels, oder des Tensors, des Operanden. Ein Vector muss daher, nach irgend einer derartigen Operation, ein Vector bleiben, da er auch dann noch ein rechtwinkliger Quaternion (290) ist; oder [vergl. 223, (10.)] weil

$$\text{XXVIII.}\ldots\ Sq\varrho q^{-1} = Sq^{-1}q\varrho = S\varrho = 0.$$

(16.) Wenn wir uns daher zwei entgegengesetzte Punkte, P' und P, auf der Einheitskugel denken, welche durch die Bedingung bestimmt sind, dass sie bezüglich die positiven

Pole der beiden entgegengesetzten Bogen, AB und BA, sein sollen, so dass

$$\text{XXIX.} \ldots OP' = \text{Ax.}\,\beta\alpha^{-1} = \text{Ax.}\,q,$$

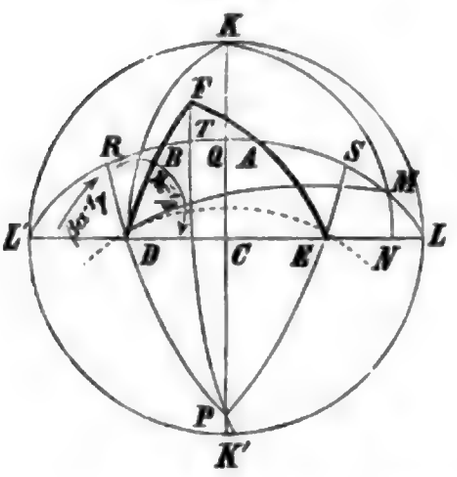
und

$$OP = P'O = \text{Ax.}\,\alpha\beta^{-1} = \text{Ax.}\,q^{-1},$$

so können wir aus XXIV. schliessen, dass die Linie OD aus der Linie OE durch eine konische Drehung um die Linie OP' als Achse abgeleitet werden kann, um einen Winkel, welcher gleich dem Doppelten des Winkels AOB ist, wenn O wieder der Mittelpunkt der Kugel ist.

(17.) Und ebenso können wir aus XXIV′. schliessen, dass sich die Linie OE aus OD ableiten lässt, durch eine an Grösse gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete konische Drehung um die Linie OP als neue positive Achse um einen Winkel, welcher zweimal so gross ist, als der Winkel BOA.

Fig. 68.



(18.) Um diese und andere damit in Verbindung stehende Resultate zu erläutern, habe ich die nebenstehende Figur 68 gezeichnet; in ihr stellt P, wie vorher, den positiven Pol des Bogens BA dar, und von ihm aus sind Bogen nach D, E, F gezogen, welche den grossen Kreis durch A und B in den Punkten R, S, T treffen. (Die anderen Buchstaben in dieser Figur sind, für den Augenblick, nicht erforderlich, aber ich werde ihre Bedeutung bald auseinandersetzen.)

(19.) Nach diesen Erklärungen sehn wir, erstens, dass die drei Bogenlothe, ES, FT, DR, welche von E, F, D auf den grossen Kreis durch A und B gefällt werden, gleich lang sind, denn die Bogen EF und FD werden in A und B halbirt (5.); und daher ist der Punkt P der innere Pol des kleinen Kreises DEF, wenn F der dem F diametral gegenüberliegende Punkt ist; eine konische Drehung um diesen Pol P, oder um die Achse OP, würde daher in der That den Punkt D, oder die

Digitized by Google

Linie OD, in die Lage E, oder OE, bringen, und das ist ein Theil des Satzes (17.).

(20.) Ferner wird die Grösse dieser konischen Drehung augenscheinlich durch den Bogen RS des grössten Kreises gemessen, dessen Pol P ist; aber die vorher erwähnten Halbirungen ergeben (vergl. 165) die beiden Bogengleichungen,

$$\text{XXX.} \ldots \frown RB = \frown BT,$$
$$\frown TA = \frown AS;$$

und danach ist

$$\text{XXXI.} \ldots \frown RS = 2 \frown BA,$$

und damit ist der andere Theil desselben Satzes (17.) bewiesen.

(21.) Der Punkt F kann das Reflexbild des Punktes D auf der Kugel in Beziehung auf den Punkt B genannt werden, welcher den Zwischenraum zwischen ihnen halbirt; und somit können wir sagen, dass zwei aufeinanderfolgende Reflexionen eines willkürlichen Punktes auf einer Kugel (wie hier diejenige von D nach F, und dann von F nach E) in Bezug auf zwei gegebene Punkte (B und A) eines gegebenen grössten Kreises zusammen einer konischen Drehung äquivalent sind, um den Pol (P) dieses grössten Kreises; oder gleichbedeutend mit der Beschreibung eines Bogens eines kleinen Kreises um diesen Pol, oder parallel zu jenem grössten Kreise. Und die Winkelgrösse (DPE) dieser Drehung ist die doppelte von derjenigen, welche durch den Bogen (BA) dargestellt wird, der die beiden gegebenen Punkte verbindet; oder sie ist das Doppelte des Winkels (BPA), welcher den gegebenen Bogen in demselben Pole (P) umspannt.

(22.) Es hat daher, wir wir sehn, keine Schwierigkeit, diesen Satz über die Drehung geometrisch zu beweisen; aber es ist bemerkenswerth, wie einfach ihn Quaternionen ausdrücken; nämlich durch die Formel,

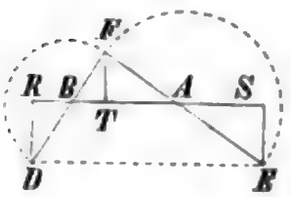
$$\text{XXXII.} \ldots \alpha . \beta^{-1} \rho \beta . \alpha^{-1} = \alpha \beta^{-1} . \rho . \beta \alpha^{-1},$$

in ihr können α, β, ρ irgend welche drei Vectoren bedeuten; und sie enthält, wie wir aus den Punkten ersehn, im Wesentlichen das associative Princip der Multiplication.

(23.) Anstatt uns vorzustellen, dass der Punkt D, oder die Linie OD, durch Reflexion, in Bezug auf den Punkt B oder die Linie OB, in die Lage F, oder OF, gelangt, und

danach in ähnlicher Weise von F nach E reflectirt wird, können wir uns vorstellen, dass sich ein Punkt auf einem kleinen Halbkreise, mit dem Pole B, von D nach F hin bewegt hat, wie es in Fig. 69 angedeutet ist, und dann auf einem anderen kleinen Halbkreise mit dem Pole A, von F nach E hin; und wir sehn, dass das Resultat, oder die Wirkung dieser beiden auf einander folgenden Bewegungen in Halbkreisen einer Bewegung auf einem Bogen DE eines dritten kleinen Kreises äquivalent ist, welcher parallel (wie vorher) zum grössten Kreise durch B und A ist, und dessen Projection RS auf den letzteren, wieder wie vorher, das Doppelte des gegebenen Bogens BA ist.

Fig. 69.



(24.) Und statt uns zu denken, dass sich ein Punkt D der Reihe nach in zwei Bogen auf einer Kugel entlang bewegt, oder statt uns zwei aufeinanderfolgende konische Drehungen eines Radius OD vorzustellen, Bewegungen, die wir so ansehn, als ob sie sich selbst in eine resultirende Drehung dieses Punktes, oder in eine Drehung dieses Radius zusammensetzen, können wir uns eine entsprechende Zusammensetzung zweier aufeinanderfolgenden Drehungen eines festen Körpers (oder eines starren Systems) um Achsen denken, welche durch einen Punkt O gehn, der im Raume (und in dem Körper) fest ist: und so erhalten wir einen Satz über eine solche Drehung, der einem leicht von selbst nach dem, was vorhergeht, in den Sinn kommt, und auf den wir vielleicht zurückkommen können.

(25.) Um aber einige weitere Folgerungen aus den Gleichungen VII., u. s. w., und aus der vorigen Figur 68, zu ziehn, besonders in Betreff der Construction der vierten Proportionale zu drei diplanaren Vectoren, wollen wir zuerst, allgemein, bemerken, dass wenn wir (wie in 62) eine lineare Gleichung von der Form,

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = 0,$$

haben, welche vier coinitiale Vectoren $\alpha..\delta$ in Verbindung setzt, von denen nicht drei complanar sind, dann der fünfte Vector,

Digitized

$$\varepsilon = a\alpha + b\beta = -c\gamma - d\delta,$$

augenscheinlich mit α, β, und auch mit γ, δ [vergl. 294, (6.)] complanar (22.) ist; er ist daher ein Theil der unbegrenzten Durchschnittslinie der Ebnen AOB, COD dieser beiden Paare von Vectoren.

(26.) Und wenn wir diesen fünften Vector ε durch die beiden (im Allgemeinen ungleichen) Skalare,

$$a + b, \qquad \text{und} \qquad -c - d,$$

dividiren, so sind die beiden (im Allgemeinen ungleichen) Vectoren,

$$(a\alpha + b\beta) : (a + b), \qquad \text{und} \qquad (c\gamma + d\delta) : (c + d),$$

welche man als die Quotienten dieser beiden Divisionen erhält, die Vectoren (vergl. 25, 64) zweier (im Allgemeinen verschiedenen) Durchschnittspunkte von Linien mit Ebnen, nämlich der beiden folgenden:

$$AB \cdot OCD, \qquad \text{und} \qquad CD \cdot OAB.$$

(27.) Wenn die beiden Linien, AB und CD, zufällig einander schneiden, so fallen die beiden zuletzt erwähnten Punkte zusammen; und so finden wir, auf einem neuen Wege, die Bedingung (63.) für die Complanarität der vier Punkte O, A, B, C, oder für die Terminocomplanarität der vier Vectoren α, β, γ, δ wieder; nämlich die Gleichung

$$a + b + c + d = 0,$$

die man mit 294, XLV. und L. vergleichen mag.

(28.) Nehmen wir jetzt die vorigen Gleichungen VII. wieder auf, und führen den neuen Vector,

$$\text{XXXIII.} \ldots \lambda = l\alpha - m\beta = \tfrac{1}{2}(\varepsilon - \delta),$$

ein, durch den sich ergiebt,

$$\text{XXXIV.} \ldots S\gamma\lambda = 0,$$

und

$$\text{XXXV.} \ldots T\lambda = \sqrt{(r^2 - n^2)} = r \sin c',$$

so sehn wir, dass die beiden Bogen BA, DE, verlängert in einem Punkte L zusammentreffen (vergl. Fig. 68), für welchen $OL = U\lambda$, und der um einen Quadranten von C absteht: ein Resultat, welches durch elementare Betrachtungen bestätigt werden kann, denn (nach einem wohlbekannten Satze über

Digitized by Google

transversale Bogen) muss der gemeinsame Halbirungsbogen BA der beiden Seiten, DE und EF, die dritte Seite in einem Punkte L treffen, für welchen

$$\sin DL = \sin EL.$$

(29.) Um diese letzte Gleichheit der Sinus durch Quaternionen zu beweisen, und ihren gemeinschaftlichen Werth anzugeben, haben wir nur zu beachten, dass, nach XXXIII.,

$$\text{XXXVI.} \ldots V\delta\lambda = V\varepsilon\lambda = \tfrac{1}{2}V\delta\varepsilon;$$

hier ist,

$$T\delta\lambda = T\varepsilon\lambda = r^2 \sin c',$$

und

$$TV\delta\varepsilon = r^2 \sin 2c';$$

die fraglichen Sinus sind daher (nach 204, XIX.),

$$\text{XXXVI}'\ldots TVU\delta\lambda = TVU\varepsilon\lambda = \tfrac{1}{2}r^2 \sin 2c' : r^2 \sin c' = \cos c'.$$

(30.) Nach ähnlichen Grundsätzen können wir die beiden vector Gleichungen,

$$\text{XXXVII.} \ldots V\beta\lambda = l\,V\beta\alpha,$$
$$V\alpha\lambda = m\,V\beta\alpha,$$

deuten, in denen

$$\text{XXXVIII.} \ldots T\lambda : TV\beta\alpha = r \sin c' : \sin c = \tan c' : \tan c,$$

gleichbedeutend mit den trigonometrischen Gleichungen,

$$\text{XXXIX.} \ldots \frac{\tan CD}{\tan AB} = \frac{\cos BC}{\sin BL} = \frac{\cos AB}{\cos AL}.$$

(31.) Wenn wir daher das Loth CQ auf AB (siehe wieder Fig. 68) fällen, so dass Q den Bogen RS halbirt, und wenn wir zwei neue Punkte M, N durch die Bogengleichungen,

$$\text{XL.} \ldots \frown LM = \frown AB = \frown QR,$$
$$\frown LN = \frown CD,$$

bestimmen, so werden die Bogen MR, ND, Quadranten werden; und da der Winkel bei R nach der Construction (18.) ein rechter ist, so ist M der Pol von DR, und DM ist ein Quadrant; und folglich ist D der Pol von MN und der Winkel LNM ein rechter; denken wir uns daher die Bogen CA und CB gezogen, so erhalten wir drei Dreiecke, welche in Q und N rechtwinklig sind, und sie beweisen, nach elementaren Sätzen, dass die drei trigonometrischen Quotienten in XXXIX. in

Digitized by Google

der That einen gemeinsamen Werth haben, nämlich den Werth $\cos CQ$, oder $\cos L$.

(32.) Um dieses letzte Resultat durch Quaternionen zu beweisen, und zwar ohne die Hülfspunkte M, N, Q, R anzuwenden, haben wir die Transformationen,

$$\text{XLI.} \ldots \cos L = SU\frac{V\beta\alpha}{V\delta\varepsilon} = SU\frac{V\beta\alpha}{\gamma\lambda}$$
$$= T\frac{\lambda}{V\beta\alpha}\cdot S\frac{\beta\alpha}{\gamma\lambda} = T\frac{\lambda}{V\beta\alpha};$$

denn

$$\text{XLII.} \ldots \delta = n\gamma - \lambda,$$
$$\varepsilon = n\gamma + \lambda,$$
$$V\delta\varepsilon = 2n\gamma\lambda,$$
$$UV\delta\varepsilon = U\gamma\lambda,$$

und

$$\text{XLIII.} \ldots S\frac{\beta\alpha}{\gamma\lambda} = \frac{S\beta\alpha\gamma\lambda}{(\gamma\lambda)^2} = -S\beta\alpha^{-1}\gamma\lambda^{-1} = -S\delta\lambda^{-1} = 1;$$

erinnert man sich daran, dass $\lambda \perp \gamma$ ist, so folgt

$$V\gamma\lambda = \gamma\lambda = -\lambda\gamma,$$
$$(\gamma\lambda)^2 = -\gamma^2\lambda^2 = \lambda^2,$$
$$S\gamma\lambda^{-1} = 0.$$

(33.) Zu gleicher Zeit sehn wir, dass, wenn P (wie vorher) der positive Pol von BA ist, und wenn K, K' der negative und positive Pol von DE ist, während L' der negative (wie L der positive) Pol von CQ ist, wodurch alle Buchstaben in Fig. 68 ihre bestimmten Bedeutungen erhalten, wir schreiben können,

$$\text{XLIV.} \ldots OP = UV\beta\alpha;$$
$$OK' = \gamma U\lambda;$$
$$OK = -\gamma U\lambda;$$
$$OL' = -U\lambda;$$

während

$$OL = +U\lambda,$$

wie vorher, ist.

(34.) Schreiben wir auch,

$$\text{XLV.} \ldots \varkappa = -\gamma\lambda,$$

oder

$$\lambda = \gamma\varkappa,$$

und

$$\mu = \beta\alpha^{-1}\lambda,$$

so dass

$$\text{XLV}'\ldots\ OK = U\varkappa,$$

und

$$OM = U\mu,$$

so erhalten wir,

$$\text{XLVI}\ldots\ \beta\alpha^{-1}.\gamma = \mu\lambda^{-1}.\lambda\varkappa^{-1} = \mu\varkappa^{-1};$$

diese vierte Proportionale zu den drei gleich langen, aber diplanaren Vectoren α, β, γ, ist daher ein Versor, dessen darstellender Bogen (162) KM ist, und dessen darstellender Winkel (174) KDM ist, oder $L'DR$, oder EDP; und wir können für diesen Versor, oder Quaternion, den Ausdruck,

$$\text{XLVII}\ldots\ \beta\alpha^{-1}\gamma = \cos L'DR + OD.\sin L'DR,$$

hinschreiben.

(35.) Das Doppelte dieses darstellenden Winkels ist die Summe der beiden Basiswinkel des gleichschenkligen Dreiecks DPE; und da die beiden anderen Dreiecke, EPF, FPD, auch gleichschenklig (19.) sind, so beweist der sichelförmige Ausschnitt FF', dass diese Summe der Rest ist, welcher übrigbleibt, wenn wir den Winkel an der Spitze F des Dreiecks DEF von der Summe der Supplemente der beiden Basiswinkel D und E des Dreiecks abziehn; oder wenn wir die Summe der drei Winkel desselben Dreiecks von vier rechten Winkeln abziehn. Wir haben daher den sehr einfachen Ausdruck für den Winkel der vierten Proportionale:

$$\text{XLVIII}\ldots\ \angle\,\beta\alpha^{-1}\gamma = L'DR = \pi - \tfrac{1}{2}(D + E + F).$$

(36.) Oder, wenn wir die Fläche, oder den sphärischen Excess, nennen wir ihn Σ, des Dreiecks DEF einführen, und somit schreiben,

$$\text{XLIX}\ldots\ \Sigma = D + E + F - \pi,$$

so erhalten wir die weiteren Ausdrücke:

$$\text{L}\ldots\ \angle\,\beta\alpha^{-1}\gamma = \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\Sigma;$$
$$\text{LI}\ldots\ \beta\alpha^{-1}\gamma = \sin\tfrac{1}{2}\Sigma + r^{-1}\delta\cos\tfrac{1}{2}\Sigma;$$

denn es ist

$$OD = U\delta = r^{-1}\delta, \quad \text{nach XII.}$$

(37.) Nachdem wir so $\beta\alpha^{-1}\gamma$ ausgedrückt haben, bedarf es jetzt keiner neuen Anlehnung an die Figur, um die andere vierte Proportionale, $\gamma\alpha^{-1}\beta$, auszudrücken, welche der negative Werth der Conjugirten jener ersteren ist, oder welche einen entgegengesetzten skalar, aber einen gleichen vector Theil [vergl. 204, (1.), und 295, (9.)] hat: der geometrische Unterschied besteht allein darin, dass, da die Drehung um α von β nach γ als negativ angenommen worden ist, die Drehung um α von γ nach β, im Gegentheil, positiv sein muss.

(38.) Wir können daher sofort hinschreiben:

$$\text{LII.}\ldots\ \gamma\alpha^{-1}\beta = -K\beta\alpha^{-1}\gamma = -\sin\tfrac{1}{2}\Sigma + r^{-1}\delta\cos\tfrac{1}{2}\Sigma;$$

und wir erhalten für den Winkel dieser neuen vierten Proportionale zu denselben drei Vectoren α, β, γ, von denen nur der zweite und dritte ihre Stellen mit einander vertauscht haben, die Formel:

$$\text{LIII.}\ldots\ \angle\gamma\alpha^{-1}\beta = RDL = \tfrac{1}{2}(D+E+F) = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\Sigma.$$

(39.) Aber der gemeinsame vector Theil dieser beiden vierten Proportionalen ist, nach VII., δ; wir haben daher, nach XI.,

$$\text{LIV.}\ldots\ r = \cos\tfrac{1}{2}\Sigma;\quad e = \pm\sin\tfrac{1}{2}\Sigma;$$

das obere Vorzeichen wird genommen, wenn die Drehung um α von β nach γ negativ ist, wie vorher angenommen wurde.

(40.) Es folgt daraus, nach (6.), dass wenn die Seiten $2a'$, $2b'$, $2c'$, eines sphärischen Dreiecks DEF, dessen Fläche Σ ist, durch die Ecken A, B, C eines anderen sphärischen Dreiecks mit den Seiten* a, b, c halbirt werden, dann

$$\text{LV.}\ldots\ \cos a : \cos a' = \cos b : \cos b' = \cos c : \cos c' = \cos\tfrac{1}{2}\Sigma.$$

---

* Die Seiten a, b, c des halbirenden Dreiecks ABC haben wir jede der Einfachheit wegen (1.) kleiner als einen Quadranten angenommen, aber wir werden finden, dass die Formel LV. statt hat, ohne irgend welche derartige Beschränkung.

(41.) Es folgt auch aus dem, was ich soeben bewiesen habe, dass der Winkel RDK, oder MDN, oder der Bogen MN in Fig. 68, die halbe Fläche des halbirten Dreiecks DEF darstellt; und daraus können wir, mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks LMN, schliessen, dass der Sinus dieser halben Fläche gleich dem Sinus einer Seite des halbirenden Dreiecks ABC ist, multiplicirt mit dem Sinus des Lothes, welches auf diese Seite von der gegenüberliegenden Ecke des letzteren Dreiecks gefällt ist; denn wir haben

$$\text{LVI.}\ldots \sin\tfrac{1}{2}\Sigma = \sin MN = \sin LM \,.\, \sin L = \sin AB \,.\, \sin CQ.$$

(42.) Derselbe Schluss kann unmittelbar, durch Quaternionen, aus dem Ausdruck,

$$\text{LVII.}\ldots \sin\tfrac{1}{2}\Sigma = e = S\alpha\beta\gamma = S(V\beta\alpha\,.\,\gamma^{-1}) = TV\beta\alpha\,.\,SU(V\beta\alpha : \gamma),$$

gezogen werden; in ihm ist ein Factor der Sinus von AB, und der andere Factor ist der Cosinus von CP, oder der Sinus von CQ.

(43.) Unter denselben Bedingungen können wir auch, da

$$\text{LVIII.}\ldots \alpha = U(\varepsilon+\zeta) = \tfrac{1}{2}\iota^{-1}(\varepsilon+\zeta), \text{ u. s. w.},$$

schreiben,

$$\text{LIX.}\ldots \sin\tfrac{1}{2}\Sigma = SU(\varepsilon+\zeta)\,(\zeta+\delta)(\delta+\varepsilon) = S\delta\varepsilon\zeta : 4lmn;$$

hier ist, nach IV. und XIII.,

$$\text{LX.}\ldots 4lmn = -S(\delta+\varepsilon)(\varepsilon+\zeta) = r^2 - S(\varepsilon\zeta+\zeta\delta+\delta\varepsilon).$$

(44.) Daher ist auch, nach LIV.,

$$\text{LXI.}\ldots \cos\tfrac{1}{2}\Sigma = r = [r^3 - rS(\varepsilon\zeta+\zeta\delta+\delta\varepsilon)] : 4lmn;$$

$$\text{LXII.}\ldots \tan\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{e}{r} = \frac{S\delta\varepsilon\zeta}{r^3 - rS(\varepsilon\zeta+\zeta\delta+\delta\varepsilon)} = \frac{SU\delta\varepsilon\zeta}{1 - SU\varepsilon\zeta - SU\zeta\delta - SU\delta\varepsilon};$$

und mit dieser letzteren Form haben wir einen allgemeinen Ausdruck für die Tangente der Hälfte der sphärischen Oeffnung irgend einer dreikantigen Pyramide $ODEF$ über O,

was auch immer die Längen $T\delta$, $T\varepsilon$, $T\zeta$ der Kanten durch O sein mögen.

(45.) Als eine Verification erhalten wir,

$$\text{LXIII.}\ldots (4lmn)^2 = -\tfrac{1}{4}(\varepsilon+\zeta)^2(\zeta+\delta)^2(\delta+\varepsilon)^2 = 2(r^2 - S\varepsilon\zeta)(r^2 - S\zeta\delta)(r^2 - S\delta\varepsilon);$$

aber die Elimination von $\frac{1}{4}\Sigma$ aus LIX. LXI. ergiebt,

$$\text{LXIV.}\ldots (4lmn)^2 = (S\delta\varepsilon\zeta)^2 + [r^3 - r(S\varepsilon\zeta + S\zeta\delta + S\delta\varepsilon)]^2;$$

wir sollten daher finden, dass

$$\text{LXV.}\ldots (S\delta\varepsilon\zeta)^2 = r^6 - r^2\{(S\varepsilon\zeta)^2 + (S\zeta\delta)^2 + (S\delta\varepsilon)^2\} - 2\,S\varepsilon\zeta\,S\zeta\delta\,S\delta\varepsilon,$$

wenn $\delta^2 = \varepsilon^2 = \zeta^2 = -r^2$ ist; und in der That ergiebt sich diese Gleichheit unmittelbar aus der allgemeinen Formel 294, LIII.

(46.) Unter derselben Bedingung, dass die Längen von δ, ε, ζ gleich sind, erhalten wir auch die Formel,

$$\text{LXVI.}\ldots -V(\delta+\varepsilon)(\varepsilon+\zeta)(\zeta+\delta) = 2\delta(r^2 - S\varepsilon\zeta - S\zeta\delta - S\delta\varepsilon) = 8lmn\delta;$$

und daraus können weitere Verificationen abgeleitet werden.

(47.) Wenn σ die Fläche* des halbirenden Dreiecks ABC bezeichnet, so setzt uns der allgemeine Satz LXII. in den Stand, zu schliessen, dass

$$\text{LXVII.}\ldots \tan\frac{\sigma}{2} = \frac{S\alpha\beta\gamma}{1 - S\beta\gamma - S\gamma\alpha - S\alpha\beta} = \frac{e}{1+l+m+n} = \frac{\sin c \sin p}{1 + \cos a + \cos b + \cos c},$$

wenn p das Loth CQ von C auf AB bezeichnet, so dass

$e = \sin c \sin p = \sin b \sin c \sin A =$ u. s. w. [vergl. 210, (21.)].

(48.) Dagegen ist, nach (IX.) und (XI.),

$$\text{LXVIII.}\ldots e^2 + (1+l+m+n)^2 = 2(1+l)(1+m)(1+n) = \left(4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\right)^2;$$

folglich sind der Cosinus und Sinus der Hälfte dieser neuen Fläche,

---

* Der Leser wird bemerken, dass das gebräuchlichere Symbol Σ, für die Fläche von ABC, hier angewandt wird (36.), um die Fläche des umschriebenen Dreiecks DEF zu bezeichnen.

$$\text{LXIX.} \ldots \cos\frac{\sigma}{2} = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}};$$

$$\text{LXX.} \ldots \sin\frac{\sigma}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin C}{\cos\frac{c}{2}} = \text{u. s. w.}$$

(49.) Kehrt man zu dem halbirten Dreieck, DEF, zurück, so ergiebt die letzte Formel,

$$\text{LXXI.} \ldots \sin\tfrac{1}{2}\Sigma = \frac{\sin a' \sin b' \sin F}{\cos c'} = \sin p' \sin c \sec c',$$

wenn p' das Loth bezeichnet, welches von F auf den halbirenden Bogen AB gefällt ist, oder FT in Fig. 68; dagegen ist

$$\cos\tfrac{1}{2}\Sigma = \cos c \sec c',$$

nach LV.; und folglich,

$$\text{LXXII.} \ldots \tan\tfrac{1}{2}\Sigma = \sin p' \tan c = \sin FT . \tan AB.$$

Demnach haben wir, in Fig. 68, nach der sphärischen Trigonometrie,

$$\sin FT = \sin ES = \sin LE \sin L = \cos LN \sin MN \operatorname{cosec} LM = \tan MN \cot AB.$$

(50.) Der Bogen MN, welcher somit der Grösse nach die Hälfte der Fläche von DEF darstellt, hat seinen Pol im Punkte D, und kann als der darstellende Bogen (162) eines gewissen neuen Quaternions, Q, oder seines Versors, angesehn werden, dessen Achse der Radius OD, oder $U\delta$, ist; und dieser neue Quaternion kann in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\text{LXXIII.} \ldots Q = \delta\gamma\alpha\beta = -\delta^2 + \delta S\alpha\beta\gamma = r^2 + e\delta;$$

sein Tensor und Versor sind, bezüglich,

$$\text{LXXIV.} \ldots TQ = r = \cos\tfrac{1}{2}\Sigma;$$
$$\text{LXXV.} \ldots UQ = \cos\tfrac{1}{2}\Sigma + OD . \sin\tfrac{1}{2}\Sigma.$$

(51.) Eine wichtige Transformation dieses letzten Versors kann in folgender Weise erhalten werden:

Digitized by Google

$$\text{LXXVI.}\ldots UQ = U(\delta\gamma^{-1}.\alpha\zeta^{-1}.\zeta\beta^{-1}) = (\delta\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\varepsilon\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\zeta\delta^{-1})^{\frac{1}{2}};$$

so dass

$$\text{LXXVII.}\ldots \tfrac{1}{2}\Sigma = \angle\, Q = \angle\, \delta\gamma\alpha\beta = \angle\,(\delta\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\varepsilon\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\zeta\delta^{-1})^{\frac{1}{2}};$$

und diese Potenzen von Quaternionen, deren Exponenten in jedem Falle $= \frac{1}{2}$ sind, werden als Quadratwurzeln [199, (1.)] gedeutet, oder als gleichbedeutend mit den Symbolen $\sqrt{(\delta\varepsilon^{-1})}$, u. s. w.

(52.) Der conjugirte (oder reciproke) Versor, UQ^{-1}, dessen darstellender Bogen NM ist, kann aus UQ einfach dadurch abgeleitet werden, dass man β und γ, oder ε und ζ, mit einander vertauscht; der entsprechende Quaternion ist,

$$\text{LXXVIII.}\ldots Q' = KQ = \delta\beta\alpha\gamma = r^2 - e\delta;$$

und wir erhalten,

$$\text{LXXIX.}\ldots UQ' = \cos\tfrac{1}{2}\Sigma - OD.\sin\tfrac{1}{2}\Sigma = (\delta\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\zeta\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\varepsilon\delta^{-1})^{\frac{1}{2}};$$

die Drehung um D, von E nach F, ist wieder als negativ angenommen.

(53.) Es sei H irgend ein anderer Punkt auf der Kugel, und es sei $OH = \eta$; es möge ferner Σ' die Fläche des neuen sphärischen Dreiecks, DFH, sein; dann zeigt dieselbe Betrachtung, dass

$$\text{LXXX.}\ldots \cos\tfrac{1}{2}\Sigma' + OD.\sin\tfrac{1}{2}\Sigma' = (\delta\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\zeta\eta^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\eta\delta^{-1})^{\frac{1}{2}},$$

wenn die Drehung um D von F nach H negativ ist; und daher erhalten wir, durch Multiplication der beiden coaxialen Versoren, LXXVI. und LXXX., nach LXXV., die analoge Formel:

$$\text{LXXXI.}\ldots \cos\tfrac{1}{2}(\Sigma + \Sigma') + OD.\sin\tfrac{1}{2}(\Sigma + \Sigma'') = (\delta\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\varepsilon\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\zeta\eta^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\eta\delta^{-1})^{\frac{1}{2}};$$

in ihr bezeichnet $\Sigma + \Sigma'$ die Fläche des sphärischen Vierseits $DEFH$.

(54.) Es ist leicht, dieses Resultat auf die Fläche irgend eines sphärischen Polygons, oder auf die sphärische Oeffnung (44.) irgend einer Pyramide auszudehnen; und wir können uns selbst

eine Ausdehnung desselben, als Grenzfall, auf die Fläche irgend einer geschlossenen Curve auf der Kugel denken, wenn man sie sich in eine unendliche Anzahl von unendlich kleinen Dreiecken zerlegt denkt, mit einer gewissen gemeinsamen Spitze, wie sie zum Beispiel der Punkt D ist, auf der Kugeloberfläche, und deren Basen bezüglich unendlich kleine Bogen $EF, FH, \ldots$ der Curve sind; oder auf die sphärische Oeffnung irgend eines Kegels, die somit als der Winkel eines Quaternions ausgedrückt wird, der die Grenze* des Productes von unendlich vielen Factoren ist, von denen jeder gleich der Quadratwurzel eines Quaternions ist, welcher sich unendlich wenig von der Einheit unterscheidet.

(55.) Um dieses Resultat in anderer Fassung zu geben, wollen wir es in folgender Weise [vergl. 180, (3.) in Betreff der Definition einer Bogensumme] aussprechen: —

„Die Bogensumme der Hälften der aufeinanderfolgenden Seiten irgend eines sphärischen Polygons ist gleich einem Bogen eines grossen Kreises, dessen Pol der Anfangs- (oder End-) Punkt des Polygons ist, und der die halbe Fläche der Figur darstellt"; es wird hierbei gemeint, dass dieser resultirende Bogen seine Richtung umkehrt, wenn die halben Seiten (als Bogen) in einer umgekehrten Reihenfolge addirt werden.

---

* Dieser Grenzfall ist auf's engste mit einem bestimmten Integral von der gewöhnlichen Art verwandt; oder besser, wir können sagen, er ist ein bestimmtes Integral, aber eins von einer neuen Art, das nicht leicht ohne Quaternionen hätte eingeführt werden können. In der That, wenn wir die Eigenschaft (168) der quaternion Multiplication, nicht umkehrbar zu sein, nicht angewandt hätten, so würden die hier betrachteten Producte augenscheinlich ein jedes gleich der Einheit werden; so dass sie keine Ausdrücke für sphärische oder andere Flächen liefern würden, und es würde, um es kurz zu sagen, nutzlos sein, von ihnen zu sprechen. Wenn dagegen diese Eigenschaft oder dieser Satz der Multiplication eingeführt wird, so findet man, dass diese Ausdrücke von Productform, wie oben gezeigt wurde, ausserordentlich nützliche Bedeutungen in der sphärischen Geometrie haben; und wir werden sehn, dass sie zu einem bemerkenswerthen Satz über die Resultante von Drehungen eines Systems, welche der Reihe nach um irgend eine Anzahl von Achsen stattfinden, führen und ihn enthalten, von Achsen, die alle durch einen festen Punkt gehn, in anderer Hinsicht dagegen einander in allmählichem oder plötzlichem Wechsel folgen.

Digitized by Google

(56.) Was die Anordnung betrifft, auf die wir uns somit beziehn, so mag beachtet werden, dass wir uns bei der Bogen-Addition, welche der quaternion Multiplication in LXXVI. entspricht, einen Punkt zuerst von B nach F, auf der Hälfte des Bogens DF, bewegt denken; und diese halbe Seite des Dreiecks DEF entspricht dem rechter Hand stehenden Factor, oder der Quadratwurzel, $(\zeta\delta^{-1})^{\frac{1}{2}}$. Wir denken uns dann denselben Punkt zunächst von F nach A bewegt, auf der Hälfte des Bogens FE, welcher dem zur Linken unmittelbar neben dem ersteren stehenden Factor entspricht; und somit haben wir ihn im Ganzen soweit bewegt um den resultirenden Bogen BA [einen Transvector, 180, (3.)], oder um irgend einen gleichen Bogen (163), wie um ML in Fig. 68. Und endlich denken wir uns eine Bewegung um die Hälfte des Bogens ED, oder um irgend einen Bogen, der dieser Hälfte gleich ist, wie es der Bogen LN in derselben Figur ist; und welche dem letzten linker Hand stehenden Factor in der Formel entspricht; die endliche Resultante (oder der gesammte Transvectorbogen), welche dem Producte der drei Quadratwurzeln entspricht, wie sie in der Formel angeordnet sind, wird somit durch den letzten Bogen MN dargestellt, dessen positiver Pol der Punkt D ist, und dessen Winkel (51.) die halbe Fläche, $\frac{1}{2}\Sigma$, des quaternion (oder versor) Productes ist, welches er darstellt.

(57.) Als die positive Drehungsrichtung auf der Kugel ist bis jetzt diejenige um D von F nach E angenommen worden; sie findet daher auf dem Umfang in der Reihenfolge DFE statt, wenn sie von irgend einem Punkte der Oberfläche innerhalb des Dreiecks angesehn* wird; das heisst, in der Reihenfolge, in

* In diesem und in anderen derartigen Fällen denke ich mir den Beschauer auf dem Punkte der Kugel stehend, um welchen man sich die Drehung auf der Oberfläche ausgeführt denkt; sein Körper steht ausserhalb der Kugel. Und ebenso meinten wir, als wir, zum Beispiel, sagten, dass die Drehung um die Linie, oder den Radius, OA, von der Linie OB zur Linie OC, negativ ist (oder linksläufig), wie in den vorigen Figuren, dass die Drehungsrichtung in dieser Weise einer Person erscheinen würde, welche mit ihren Füssen auf A steht, und deren Körper die Richtung der Verlängerung von OA hat; oder auch im Mittelpunkte (oder Anfangspunkte) O steht, mit ihrem Kopfe im Punkte A. Vergleiche 174, II.; 177; und die Anmerkung zu Seite 195.

welcher die aufeinanderfolgenden Seiten DF, FE, ED genommen worden sind, ehe die Hälften von ihnen addirt (oder zusammengesetzt) wurden. Und demgemäss nahmen wir in der conjugirten (oder reciproken) Formel LXXIX. die umgekehrte Reihenfolge, DEF, indem wir wie üblich von rechter Hand stehenden Factoren zu linker Hand stehenden übergingen, und wobei angenommen wurde, dass die ersteren durch* die letzteren multiplicirt werden; und das Resultat war, wie wir in (52.) sahn, ein neuer Versor, in dessen Ausdruck die Fläche Σ des Dreiecks einfach mit der zu ihr negativen vertauscht wurde.

(58.) Um ein Beispiel von der Reduction der Fläche auf Null zu geben, brauchen wir uns nur vorzustellen, dass die drei Punkte D, E, F coarcual (165) sind, oder auf einem grossen Kreise liegen; oder dass die drei Linien δ, ε, ζ complanar sind. Für diesen Fall haben wir, nach den Gesetzen** für complanare Quaternionen, die Formel,

$$\text{LXXXII.} \ldots (\delta\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\varepsilon\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\zeta\delta^{-1})^{\frac{1}{2}} = 1,$$

wenn

$$S\delta\varepsilon\zeta = 0;$$

somit ist

$$\cos\tfrac{1}{2}\Sigma' = 1,$$

und

$$\Sigma' = 0.$$

(59.) Ferner sei der Punkt H, in (53.), coarcual mit D und F, oder es sei $S\delta\zeta\eta = 0$; dann reducirt sich, da

$$\text{LXXXII}'. \ldots (\zeta\eta^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\eta\delta^{-1})^{\frac{1}{2}} = (\zeta\delta^{-1})^{\frac{1}{2}},$$

wenn

$$S\delta\zeta\eta = 0,$$

das Product von vier Factoren LXXXI. selbst auf das Product von drei Factoren LXXVI.; der geometrische Grund hierfür ist augenscheinlich, dass in diesem Falle die addirte Fläche Σ' verschwindet; so dass das Vierseit $DEFH$ nur dieselbe Fläche hat, wie das Dreieck DEF.

(60.) Aber diese hinzugefügte Fläche (53.) kann selbst

---

* Vergleiche die Anmerkungen zu den Seiten 188, 204.

** Vergleiche das zweite Kapitel des zweiten Theils.

Digitized by Google

eine negative* Wirkung haben; so zum Beispiel, wenn der neue Punkt H auf die vorige Seite DE fällt. Demnach erhalten wir, wenn wir schreiben

$$\text{LXXXIII.}\ldots\ Q_1 = (\varepsilon\zeta^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\zeta\eta^{-1})^{\frac{1}{2}}\ (\eta\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{2}},$$

und das Product LXXXI. von vier Quadratwurzeln mit Q_2 bezeichnen, die Transformation,

$$\text{LXXXIV.}\ldots\ Q_2 = (\delta\varepsilon^{-1})^{\frac{1}{2}}\ Q_1\ (\varepsilon\delta^{-1})^{\frac{1}{2}},$$

wenn

$$S\delta\varepsilon\eta = 0;$$

sie zeigt [vergl. (15.)], dass in diesem Falle der Winkel des quaternären Productes Q_2 derselbe ist, wie der des ternären Productes Q_1, oder dass er gleich der halben Fläche des Dreiecks $EFH\,(= DEF - DHF)$ ist, wenn auch die Achse von Q_2 aus der Lage der Achse von Q_1 durch eine Drehung um den Pol des Bogens ED herausgebracht ist, welche sie von OE nach OD bringt.

(61.) Nach diesem Beispiel kann man es als hinreichend einleuchtend ansehn, wie die Formel LXXXI. angewandt und erweitert werden kann, so dass sie die Fläche irgend einer geschlossenen Figur auf der Kugel darstellt [vergl. (54.)], für welche irgend ein Punkt D auf der Oberfläche als eine Art sphärischer Anfangspunkt angenommen ist; selbst wenn dieser Hülfspunkt nicht auf dem Umfang liegt, sondern in Bezug auf ihn entweder ein äusserer oder ein innerer Punkt ist.

(62.) Ein neuer Quaternion Q_0, der dieselbe Achse OD hat, wie der Quaternion Q in (50.), aber einen doppelt so grossen Winkel, und einen Tensor gleich der Einheit, kann dadurch gebildet werden, dass man einfach den Versor UQ quadrirt; und obwohl dieses Quadriren nicht dadurch bewirkt werden kann, dass man den gebrochnen Exponenten**, in der

---

* In einigen Forschungen, welche Flächen auf einer Kugel betreffen, kann es angemessen sein, zwischen den beiden Symbolen DEF und DFE zu unterscheiden (vergl. 28, 63), und sie so aufzufassen, als ob sie zwei entgegengesetzte Dreiecke bezeichnen, deren Summe null ist. Doch für jetzt wollen wir uns damit begnügen, diese Unterscheidung vermittelst der beiden conjugirten quaternion Producte, (51.) und (52.), auszudrücken.

** Vergleiche die Anmerkung zu (54.).

Formel LXXVI., entfernt, so kann es doch leicht auf anderen Wegen ausgeführt werden. So erhalten wir zum Beispiel, nach LXXIII., LXXIV., und nach VII., IX., X., die Transformationen*,

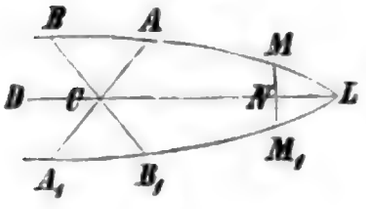
$$\text{LXXXV.}\ldots\quad \begin{aligned} Q_0 = UQ^2 &= r^{-2}(\delta\gamma\alpha\beta)^2 \\ &= -\delta^{-2}.\gamma\alpha\beta\delta.\delta\gamma\alpha\beta \\ &= -(\gamma\alpha\beta)^2 = -(e-\delta)^2 = r^2 - e^2 + 2e\delta; \end{aligned}$$

und in der That setzen uns die trigonometrischen Werthe LIV. für r und e, da $\delta = r.OD$, nach XII., in den Stand, das letzte Resultat unter der Form,

$$\text{LXXXVI.}\ldots\quad Q_0 = -(\gamma\alpha\beta)^2 = \cos\Sigma + OD.\sin\Sigma,$$

zu schreiben.

Fig. 70.



(63.) Um ihre geometrische Bedeutung zu zeigen, wollen wir uns vorstellen, dass ABC und LMN dieselben Bedeutungen in der neuen Figur 70 haben, wie in Fig. 68; und dass $A_1 B_1 M_1$ drei neue Punkte sind, welche durch die drei Bogengleichungen (163),

$$\text{LXXXVII.}\ldots\quad \begin{aligned} \frown AC &= \frown CA_1, \\ \frown BC &= \frown CB_1, \\ \frown MN &= \frown NM_1, \end{aligned}$$

bestimmt werden; sie führen leicht zu der folgenden vierten Gleichung von derselben Art,

$$\text{LXXXVII}'.\ldots\quad \frown LM_1 = \frown B_1 A_1.$$

Dieser neue Bogen LM_1 stellt somit (vergl. 167, und Fig. 43) das Product $\alpha_1\gamma^{-1}.\gamma\beta_1^{-1} = \gamma\alpha^{-1}.\beta\gamma^{-1}$ dar; während der vorige Bogen ML, oder der ihm gleiche Bogen BA (31.), $\alpha\beta^{-1}$ darstellt; und daher stellt der Bogen MM_1, der seinen Pol in D hat, und numerisch der ganzen Fläche Σ von DEF gleich ist [denn MN war, wie wir sahn, gleich der Hälfte jener Fläche (50.)], das Product $\gamma\alpha^{-1}\beta\gamma^{-1}.\alpha\beta^{-1}$, oder

* Die Gleichung $\delta\gamma\alpha\beta = \gamma\alpha\beta\delta$ ist nicht allgemein gültig; aber wir haben hier $\delta = -V\gamma\alpha\beta$; und, im Allgemeinen, $q\varrho = \varrho q$, wenn $\varrho \parallel Vq$.

Digitized by Google

$-(\gamma\alpha\beta)^2$, oder Q_0 dar. Man kann daher sagen, dass die Formel LXXXVI. durch diese einfachen geometrischen Betrachtungen von Neuem gedeutet und bewiesen worden ist.

(64.) Wir sehn, zu gleicher Zeit, wie das Symbol,

$$\text{LXXXVIII.}\ldots\ Q_0 = \frac{\gamma}{\alpha}\,\frac{\beta}{\gamma}\,\frac{\alpha}{\beta},$$

zu deuten ist; nämlich, dass es einen Versor bezeichnet, dessen Achse nach der Ecke D eines gewissen sphärischen Hülfsdreiecks DEF hin gerichtet ist, oder von ihr ausgeht, und dessen bezüglich dem D, E, F gegenüberliegende Seiten durch die gegebenen Punkte A, B, C halbirt (5.) werden, je nachdem die Drehung um α von β nach γ negativ oder positiv ist; und dessen Winkel die Fläche Σ dieses Hülfsdreiecks darstellt, oder ihr numerisch gleich ist, wenigstens wenn wir wieder voraussetzen, wie wir es der Einfachheit wegen gethan (1.) haben, dass die Seiten des gegebnen Dreiecks ABC einzeln kleiner als ein Quadrant sind.

298. Der Fall, wenn die Seiten des gegebnen Dreiecks sämmtlich grösser, anstatt sämmtlich kleiner, als Quadranten sind, verdient zunächst (wenn auch kürzer) in Betracht gezogen zu werden; den Fall, wenn sie sämmtlich gleich Quadranten sind, bewahren wir uns für einen kurzen folgenden Artikel auf: und andere Fälle werden auf sie, durch Grenzbetrachtungen, leicht bezogen, oder dadurch, dass man von einer gegebnen Linie zu der ihr entgegengesetzten übergeht.

(1.) Nimmt man jetzt an, dass

$$\text{I.}\ldots\ l < 0, \qquad m < 0, \qquad n < 0,$$

oder dass

$$\text{II.}\ldots\ a > \frac{\pi}{2}, \qquad b > \frac{\pi}{2}, \qquad c > \frac{\pi}{2},$$

so können wir wieder die letzten Gleichungen IV. bis XI. beibehalten; und XIII.; und XV. bis XXVI. in 297; aber wir müssen das Vorzeichen der Wurzel, r, in den Gleichungen XII. und XIV. ändern, und auch die Vorzeichen der Versoren $U\delta$, $U\varepsilon$, $U\zeta$ in XII., wenn wir verlangen, dass die Seiten des Hülfsdreiecks, DEF, wieder (wie in den Figuren 67, 68) durch die Ecken des gegebnen Dreiecks ABC halbirt werden sollen, dessen Seiten a, b, c jetzt eine jede grösser als

ein Quadrant ist. Somit müssen wir jetzt, wenn r wieder der gemeinsame Tensor von δ, ε, ζ ist, und daher selbst wieder > 0 angenommen wird, unter den neuen Bedingungen I. oder II., die neuen Gleichungen hinschreiben,

$$\text{III.}\ldots\ OD = -U\delta = -r^{-1}\delta;$$
$$OE = -U\varepsilon = -r^{-1}\varepsilon;$$
$$OF = -U\zeta = -r^{-1}\zeta;$$
$$\text{IV.}\ldots\ \cos a = -r\cos a',$$
$$\cos b = -r\cos b',$$
$$\cos c = -r\cos c'.$$

(2.) Wenn man die Gleichungen IV. und VIII. von 297 wieder gelten lässt, so können wir jetzt schreiben,

$$\text{V.}\ldots\ \pm 2r\cos a'\cos b'\cos c' = \cos a'^2 + \cos b'^2 + \cos c'^2 - 1,$$

je nachdem wir positive Werthe (297), oder negative Werthe (298), für die Cosinus l, m, n der Seiten des halbirenden Dreiecks annehmen; der Werth von r wird wieder als positiv angenommen.

(3.) Es ist nicht schwierig zu beweisen (vergl. 297, LIV., LXIX.), dass

$$\text{VI.}\ldots\ r = \pm\cos\tfrac{1}{2}\Sigma,$$

je nachdem

$$l > 0, \quad \text{u. s. w.},$$

oder

$$l < 0, \quad \text{u. s. w.};$$

die vorige Formel V. kann daher, ohne doppeltes Vorzeichen, in folgender Weise geschrieben werden:

$$\text{VII.}\ldots\ 2\cos a'\cos b'\cos c'\cos\tfrac{1}{2}\Sigma$$
$$= \cos a'^2 + \cos b'^2 + \cos c'^2 - 1;$$

und die Formel 297, LV. bleibt beständig gültig.

(4.) In gleicher Weise können wir ohne doppeltes Vorzeichen (vergl. 297, LI.) den folgenden Ausdruck für die vierte Proportionale $\beta\alpha^{-1}\gamma$ zu drei Einheitsvectoren α, β, γ hinschreiben, wenn die Drehung um den ersten von dem zweiten zum dritten negativ ist:

$$\text{VIII.}\ldots\ \beta\alpha^{-1}\gamma = \sin\tfrac{1}{2}\Sigma + OD.\cos\tfrac{1}{2}\Sigma;$$

in ihm wechselt der skalar Theil das Vorzeichen, wenn die Drehung umgekehrt wird.

Digitized by Google

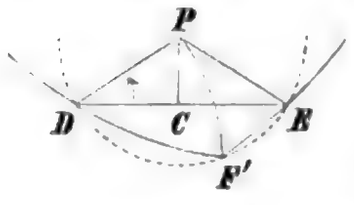
(5.) Es ist indessen zu beachten, dass, obwohl die Formel VIII. nicht nur in den im letzten und in diesem Artikel behandelten Fällen gültig ist, sondern auch in denjenigen, welche für den nächsten Artikel aufbewahrt worden sind, nämlich wenn $l = 0$, u. s. w.; doch, da wir in dem gegenwärtigen Falle (298) haben die Fläche $\Sigma > \pi$, der Radius OD nicht länger die (positive) Achse $U\delta$ der vierten Proportionale $\beta\alpha^{-1}\gamma$ ist; noch $\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\Sigma$ irgendwie länger, wie in 297, L., der (positive) Winkel dieses Versors. Im Gegentheil, wir haben jetzt, für diese Achse und diesen Winkel, die Ausdrücke:

$$\text{IX.}\ldots \text{Ax.}\,\beta\alpha^{-1}\gamma = DO = -OD;$$
$$\text{X.}\ldots \angle\,\beta\alpha^{-1}\gamma = \tfrac{1}{2}(\Sigma - \pi).$$

(6.) Um diese Resultate durch eine Construction zu erläutern, können wir bemerken, dass, wenn die halbirenden Bogen BC, CA, AB, in Fig. 67, jeder grösser als ein Quadrant angenommen werden, und wenn wir weiter aus ihr eine neue Figur, analog 68, bilden, das Loth CQ ebenfalls einen Quadranten übertreffen wird, und die Pole P und K zwischen die Punkte C und Q fallen werden; und es fällt auch M und R auf die Verlängerungen der Bogen LQ und QL': und obwohl man den Bogen KM, oder den Winkel KDM, oder $L'DR$, oder EDP, noch, wie in 297, (34.), als eine Darstellung des Versors $\beta\alpha^{-1}\gamma$ ansehn kann, so hat doch die entsprechende Drehung um den Punkt D jetzt einen negativen Charakter.

(7.) Und was den Betrag dieser Drehung betrifft, oder die Grösse des Winkels bei D, so ist er wieder, wie in Fig. 68, ein Basiswinkel des einen der drei gleichschenkligen Dreiecke, deren gemeinsame Spitze P ist; aber wir haben jetzt, wie in Fig. 71, eine neue Anordnung, in Folge welcher dieser Winkel in der Weise gefunden wird, dass man halbirt, was übrigbleibt, wenn die Summe der Supplemente der Winkel bei D und E, in dem Dreieck DEF, von dem Winkel bei F abgezogen wird, anstatt [wie in 297, (35.)] den letzteren Winkel von der vorigen Summe abzuziehn; jetzt ist daher, in Uebereinstimmung mit dem vorigen Ausdruck X.,

Fig. 71.



Digitized by Google

$$\text{XI.} \ldots \angle \beta\alpha^{-1}\gamma = \tfrac{1}{2}(D + E + F) - \pi.$$

(8.) Der negative Werth des Conjugirten der Formel VIII. ergiebt,

$$\text{XII.} \ldots \gamma\alpha^{-1}\beta = -\sin\tfrac{1}{2}\Sigma + OD.\cos\tfrac{1}{2}\Sigma;$$

und wenn man den negativen Werth des Quadrats dieser Gleichung nimmt, so gelangen wir zum folgenden Ausdruck:

$$\text{XIII.} \ldots \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\beta}{\gamma}\frac{\alpha}{\beta} = -(\gamma\alpha^{-1}\beta)^2 = \cos\Sigma + OD.\sin\Sigma;$$

ein Resultat, welches vorher [vergl. 297, (62.); (64.)] für den Fall $\Sigma < \pi$ bewiesen worden ist; und bei welchem wieder angenommen ist, dass die Drehung um α von β nach γ negativ ist.

(9.) Bei derselben Drehungsrichtung haben wir auch die conjugirte oder reciproke Formel,

$$\text{XIV.} \ldots \frac{\beta}{\alpha}\frac{\gamma}{\beta}\frac{\alpha}{\gamma} = -(\beta\alpha^{-1}\gamma)^2 = \cos\Sigma - OD.\sin\Sigma.$$

(10.) Wenn es vorkommen sollte, dass nur eine Seite, zum Beispiel AB, im gegebenen Dreieck ABC, grösser wäre als ein Quadrant, während jede der beiden anderen kleiner wäre als ein Quadrant, oder dass wir hätten $l > 0$, $m > 0$, dagegen $n < 0$; und wenn wir die vierte Proportionale zu α, β, γ vermittelst der vorhergehenden Constructionen darzustellen wünschten, so würden wir nur den Punkt C', welcher dem C gegenüberliegt, einzuführen, oder γ mit $\gamma' = -\gamma$ zu vertauschen brauchen; denn damit würde das neue Dreieck ABC Seiten erhalten, von denen jede grösser als ein Quadrant ist, und so würde es unter den in diesem Artikel betrachteten Fall gehören; und nachdem wir die Construction für denselben angewandt haben, würden wir nur den resultirenden Versor mit dem zu ihm negativen zu vertauschen haben.

(11.) Und ebenso könnten wir, wenn l und m negativ wäre, n dagegen positiv, für C den ihm gegenüberliegenden Punkt C' setzen, und so wieder zur Construction des Art. 297 zurückgelangen; und ebenso auch in anderen Fällen.

(12.) Im Allgemeinen können wir daher annehmen, wenn wir mit den Gleichungen 297, XII. beginnen, und dem gemeinsamen Tensor, r, der drei coinitialen Vectoren δ, ε, ζ irgend einen

Digitiz

willkürlichen (aber positiven) Werth beilegen, derjenigen Vectoren, deren Versoren, oder Einheitsvectoren $U\delta$, u. s. w., in den Ecken eines gegebnen oder angenommenen Dreiecks DEF, mit den Seiten $= 2a', 2b', 2c'$ endigen, (vergl. Fig. 67), dass ein andres Dreieck ABC, mit den durch a, b, c bezeichneten Seiten, deren Cosinus durch l, m, n bezeichnet werden, von diesem einen durch die Bedingung abgeleitet wird, dass es die Seiten jenes halbirt; und daher durch die Gleichungen (vergl. 297, LVIII.),

$$\text{XV.} \ldots \begin{aligned} OA = \alpha &= U(\varepsilon + \zeta), \\ OB = \beta &= U(\zeta + \delta), \\ OC = \gamma &= U(\delta + \varepsilon), \end{aligned}$$

und die Beziehungen 297, IV., V., VI., wie vorher; oder durch die weiteren Gleichungen (vergl. 297, XIII. XIV.),

$$\text{XVI.} \ldots \begin{aligned} \varepsilon + \zeta &= 2r\alpha \cos a', \\ \zeta + \delta &= 2r\beta \cos b', \\ \delta + \varepsilon &= 2r\gamma \cos c'. \end{aligned}$$

(13.) Wenn man diese einfache Construction annimmt, so erhalten wir sofort (vergl. 297, LX.), wenn wir nur Skalare der Producte von Vectoren nehmen, und ohne irgend welchen Bezug auf Flächen (vergleiche indessen 297, LXIX., und 298, VII.), die Gleichungen,

$$\begin{aligned} \text{XVII.} \ldots 4 \cos a \cos b' \cos c' &= 4 \cos b \cos c' \cos a' \\ &= 4 \cos c \cos a' \cos b' \\ &= -r^{-2} S(\zeta + \delta)(\delta + \varepsilon) = \text{u. s. w.} \\ &= 1 + \cos 2a' + \cos 2b' + \cos 2c'; \end{aligned}$$

oder

$$\text{XVIII.} \ldots \frac{\cos a}{\cos a'} = \frac{\cos b}{\cos b'} = \frac{\cos c}{\cos c'} = \frac{\cos a'^2 + \cos b'^2 + \cos c'^2 - 1}{2 \cos a' \cos b' \cos c'};$$

sie können in der That auf andere Weise durch die bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie abgeleitet werden.

(14.) Wir sehn daher, dass, je nachdem die Summe der Quadrate der Cosinus der halben Seiten eines gegebnen oder angenommenen sphärischen Dreiecks, DEF, grösser als die Einheit ist, oder ihr gleich, oder kleiner als die Einheit, die Seiten des eingeschriebnen oder halbirenden Dreiecks, ABC,

Digitized by Google

zusammen kleiner als Quadranten sind, oder zusammen gleich Quadranten, oder zusammen grösser als Quadranten.

(15.) Umgekehrt, wenn die Seiten eines gegebnen sphärischen Dreiecks ABC somit sämmtlich kleiner, oder sämmtlich grösser als Quadranten sind, so kann ein Dreieck DEF, aber nur ein* solches Dreieck ihm umschrieben werden, so dass seine Seiten in der vorigen Weise halbirt werden; das einfachste Verfahren ist, dass man ein Loth, wie es CQ in Fig. 68 ist. von C auf AB fällt, u. s. w.; und dann neue Bogen durch C, u. s. w., senkrecht zu diesen Lothen, und daher der Lage nach mit den gesuchten Seiten DE, u. s. w., von DEF zusammenfallend, zieht.

(16.) Die trigonometrischen Resultate der letzten Nebenartikel sind, besonders was die Fläche** eines sphärischen Dreiecks betrifft, wahrscheinlich sämmtlich wohlbekannt, wie es sicherlich einige von ihnen sind; aber sie sind hier nur in Verbindung mit quaternion Formeln vorgebracht worden. Und als eine, welche zu dieser Klasse gehört, und nicht ohne Bedeutung für den vorliegenden Gegenstand ist, und die Formel 294, LIII. einschliesst, mag die folgende erwähnt werden, in der α, β, γ irgend welche drei Vectoren bezeichnen, in der aber die Anordnung der Factoren von Wichtigkeit ist:

$$\text{XIX.}\ldots (\alpha\beta\gamma)^2 = 2\alpha^2\beta^2\gamma^2 + \alpha^2(\beta\gamma)^2 + \beta^2(\alpha\gamma)^2 + \gamma^2(\alpha\beta)^2 - 4\alpha\gamma\, S\alpha\beta\, S\beta\gamma.$$

(17.) Und wenn wir, wie in 297, (1.), u. s. w., annehmen, dass α, β, γ drei Einheitsvectoren, OA, OB, OC, sind, und

---

* Im nächsten Artikel werden wir einen Fall von Unbestimmtheit, oder einen Fall, in dem unendlich viele umschriebne Dreiecke DEF existiren, in Betracht ziehn; nämlich, wenn die Seiten von ABC sämmtlich Quadranten gleich sind.

** Ich ergreife diese Gelegenheit, um auf eine interessante Anmerkung auf Seite 96, 97 von Luby's Trigonometrie (Dublin, 1852) Bezug zu nehmen; in ihr wird eine elegante Construction, welche mit der Fläche eines sphärischen Dreiecks im Zusammenhang steht, bekannt gegeben, welche dem Dr. Luby gegenüber von einem seitdem verstorbenen und betrauerten Freunde, dem Rev. William Digby Sadleir, F. T. C. D, erwähnt worden ist. Eine fast ebensolche Construction, welche in den Nebenartikeln zu 297 beschrieben wurde, wurde vom Verfasser dieser Zeilen vor einigen Jahren mit Hülfe der Quaternionen aufgefunden.

Digitized by Google

wenn wir mit σ, wie in 297, (47.), die Fläche des Dreiecks ABC bezeichnen, so kann der durch die letzte Formel XIII. ausgedrückte Satz unter der scheinbar verschiedenen, im Wesentlichen dagegen gleichbedeutenden Form ausgesprochen werden:

$$\text{XX.}\ldots \frac{\alpha+\beta}{\beta+\gamma}\cdot\frac{\gamma+\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\frac{\beta+\gamma}{\gamma+\alpha} = \cos\sigma + \alpha\sin\sigma;$$

und er lässt sich auf verschiedene Weise verificiren.

(18.) Wir können sie, zum Beispiel, in folgender Weise (vergl. 297, LXVII.) transformiren:

$$\text{XXI.}\ldots \frac{-(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}{K(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)} = \frac{-2e+2\alpha(1+l+m+n)}{+2e+2\alpha(1+l+m+n)}$$

$$= \frac{1+l+m+n+e\alpha}{1+l+m+n-e\alpha}$$

$$= \frac{1+\alpha\tan\frac{\sigma}{2}}{1-\alpha\tan\frac{\sigma}{2}} = \frac{\cos\frac{\sigma}{2}+\alpha\sin\frac{\sigma}{2}}{\cos\frac{\sigma}{2}-\alpha\sin\frac{\sigma}{2}}$$

$$= \left(\cos\frac{\sigma}{2}+\alpha\sin\frac{\sigma}{2}\right)^2 = \cos\sigma+\alpha\sin\sigma,$$

wie vorher.

(19.) Hier scheint mir der natürliche Platz zu bemerken [vergl. (16.)], dass wenn α, β, γ, δ irgend vier Vectoren sind, die zuletzt erwähnte Gleichung 294, LIII., und das Quadrat der Gleichung 294, XV., wenn man in ihr δ anstatt ρ schreibt, leicht zu der folgenden sehr allgemeinen und symmetrischen Formel führen:

$$\begin{aligned}\text{XXII.}\ldots\ &\alpha^2\beta^2\gamma^2\delta^2 + (S\beta\gamma\,S\alpha\delta)^2 + (S\gamma\alpha\,S\beta\delta)^2 + (S\alpha\beta\,S\gamma\delta)^2\\ &+ 2\alpha^2 S\beta\gamma\,S\beta\delta\,S\gamma\delta + 2\beta^2 S\gamma\alpha\,S\gamma\delta\,S\alpha\delta\\ &+ 2\gamma^2 S\alpha\beta\,S\alpha\delta\,S\beta\delta + 2\delta^2 S\alpha\beta\,S\beta\gamma\,S\gamma\alpha\\ =\ &2S\gamma\alpha\,S\alpha\beta\,S\beta\delta\,S\gamma\delta + 2S\alpha\beta\,S\beta\gamma\,S\gamma\delta\,S\alpha\delta\\ &+ 2S\beta\gamma\,S\gamma\alpha\,S\alpha\delta\,S\beta\delta + \beta^2\gamma^2(S\alpha\delta)^2\\ &+ \gamma^2\alpha^2(S\beta\delta)^2 + \alpha^2\beta^2(S\gamma\delta)^2 + \alpha^2\delta^2(S\beta\gamma)^2\\ &+ \beta^2\delta^2(S\gamma\alpha)^2 + \gamma^2\delta^2(S\alpha\beta)^2.\end{aligned}$$

(20.) Wenn wir daher irgend ein sphärisches Vierseit $ABCD$ nehmen, und schreiben

$$\begin{aligned}\text{XXIII.}\ldots\ l &= \cos AD = -SU\alpha\delta,\\ m' &= \cos BD = -SU\beta\delta,\\ n' &= \cos CD = -\ \text{u. s. w.},\end{aligned}$$

indem wir α, β, γ als die Einheitsvectoren der Punkte A, B, C behandeln, und l, m, n als die Cosinus der Bogen BC, CA, AB, wie in 297, (1.), so erhalten wir die Gleichung,

$$\begin{aligned}\text{XXIV.}\ldots\ 1 + l^2l'^2 + m^2m'^2 + n^2n'^2 + 2lm'n' + 2mn'l' \\ + 2nl'm' + 2lmn \\ = 2mnm'n' + 2nln'l' + 2lml'm' + l^2 + m^2 \\ + n^2 + l'^2 + m'^2 + n'^2;\end{aligned}$$

sie kann durch elementare Betrachtungen* bestätigt werden, aber sie wird hier nur als eine Deutung der quaternion Formel XXII. gegeben.

(21.) Als wir die zuletzt erwähnte Gleichung 294, XV. quadrirten, haben wir die beiden folgenden Transformationsformeln (vergl. 204, XXII., und 210, XVIII.) benutzt, in denen α, β, γ irgend drei Vectoren sein können, und welche man oft als nützlich finden wird:

$$\text{XXV.}\ldots\ (V\alpha\beta)^2 = (S\alpha\beta)^2 - \alpha^2\beta^2;$$
$$\text{XXVI.}\ldots\ S(V\beta\gamma . V\gamma\alpha) = \gamma^2 S\alpha\beta - S\beta\gamma\, S\gamma\alpha.$$

299. Die beiden Fälle, in welchen die drei Seiten a, b, c des gegebnen Dreiecks ABC sämmtlich kleiner, oder sämmtlich grösser als Quadranten sind, sind in den beiden vorhergehenden Artikeln betrachtet worden, und ferner eine Zurückführung gewisser anderer Fälle auf sie, in 298, (10.) und (11.); es bleibt nur übrig, den dritten Hauptfall in Betracht zu ziehn, bei welchem die Seiten des gegebnen Dreiecks sämmtlich gleich Quadranten sind: oder zu untersuchen, was die vierte Proportionale zu drei zu einander rechtwinkligen Vectoren nach unseren allgemeinen Sätzen ist. Und wir werden finden, nicht nur, dass diese vierte Proportionale nicht selbst ein Vector ist, sondern auch, dass sie selbst nicht irgend einen vector Theil (292) enthält, welcher von Null verschieden ist: obwohl sie noch, da wir sie gleich einem Skalar finden wer-

* Eine Formel, welche mit dieser letzten aus siebzehn Gliedern bestehenden Gleichung gleichbedeutend ist, und welche die sechs Cosinus der Bogen in Zusammenhang setzt, welche die Ecken eines sphärischen Vierseits $ABCD$ zu je zweien verbinden, wird auf Seite 407 von Carnot's Géométrie de Position (Paris, 1803) gegeben.

Digitized by Google

den, in dem allgemeinen Begriff eines Quaternions eingeschlossen (131, 276) ist.

(1.) In der That, wenn wir annehmen, in 297, (1.), dass

$$\text{I.}\ldots l = 0, \qquad m = 0, \qquad n = 0,$$

oder dass

$$\text{II.}\ldots a = b = c = \frac{\pi}{2},$$

oder

$$\text{III.}\ldots S\beta\gamma = S\gamma\alpha = S\alpha\beta = 0,$$

während

$$\text{IV.}\ldots T\alpha = T\beta = T\gamma = 1,$$

so ergeben die Formeln 297, VII.,

$$\text{V.}\ldots \delta = 0, \qquad \varepsilon = 0, \qquad \zeta = 0;$$

das sind aber die vector Theile der drei Paare vierter Proportionalen zu den drei zu einander rechtwinkligen Einheitslinien, α, β, γ, wenn man sie in allen möglichen Aufeinanderfolgen nimmt; und dasselbe Verschwinden der vector Theile muss augenscheinlich statt haben, wenn die drei gegebnen Linien nur rechte Winkel mit einander bilden, ohne gleich lang zu sein.

(2.) Wenn man indessen, der Einfachheit wegen, fortfährt anzunehmen, dass sie Einheitslinien sind, und dass die Drehung um α von β nach γ negativ ist, wie vorher, so sehn wir, dass wir jetzt $r = 0$, und $e = 1$ haben, wie in 297, (3.); und dass sich somit die sechs vierten Proportionalen von selbst auf ihre skalar Theile reduciren, nämlich (hier) auf die positive oder negative Einheit. In dieser Weise finden wir, unter den angenommenen Bedingungen, die Werthe:

$$\text{VI.}\ldots \beta\alpha^{-1}\gamma = \gamma\beta^{-1}\alpha = \alpha\gamma^{-1}\beta = +1;$$
$$\text{VI}'\ldots \gamma\alpha^{-1}\beta = \alpha\beta^{-1}\gamma = \beta\gamma^{-1}\alpha = -1.$$

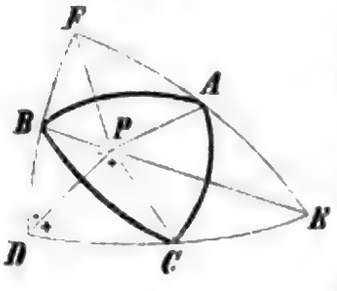
(3.) So erhalten wir, zum Beispiel (vergl. 295), nach den Gesetzen (182) von i, j, k, die Werthe,

$$\text{VII.}\ldots ij^{-1}k = jk^{-1}i = ki^{-1}j = +1;$$
$$\text{VII}'\ldots kj^{-1}i = ik^{-1}j = ji^{-1}k = -1.$$

In der That sind die beiden vierten Proportionalen, $ij^{-1}k$ und $kj^{-1}i$, bezüglich den beiden ternären Producten, $-ijk$ und $-kji$, gleich, und daher gleich $+1$ und gleich -1, nach den Gesetzen, welche in der Grundformel A (183) enthalten sind.

(4.) Um dieses wichtige Resultat mit den Constructionen der beiden letzten Artikel in Zusammenhang zu setzen, mögen wir beachten, dass wenn wir, in dem allgemeinen Sinne von 298, (15.), ein sphärisches Dreieck, DEF, einem gegebnen, aus drei Quadranten bestehenden (oder dreimal rechtwinkligen) Dreieck, ABC, zu umschreiben suchen, wie zum Beispiel dem Dreieck IJK (oder JIK) von 181, in einer solchen Weise, dass die Seiten des neuen Dreiecks durch die Ecken des vorigen halbirt werden, sich zeigt, dass das Problem unendlich viele Lösungen zulässt. Man kann irgend einen Punkt P, im Innern des gegebnen Dreiecks ABC, annehmen; und wenn man dann seine Spiegelbilder D, E, F nimmt, in Bezug auf die drei Seiten a, b, c, so dass (vergl. Fig. 72) die Bogen PD, PE, PF senkrecht zu jenen drei Seiten sind und durch sie halbirt werden, so werden die drei andern Bogen EF, FD, DE durch die Punkte A, B, C halbirt, wie gefordert wurde: denn die Bogen AE, AF haben jeder dieselbe Länge wie AP, und die Winkel, welche bei A durch PE und PF umspannt werden, sind zusammen gleich zwei rechten Winkeln, u. s. w.

Fig. 72.



(5.) Die Lagen der Hülfspunkte D, E, F sind daher, in dem gegenwärtigen Falle, unbestimmt, oder variabel; dagegen ist die Summe der Winkel bei diesen drei Punkten constant, und gleich vier rechten Winkeln; denn, nach den sechs gleichschenkligen Dreiecken über PD, PE, PF als Basen, ist diese Summe der drei Winkel D, E, F gleich der Summe der Winkel, welche durch die Seiten des gegebnen Dreiecks ABC in dem angenommenen inneren Punkte P umspannt werden. Der sphärische Excess des Dreiecks DEF ist daher gleich zwei rechten Winkeln, und seine Fläche $\Sigma = \pi$; wie das anderweitig aus derselben Figur 72 hätte ersehn werden können, und aus der Formel 297, LV., oder LVI. hätte geschlossen werden können.

(6.) Der Radius OD, in der Formel 297, XLVII., für die vierte Proportionale $\beta\alpha^{-1}\gamma$, wird daher, in dem gegen-

wärtigen Falle, unbestimmt; aber da der Winkel $L'DR$, oder $\frac{1}{2}(\pi - \Sigma)$, in derselben Gleichung, verschwindet, so wird die Formel einfach $\beta\alpha^{-1}\gamma = 1$, wie in den vorigen Gleichungen VI.; und ähnliches gilt in anderen Beispielen von der hier betrachteten Klasse.

(7.) Der Schluss, dass die vierte Proportionale zu drei rechtwinkligen Linien ein Skalar ist, kann auf verschiedenen anderen Wegen aus den Sätzen des vorliegenden Theiles abgeleitet werden. Zum Beispiel, mit den vorigen Annahmen können wir schreiben,

$$\begin{aligned} \text{VIII.}\ldots\ \beta\alpha^{-1} &= -\gamma, \\ \gamma\beta^{-1} &= -\alpha, \\ \alpha\gamma^{-1} &= -\beta; \\ \text{VIII}'.\ldots\ \gamma\alpha^{-1} &= +\beta, \\ \alpha\beta^{-1} &= +\gamma, \\ \beta\gamma^{-1} &= +\alpha; \end{aligned}$$

die drei vierten Proportionalen VI. sind daher, bezüglich, gleich $-\gamma^2$, $-\alpha^2$, $-\beta^2$, und folglich gleich $+1$; während die entsprechenden Ausdrücke VI'. gleich $+\beta^2$, $+\gamma^2$, $+\alpha^2$ sind, und daher gleich -1.

(8.) Oder [vergl. (3.)] wir können allgemein die Umformung (vergl. 282, XXI.*) hinschreiben,

$$\text{IX.}\ldots\ \beta\alpha^{-1}\gamma = \alpha^{-2}.\beta\alpha\gamma,$$

wenn

$$\alpha^{-2} = 1 : \alpha^2;$$

und in ihr ist der Factor α^{-2} stets ein Skalar, was für ein Vector α auch sein mag; während der vector Theil des ternären Productes $\beta\alpha\gamma$, nach 294, III., verschwindet, wenn die vorigen Bedingungen für die Rechtwinkligkeit III. befriedigt werden.

(9.) Umgekehrt, das ternäre Product $\beta\alpha\gamma$, und die vierte Proportionale $\beta\alpha^{-1}\gamma$, können sich niemals selbst auf Skalare reduciren, wenn nicht die drei Vectoren α, β, γ [die sämmtlich als wirklich (Art. 1) angenommen werden] zu einander senkrecht sind.

* Die Formel, auf die hier Bezug genommen wird, hätte $R\alpha = 1 : \alpha = \alpha^{-1}$ gedruckt werden sollen.

Achter Abschnitt.

Ueber eine gleichbedeutende Interpretation der vierten Proportionale zu drei diplanaren Vectoren, welche aus den Sätzen des zweiten Theils abgeleitet ist.

300. In dem vorhergehenden Abschnitt wandten wir naturgemäss die Resultate der vorigen Abschnitte dieses Theiles an, uns zu unterstützen, der vierten Proportionale (297) zu drei diplanaren Vectoren eine bestimmte Bedeutung beizulegen; und somit machten wir von den beiläufig, in diesem dritten Theile, erhaltenen Deutungen von α^{-1} als eine Linie, und von $\alpha\beta$, $\alpha\beta\gamma$ als Quaternionen Gebrauch, um das Symbol $\beta\alpha^{-1}\gamma$ zu deuten. Aber es kann von Interesse sein, und nicht ohne Belehrung, zu untersuchen, wie das gleichbedeutende Symbol,

$$\text{I.}\ldots(\beta:\alpha).\gamma,$$

oder

$$\frac{\beta}{\alpha}\gamma,$$

wenn

$$\gamma \text{ nicht } \parallel \alpha, \beta,$$

nach den Sätzen des zweiten Theils hätte gedeutet werden können, ohne irgend eine Deutung der drei zuletzt erwähnten Symbole,

$$\text{II.}\ldots\alpha^{-1}, \quad \alpha\beta, \quad \alpha\beta\gamma,$$

von Anfang an als bekannt anzunehmen, oder auch nur zu versuchen, sie zu entdecken. Wir werden finden, dass die Untersuchung zu einem Ausdruck von der Form,

$$\text{III.}\ldots(\beta:\alpha).\gamma = \delta + eu,$$

führt; wo δ derselbe Vector, und e derselbe Skalar ist, wie in den vorigen Nebenartikeln zu 297; während u als ein augenblickliches Symbol angewandt wird, um eine gewisse vierte Proportionale zu drei rechtwinkligen Einheitslinien zu bezeichnen, nämlich diejenige zu den drei Linien OQ, OL', und OP in Fig. 68; so dass wir, mit Bezug auf die durch diese Figur dargestellte Construction, durch die Sätze des zweiten Theils darauf hingeführt werden würden, die Gleichung hinzuschreiben:

$$\text{IV.}\ldots(OB:OA).OC = OD.\cos\tfrac{1}{2}\Sigma + (OL':OQ).OP.\sin\tfrac{1}{2}\Sigma.$$

Digitized by Google

Und wenn wir dazu übergehn, in Betracht zu ziehn, welche Bedeutung, nach den Sätzen desselben zweiten Theils, mit der besonderen vierten Proportionale verknüpft werden würde, welche hier der Coefficient von $\sin\frac{1}{2}\Sigma$ ist, und einstweilen mit u bezeichnet worden ist, so finden wir, dass sie, obwohl sie in einem Sinne als eine Linie angesehn werden kann, oder wenigstens als gleichartig mit einer Linie, doch nicht irgend einem Vector gleich gesetzt werden muss: sie entspricht vielmehr der skalar Einheit der Algebra, in der Geometrie, so dass sie naturgemäss und nach Uebereinkunft durch das übliche Symbol 1, oder + 1, bezeichnet werden kann, oder der positiven Einheit gleich gesetzt werden kann. Wenn wir aber danach schreiben $u = 1$, so wird das letzte Glied der Formel III. oder IV., des gegenwärtigen Artikels, einfach ϵ, oder $\sin\frac{1}{2}\Sigma$; und während dieses Glied (oder dieser Theil) des Resultates als eine Art geometrischen Skalars betrachtet wird, nimmt der vollständige Ausdruck für die allgemeine vierte Proportionale zu drei diplanaren Vectoren die Form eines geometrischen Quaternions an: und somit wird die Formel 297, XLVII., oder 298, VIII., reproducirt, wenigstens wenn wir in ihr, für jetzt, $(\beta:\alpha).\gamma$ für $\beta\alpha^{-1}\gamma$ einsetzen, um die Nothwendigkeit hier die vorigen Symbole II. zu deuten zu umgehn.

(1.) Wenn man die Construction der Fig. 68 beibehält, aber keinen von den Sätzen anwendet, welche dem dritten Theil im Besondern eigen sind, so können wir, mit denselben Bedeutungen von c, p, u. s. w., wie vorher, schreiben,

$$\text{V.}\ldots\ OB:OA = OR:OQ = \cos c + (OL':OQ)\operatorname{sinc} c;$$

$$\text{VI.}\ldots\ OC = OQ.\cos p + OP.\sin p.$$

(2.) Lässt man daher, wie es natürlich ist, für den Zweck eine Deutung zu suchen, jene distributive Eigenschaft zu, welche wie bewiesen (212) worden ist, für die Multiplication von Quaternionen gültig ist, (wie sie es für die Multiplication in der Algebra ist), und schreibt zur Abkürzung,

$$\text{VII.}\ldots\ u = (OL':OQ).OP;$$

so erhalten wir den viergliedrigen Ausdruck:

$$\text{VIII.}\ldots\ (OB:OA).OC = OL'.\sin c\cos p + OQ.\cos c\cos p + OP.\cos c\sin p + u.\sin c\sin p;$$

und in ihm mag man beachten, dass die Summe der Quadrate der vier Coëfficienten der drei rechtwinkligen Einheitsvectoren, OQ, OL', OP, und ihrer vierten Proportionale, u, gleich der Einheit ist.

(3.) Dagegen ist der Coëfficient dieser vierten Proportionale, welcher als eine Art von vierter Einheit betrachtet werden kann,

$$\text{IX.} \ldots \sin c \sin p = \sin MN = \sin \tfrac{1}{2}\Sigma = e;$$

wir müssen daher erwarten, zu finden, dass die drei anderen Coëfficienten in VIII., wenn sie mit $\cos \frac{1}{2}\Sigma$, oder mit r, dividirt werden, Quotienten ergeben, welche die Cosinus der Bogenentfernungen eines gewissen Punktes X auf der Einheitskugel von den drei Punkten L', Q, P sind; oder dass ein Punkt X bestimmt werden kann, für welchen

$$\begin{aligned} \text{X.} \ldots \sin c \cos p &= r \cos L'X; \\ \cos c \cos p &= r \cos QX; \\ \cos c \sin p &= r \cos PX. \end{aligned}$$

(4.) Demgemäss findet man, dass die drei letzten Gleichungen befriedigt werden, wenn wir D für X einsetzen; und dass wir daher die Transformation haben,

$$\begin{aligned} \text{XI.} \ldots OL' . \sin c \cos p + OQ . \cos c \cos p + OP . \cos c \sin p \\ = OD . \cos \tfrac{1}{2}\Sigma = \delta, \end{aligned}$$

und daraus folgen die Gleichungen IV. und III.; und es bleibt nur übrig die vierte Einheit, u, zu studiren und zu deuten, welche als ein Factor in den übrigbleibenden Theil des viergliedrigen Ausdrucks VIII. eingeht, ohne irgend welche Sätze mit Ausnahme derjenigen anzuwenden, welche im zweiten Theil vorkommen: und daher ohne Benutzung der Deutungen 278, 284, von $\beta\alpha$, u. s. w.

(301.) Im Allgemeinen ist es natürlich, wenn zwei Reihen von je drei Vectoren, α, β, γ, und α', β', γ', durch die Beziehung,

$$\text{I.} \ldots \frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{\alpha'}{\beta'} = 1,$$

oder durch

$$\text{II.} \ldots \frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\beta'}{\alpha'},$$

Digitized by Google

verbunden sind, die weitere Gleichung zu schreiben,

$$\text{III.}\ldots \frac{\beta}{\alpha}\gamma = \frac{\beta'}{\alpha'}\gamma';$$

und zu sagen, dass die beiden vierten Proportionalen (297), zu α, β, γ, und zu α', β', γ', einander gleich sind: was wir auch immer später als die vollständige Bedeutung eines jeden der beiden letzten Symbole III., die wir uns für den Augenblick als noch nicht völlig bekannt denken, finden mögen. Oder kurz, wir können vorschlagen, es zur Bedingung für die nach den Sätzen des zweiten Theils gesuchte Deutung der Phrase,

„Vierte Proportionale zu drei Vectoren",

oder eines jeden der beiden gleichbedeutenden Symbole 300, I., zu machen, dass die vorige Gleichung III. aus I. oder II. folgen soll; grade so, wie wir, zu Anfang des zweiten Theils, und bevor wir schlossen (112), dass der allgemeine geometrische Quotient $\beta:\alpha$ irgend zweier Linien im Raume ein Quaternion ist, es zur Bedingung (103) für die Deutung eines solchen Quotienten machten, dass die Gleichung $(\beta:\alpha).\alpha = \beta$ befriedigt werden sollte.

302. Es sind indessen zwei Proben (vergl. 287), denen die vorige Gleichung III. unterworfen werden muss, bevor wir sie endgültig annehmen können; und zwar damit wir sicher sein können, dass sie übereinstimmt: I. mit der vorgängigen Deutung (226) einer vierten Proportionale zu drei complanaren Vectoren, als einer Linie in ihrer gemeinsamen Ebne; und II. mit dem allgemeinen Grundsatz aller mathematischen Sprechweise (105), dass Dinge, welche demselben Ding gleich sind, als einander gleich anzusehn sind. Und man findet durch den Versuch, dass sie diese beiden Proben besteht: so dass sie keinen Einwand für uns ergeben, die Gleichung 301, III., als eine laut Definition gültige, anzunehmen, wenn immer die vorhergehende Gleichung II., oder I., befriedigt wird.

(1.) Es kann vorkommen, dass das erste Glied der Gleichung III. gleich einer Linie δ ist, wie in 226; nämlich, wenn α, β, γ complanar sind. In diesem Falle erhalten wir nach II. die Gleichung,

$$\text{IV.}\ldots \frac{\delta}{\gamma'} = \frac{\delta}{\gamma}\frac{\gamma}{\gamma'} = \frac{\beta'}{\alpha'},$$

oder

$$\text{IV}' \ldots \frac{\beta'}{\alpha'} \gamma' = \delta = \frac{\beta}{\alpha} \gamma;$$

so dass α', β', γ' auch (unter einander) complanar sind, und die Linie δ ihre vierte Proportionale gleichfalls ist: die Gleichung III. wird befriedigt, ihre beiden Seiten sind Symbole für ein und dieselbe Linie, δ, die im Allgemeinen im Durchschnitt der beiden Ebnen, $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$, liegt; und diese Ebnen können auch zufällig zusammenfallen, ohne die Wahrheit der Gleichung zu beeinträchtigen.

(2.) Ferner können wir uns, in dem allgemeineren Falle, wenn α, β, γ diplanar sind, vorstellen, dass die Gleichung* II. zugleich mit der folgenden von derselben Form besteht,

$$\text{V} \ldots \frac{\beta}{\alpha} \frac{\gamma}{\gamma''} = \frac{\beta''}{\alpha''};$$

und sie ergiebt

$$\text{VI} \ldots \frac{\beta}{\alpha} \gamma = \frac{\beta''}{\alpha''} \gamma'',$$

wenn die Definition 301 angenommen wird. Wenn nun diese Definition mit allgemeinen Grundsätzen über Gleichheit im Einklang ist, so sollten wir, nach III. und VI., finden, dass die folgende dritte Gleichung zwischen zwei vierten Proportionalen statt hat:

$$\text{VII} \ldots \frac{\beta'}{\alpha'} \gamma' = \frac{\beta''}{\alpha''} \gamma'';$$

oder dass

$$\text{VIII} \ldots \frac{\beta'}{\alpha'} \frac{\gamma'}{\gamma''} = \frac{\beta''}{\alpha''},$$

wenn die Gleichungen II. und V. befriedigt werden. Und demgemäss ergeben diese beiden Gleichungen, nach den allgemeinen Sätzen des zweiten Theils, welche Quaternionen als Quotienten von Vectoren betrachtet betreffen, die Transformation,

---

* In diesen und anderen Fällen sind unter den erwähnten Zahlzeichen stets diejenigen gemeint, welche (unter derselben Zahlenbezeichnung) zuletzt vorgekommen sind, obwohl es vielleicht im Zusammenhange mit einem kurz vorhergehenden Artikel der Fall gewesen sein kann.

Digitized by Google

$$\frac{\beta'}{\alpha'}\,\frac{\gamma'}{\gamma''} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\gamma}{\gamma'}\,.\,\frac{\gamma'}{\gamma''} = \frac{\beta}{\alpha}\,\frac{\gamma}{\gamma''} = \frac{\beta''}{\alpha''},$$

wie gefordert wird.

303. Es ist daher erlaubt, die Gleichung 301, III., nach den Sätzen des zweiten Theils, einfach als eine Umformung (wie sie es in der Algebra ist) der unmittelbar vorhergehenden Gleichung II., oder I., zu deuten; und daher, allgemein, zu schreiben,

$$\text{I.}\,.\,q\gamma = q'\gamma',$$

wenn

$$\text{II.}\,.\,q(\gamma:\gamma') = q';$$

hier sind γ, γ' irgend zwei Vectoren, und q, q' sind irgend zwei Quaternionen, welche dieser letzten Bedingung genügen. Und jetzt haben wir, wenn v und v' irgend zwei rechte Quaternionen sind, (nach 193, vergl. 283) die Gleichung,

$$\text{III.}\,.\,.\,Iv:Iv' = v:v' = vv'^{-1};$$

oder

$$\text{IV.}\,.\,.\,v^{-1}(Iv:Iv') = v'^{-1};$$

und danach ist

$$\text{V.}\,.\,.\,v^{-1}.Iv = v'^{-1}.Iv',$$

nach dem Satze, der eben ausgesprochen worden ist. Es folgt daher, dass „wenn eine grade Linie (Iv) mit dem Reciproken (v^{-1}) des rechten Quaternions (v) multiplicirt wird, dessen Index sie ist, das Product ($v^{-1}Iv$) von der Länge und von der Richtung der Linie unabhängig ist, an der man operirt hat“; oder mit anderen Worten, dass dies Product ein und denselben Werth für alle möglichen Linien (α) im Raume hat: und dieser gemeinsame oder constante Werth kann als eine Art von neuer geometrischer Einheit angesehn werden, und ist dem gleich, was wir zuletzt, in 300, III., und IV., durch das für den Augenblick benutzte Symbol u bezeichnet haben; denn in der zuletzt erwähnten Formel ist die Linie OP der Index des rechten Quotienten $OQ:OL$. Behält man daher, für den Augenblick, dies Symbol u bei, so erhalten wir, für jede Linie α im Raume, wenn man sie als den Index eines rechten Quaternions, v, betrachtet, die vier Gleichungen:

$$\text{VI.}\,.\,v^{-1}\alpha = u;$$

$$\text{VII.}\,.\,\alpha = vu;$$

$$\text{VIII.}\ldots\ v = \alpha : u;$$
$$\text{IX.}\ldots\ v^{-1} = u : \alpha;$$

und hier ist gemeint, dass $\alpha = Iv$ ist, und die drei letzten sind hier nur als reine Umformungen der ersten anzusehn, welche wie vorher abgeleitet und gedeutet wird. Und daraus ist leicht zu schliessen, dass wir für irgend ein gegebnes System dreier rechtwinkligen Linien α, β, γ den allgemeinen Ausdruck haben:

$$\text{X.}\ldots\ (\beta : \alpha) \,.\, \gamma = xu,$$

wenn

$$\alpha \perp \beta, \quad \beta \perp \gamma, \quad \gamma \perp \alpha;$$

und der skalar Coëfficient, x, der neuen Einheit, u, wird durch die Gleichung,

$$\text{XI.}\ldots\ x = \pm (T\beta : T\alpha) \,.\, T\gamma,$$

bestimmt, je nachdem

$$\text{XII.}\ldots\ U\gamma = \pm \operatorname{Ax.}(\alpha : \beta).$$

Der Coëfficient x ist daher, an Grösse (oder dem absoluten Betrag nach), stets gleich der vierten Proportionale zu den Längen der drei gegebnen Linien $\alpha\beta\gamma$; aber er wird positiv oder negativ genommen, je nachdem die Drehung um die dritte Linie γ, von der zweiten Linie β zur ersten Linie α, selbst positiv oder negativ ist: oder mit anderen Worten, je nachdem die Drehung um die erste Linie, von der zweiten zur dritten, im Gegensatz mit dem vorigen negativ oder positiv [vergl. 294, (3.)] ist.

(1.) Um zu erläutern, dass die vierte Proportionale, welche für jetzt mit u bezeichnet worden ist, ungeändert bleibt, während das System der drei rechtwinkligen Einheitslinien, aus denen man sie abgeleitet denkt, in irgend einer Weise herumgedreht wird, mögen wir beachten, dass die drei Gleichungen, oder Proportionen,

$$\text{XIII.}\ldots\ u : \gamma = \beta : \alpha,$$
$$\gamma : \alpha = \alpha : -\gamma,$$
$$\beta : -\gamma = \gamma : \beta,$$

unmittelbar zu der vierten Gleichung von derselben Art,

$$\text{XIV.}\ldots\ u : \alpha = \gamma : \beta,$$

Digitized by Google

oder*

$$u = (\gamma : \beta) . \alpha ,$$

führen, wenn wir zulassen, dass man mit dieser neuen Grösse, oder mit diesem neuen Symbol, u, ganz und gar, oder in Verbindung mit anderen Symbolen, gemäss den allgemeinen Regeln für Vectoren und Quaternionen operirt.

(2.) Es ist daher gestattet, die drei Buchstaben α, β, γ durch eine cyklische Permutation mit den drei anderen Buchstaben β, γ, α (welche wieder als Darstellungen von Einheitslinien anzusehn sind) zu vertauschen, ohne den Werth der vierten Proportionale, u, zu verändern; oder mit anderen Worten, es ist erlaubt, das System der drei rechtwinkligen Linien um den dritten Theil von vier rechten Winkeln um die innere und coinitiale Diagonale des Einheitswürfels zu drehn, dessen drei coinitiale Kanten sie sind.

(3.) Und es ist noch augenscheinlicher, dass keine solche Veränderung des Werthes statt hat, wenn wir nur das System der beiden ersten Linien sich um die dritte Linie als Achse um irgend einen Winkel in seiner eignen Ebne drehn lassen; denn dann ersetzen wir nur den Factor $\beta : \alpha$ durch einen andern ihm gleichen. Wenn wir aber diese beiden letzten Arten der Drehung combiniren, so können wir irgend eine beliebige Drehung um einen als fest angenommenen Anfangspunkt darstellen.

(4.) Und was das skalar Verhältniss irgend einer vierten Proportionale, wie zum Beispiel $\beta' : \alpha' . \gamma'$, zu irgend einer anderen von der hier betrachteten Art betrifft, wie zum Beispiel zu $\beta : \alpha . \gamma$, oder zu u, so ist es genügend, daran zu erinnern, dass uns erlaubt ist, ohne die erstere irgendwie wirklich zu ändern, anzunehmen, dass sie so zugerichtet ist, dass wir haben

$$\text{XV.} \ldots \begin{aligned} \alpha' &= \alpha ; \\ \beta' &= \beta ; \\ \gamma' &= x\gamma ; \end{aligned}$$

* In Gleichungen von dieser Form können die Parenthesen fortgelassen werden, obwohl sie hier der grösseren Klarheit wegen beibehalten worden sind.

x ist hier ein gewisser skalar Coëfficient, und stellt das gewünschte Verhältniss dar.

304. In dem allgemeineren Falle, wenn die drei gegebnen Linien weder zu einander rechtwinklig, noch Einheitslinien sind, können wir nach ähnlichen Sätzen ihre vierte Proportionale bestimmen, ohne auf Fig. 68 Bezug zu nehmen, wie folgt. Ohne die Allgemeinheit irgend wie wirklich zu beeinträchtigen, können wir annehmen, dass die Ebnen von α, β, und von α, γ zu einander rechtwinklig sind; denn das kommt nur darauf hinaus, wenn es nothwendig ist, für den Quotienten $\beta : \alpha$ einen andern ihm gleichen Quotienten einzusetzen. Man hat somit

$$\text{I.} \ldots \text{Ax.}(\beta : \alpha) \perp \text{Ax.}(\gamma : \alpha),$$

und es sei

$$\text{II.} \ldots \beta = \beta' + \beta'',$$
$$\gamma = \gamma' + \gamma'',$$

wo β' und γ' parallel zu α, dagegen β'' und γ'' senkrecht zu ihm, und zu einander sind; so dass wir, nach 203, I. und II., die Ausdrücke erhalten,

$$\text{III.} \ldots \beta' = S\frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha,$$

$$\gamma' = S\frac{\gamma}{\alpha} \cdot \alpha,$$

und

$$\text{IV.} \ldots \beta'' = V\frac{\beta}{\alpha} \cdot \alpha,$$

$$\gamma'' = V\frac{\gamma}{\alpha} \cdot \alpha.$$

Wir können daher, nach dem distributiven Princip [300, (2.)], die Transformationen ableiten,

$$\text{V.} \ldots \frac{\beta}{\alpha} \cdot \gamma = \left(\frac{\beta'}{\alpha} + \frac{\beta''}{\alpha}\right)(\gamma' + \gamma'')$$
$$= \frac{\beta'}{\alpha}\gamma' + \frac{\beta'}{\alpha}\gamma'' + \frac{\beta''}{\alpha}\gamma''$$
$$= \delta + xu;$$

wo

$$\text{VI.} \ldots \delta = \beta S\frac{\gamma}{\alpha} + \gamma'' S\frac{\beta}{\alpha}$$
$$= \gamma S\frac{\beta}{\alpha} + \beta'' S\frac{\gamma}{\alpha},$$

Digitized by Google

und

$$\text{VII.} \ldots xu = \frac{\beta''}{\alpha}\gamma''.$$

Der letztere Theil, xu, ist, wie wir gesagt (300) haben, der (geometrische) skalar Theil der gesuchten vierten Proportionale; während der erstere Theil δ (wieder) ihr vector Theil genannt werden kann: und wir sehn, dass dieser Theil durch eine Linie dargestellt wird, welche zugleich in den beiden Ebnen von β, γ'', und von γ, β'' liegt; oder in den beiden Ebnen, welche im Allgemeinen in folgender Weise construirt werden können, ohne jetzt anzunehmen, dass die Ebnen $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ rechtwinklig sind, wie in I. Es sei γ' die Projection der Linie γ auf die Ebne von α, β, und man operire an dieser Projection mit dem Quotienten $\beta:\alpha$, wie mit einem Multiplicator; die Ebne, welche durch die so erhaltene Linie $\beta:\alpha.\gamma'$ unter rechtem Winkel zur Ebne $\alpha\beta$ gelegt ist, ist ein Ort für die gesuchte Linie δ; und die Ebne durch γ, welche senkrecht zur Ebne $\gamma\gamma'$ ist, ist ein anderer Ort für diese Linie. Und was die Länge dieser Linie, oder des vector Theils δ, betrifft, und die Grösse (oder den Betrag) des skalar Theils xu, so ist leicht zu beweisen, dass

$$\text{VIII.} \ldots T\delta = t\cos s,$$

und

$$\text{IX.} \ldots x = \pm t\sin s,$$

wo

$$\text{X.} \ldots t = T\beta : T\alpha . T\gamma,$$

und

$$\text{XI.} \ldots \sin s = \sin c \sin p,$$

wenn c den Winkel zwischen den beiden gegebnen Linien α, β bezeichnet, und p die Neigung der dritten gegebnen Linie γ zu ihrer Ebne; das Vorzeichen des skalar Coëfficienten, x, ist positiv oder negativ, je nachdem die Drehung um α von β nach γ negativ oder positiv ist.

(1.) Vergleicht man die letzte Construction mit Fig. 68, so sehn wir, dass, wenn der Bedingung I. genügt wird, die vier Einheitslinien $U\gamma$, $U\alpha$, $U\beta$, $U\delta$ die Richtungen der vier Radien OC, OQ, OR, OD annehmen, welche in den vier Ecken eines, wie wir sagen können, dreifach-rechtwinkligen Vierseits $CQRD$ auf der Kugel endigen.

(2.) Es mag bemerkt werden, dass die Fläche dieses Vierseits genau gleich der Hälfte der Fläche Σ des Dreiecks DEF ist; und das kann entweder aus dem Umstande geschlossen werden, dass sein sphärischer Excess (über vier rechte Winkel) durch den Winkel MDN construirt wird; oder aus den Dreiecken DBR und EAS, welche zusammen gleich dem Dreieck ABF sind, so dass die Fläche von $DESR$ gleich Σ ist, und daher diejenige von $CQRD$ gleich $\frac{1}{2}\Sigma$ ist, wie vorher.

(3.) Die beiden Seiten CQ, QR dieses Vierseits, welche vom stumpfen Winkel bei D entfernt liegen, mögen wieder p und c genannt werden, und die Seite CD, welche dem c gegenüber liegt, möge wieder mit c' bezeichnet werden, und es werde die Seite DR, welche dem p gegenüber liegt, jetzt p' genannt; es mögen auch die Diagonalen CR, QD mit d und d' bezeichnet werden; und es möge s den sphärischen Excess $(CDR - \frac{1}{2}\pi)$ bezeichnen, oder die Fläche des Vierseits. Wir haben dann die Beziehungen,

$$\text{XII.}\ldots \begin{cases} \cos d = \cos p \cos c\,; & \cos d' = \cos p \cos c'\,; \\ \tan c' = \cos p \tan c\,; & \tan p' = \cos c \tan p\,; \\ \cos s = \cos p \sec p' = \cos c \sec c' = \cos d \sec d'\,; \end{cases}$$

von denen einige dem Wesen nach vorher vorgekommen sind, und welche alle leicht durch rechtwinklige Dreiecke bewiesen werden. wobei die Bogen, wenn nöthig, verlängert werden mögen.

(4.) Wenn wir jetzt zwei Punkte, A und B, auf der Seite QR annehmen, welche der Bogengleichung (vergl. 297, XL., und Fig. 68),

$$\text{XIII.}\ldots \frown AB = \frown QR\,,$$

genügen, und wenn wir dann die Verbindung AC herstellen, und auf diesen neuen Bogen die Lothe BB', DD', fällen; so ist leicht zu beweisen, dass die Projection $B'D'$ der Seite BD auf den Bogen AC jenem Bogen gleich ist, und dass der Winkel DBB' ein rechter ist: so dass wir die beiden neuen Gleichungen haben,

$$\text{XIV.}\ldots \frown B'D' = \frown AC;$$
$$\text{XV.}\ldots DBB' = \tfrac{1}{2}\pi\,;$$

und das neue Vierseit $BB'D'D$ ist auch dreifach-rechtwinklig.

(5.) Daher kann der Punkt D von den drei Punkten ABC durch irgend zwei von den vier folgenden Bedingungen abgeleitet werden: I. aus der Gleichheit XIII. der Bogen AB, QR; II. aus der entsprechenden Gleichheit XIV. der Bogen AC, $B'D'$; III. aus dem dreifach-rechtwinkligen Charakter des Vierseits $CQRD$; IV. aus dem entsprechenden Charakter von $BB'D'D$.

(6.) Mit anderen Worten, der abgeleitete Punkt D ist der gemeinsame Durchschnittspunkt der vier Lothe zu den vier Bogen AB, AC, CQ, BB', welche in den vier Punkten R, D', C, B errichtet sind; CQ, BB' sind wieder die Lothe von C und B, auf AB und AC; und R und D' werden aus Q und B' durch gleiche Bogen abgeleitet, wie vorher.

305. Diese Folgerungen aus der in 297, u. s. w. angewandten Construction werden hier nur im Zusammenhang mit der Theorie der vierten Proportionalen zu Vectoren erwähnt, zu deren Erläuterung sie gedient haben; aber sie sind vielleicht zahlreich und interessant genug, um zu rechtfertigen, wenn wir den Namen, „sphärisches Parallelogramm“,* dem Vierseit $CABD$, oder $BACD$, in Fig. 68 (oder 67) beilegen, und vorschlagen zu sagen, dass D der vierte Punkt ist, welcher ein solches Parallelogramm vervollständigt, wenn die drei Punkte C, A, B, oder B, A, C, auf der Kugel als erster, zweiter und dritter Punkt gegeben sind. Es muss indessen sorgfältig beachtet werden, dass die Analogie mit der Ebne hier insofern unvollkommen ist, als in dem allgemeinen Falle, wenn die drei gegebnen Punkte nicht coarcual sind, sondern im Gegentheil Ecken eines sphärischen Dreiecks ABC, dann der neue vierte Punkt, nennen wir ihn A_1, wenn wir C, D, B, oder B, D, C, als die drei ersten Punkte eines neuen sphärischen Parallelogramms von der hier betrachteten Art annehmen, nicht mit dem vorigen zweiten Punkt A zusammenfällt; obwohl es nahezu der Fall sein wird, wenn die Seiten des Dreiecks ABC klein sind: man findet in der That, dass die Abweichung AA_1 klein von der dritten Ordnung ist, wenn die Seiten des ge-

* Nach derselben Analogie könnte man das Vierseit $CQRD$, in Fig. 68, ein sphärisches Rechteck nennen.

gebnen Dreiecks als klein von der ersten Ordnung angenommen werden; und sie ist stets nach dem Fusspunkt des Lothes gerichtet, welches von A auf BC gefällt ist.

(1.) Um das Gesetz dieser Abweichung zu erforschen, mögen β, γ wieder irgend zwei gegebne Einheitsvectoren OB, OC sein, welche mit einander einen Winkel gleich a machen, dessen Cosinus l ist; und es sei ϱ oder OP irgend ein dritter Vector. Wenn wir dann schreiben,

$$\text{I.} \ldots \varrho_1 = \varphi(\varrho) = \tfrac{1}{2} N\varrho \cdot \left(\frac{\beta}{\varrho}\, \gamma + \frac{\gamma}{\varrho}\, \beta \right),$$
$$OQ = U\varrho,$$
$$OQ_1 = U\varrho_1,$$

so ist der neue oder abgeleitete Vector, $\varphi\varrho$ oder ϱ_1, oder OP_1, der gemeinsame vector Theil der beiden vierten Proportionalen zu ϱ, β, γ, und zu ϱ, γ, β, multiplicirt mit dem Quadrat der Länge von ϱ; und $BQCQ_1$ ist — wie wir es kürzlich genannt haben — ein sphärisches Parallelogramm. Wir haben auch die Transformation [vergl. 297, (2.)],

$$\text{II.} \ldots \varrho_1 = \varphi\varrho = \beta S \frac{\varrho}{\gamma} + \gamma S \frac{\varrho}{\beta} - \varrho S \frac{\gamma}{\beta};$$

und das distributive Operationssymbol φ ist von solcher Beschaffenheit, dass

$$\text{III.} \ldots \varphi\varrho \parallel \beta, \gamma,$$

und

$$\varphi^2\varrho = \varrho,$$

wenn

$$\varrho \parallel \beta, \gamma;$$

dagegen ist

$$\text{IV.} \ldots \varphi\varrho = -l\varrho,$$

wenn

$$\varrho \parallel \text{Ax.}(\gamma : \beta).$$

(2.) Nachdem man dies eingesehn hat, nehme man an

$$\text{V.} \ldots \varrho = \varrho' + \varrho''; \qquad \varphi\varrho' = \varrho_1';$$
$$\varrho' \parallel \beta, \gamma; \qquad \varrho'' \parallel \text{Ax.}(\gamma : \beta);$$

so dass ϱ', oder OP', die Projection von ϱ auf die Ebne von $\beta\gamma$ ist; und ϱ'', oder OP'', der Theil (oder die Componente) von ϱ ist, welche senkrecht zu dieser Ebne ist. Dann erhalten wir eine unendliche Reihe von abgeleiteten Vectoren,

Digitized by Google

$\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ oder besser zwei solche Reihen, die einander wechselweise folgen, wie folgt:

$$\text{VI.}\ldots\begin{cases} \varrho_1 = \varphi\varrho = \varrho'_1 - l\varrho''; & \varrho_2 = \varphi^2\varrho = \varrho' + l^2\varrho''; \\ \varrho_3 = \varphi^3\varrho = \varrho'_1 - l^3\varrho''; & \varrho_4 = \varphi^4\varrho = \varrho' + l^4\varrho''; \end{cases}$$

u. s. w.; die beiden Reihen von abgeleiteten Punkten, $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ sind somit, abwechselnd, auf den beiden Lothen, PP' und $P_1P'_1$, angeordnet, welche von den Punkten P und P_1 auf die gegebne Ebne BOC gefällt sind; und die Abstände, $PP_2, P_1P_3, P_2P_4, \ldots$ bilden eine geometrische Progression, in der ein jeder gleich dem ihm vorhergehenden ist, multiplicirt mit dem constanten Factor $-l$, oder mit dem negativen Werthe des Cosinus des gegebnen Winkels BOC.

(3.) Wenn nun dieser Winkel wieder als von 0 und π verschieden angenommen wird, und im Allgemeinen auch von dem zwischenliegenden Werthe $\frac{1}{2}\pi$, so erhalten wir die beiden Grenzwerthe,

$$\text{VII.}\ldots \varrho_{2n} = \varrho', \qquad \varrho_{2n+1} = \varrho'_1,$$

wenn

$$n = \infty;$$

oder mit Worten, die abgeleiteten Punkte $P_2, P_4, \ldots$ von grader Ordnung, streben dem Punkte P', und die anderen abgeleiteten Punkte, $P_1, P_3, \ldots$ von ungrader Ordnung, streben dem anderen Punkte P'_1, als Grenzlagen, zu: diese beiden Grenzpunkte sind die Fusspunkte der beiden (gradlinigen) Lothe, welche (wie vorher) von P und P' auf die Ebne BOC gefällt sind.

(4.) Aber grade die erste Abweichung PP_2 ist klein von der dritten Ordnung, wenn die Länge $T\varrho$ der Linie OP weder als gross noch als klein angesehn wird, und wenn die Seiten des sphärischen Dreiecks BQC klein von der ersten Ordnung sind. Denn wir haben nach VI. die folgenden Ausdrücke für diese Abweichung,

$$\begin{aligned}\text{VIII.}\ldots PP_2 = \varrho_2 - \varrho &= (l^2 - 1)\,\varrho'' \\ &= -\sin\alpha^2 . \sin p_\alpha . T\varrho . U\varrho'';\end{aligned}$$

hier bezeichnet p_α die Neigung der Linie ϱ zur Ebne $\beta\gamma$; oder das Bogenloth vom Punkte Q auf die Seite BC, oder α,

des Dreiecks. Die kürzlich (305) aufgestellten Sätze werden damit bewiesen, und sind correct.

(5.) Und wenn wir jetzt die sphärische Construction wieder aufnehmen und erweitern, und uns vorstellen, dass D_1 von BA_1C abgeleitet wird, wie A_1 von BDC, oder D von BAC abgeleitet wurde; während angenommen werden kann, dass A_2 nach derselben Regel von BD_1C_1 und D_2 von BA_2C, u. s. w., durch eine unendliche Reihe von sphärischen Parallelogrammen abgeleitet wird, in denen der vierte Punkt irgend eines als der zweite Punkt des nächsten behandelt wird, während der erste und dritte Punkt ungeändert bleiben: so sehn wir, dass die Punkte A_1, A_2, . . sämmtlich auf dem Bogenloth liegen, welches von A auf BC gefällt ist; und dass ebenso die Punkte D_1, D_2, . . sämmtlich auf dem anderen Bogenloth liegen, welches von D auf BC gefällt ist. Wir sehn auch, dass die letzten Lagen, A_∞ und D_∞, genau mit den Fusspunkten dieser beiden Lothe zusammenfallen: ein bemerkenswerther Satz, und es würde vielleicht schwierig sein, ihn durch irgend eine andere Methode zu beweisen, als durch Quaternionen, wenigstens mit so einfachen Rechnungen wie diejenigen sind, welche vorher angewandt wurden.

(6.) Es mag bemerkt werden, dass man auf die Construction der Fig. 68 auf andere Weise hätte kommen können (vergl. 223, IV.), nach den Sätzen des zweiten Theils, wenn wir die vierte Proportionale (297) zu drei rechten Quaternionen zu bestimmen versucht hätten; zum Beispiel, zu drei rechten Versoren, υ, υ', υ'', als deren Achsen die Einheitslinien α, β, γ anzunehmen sein würden. Das Resultat würde im Allgemeinen ein Quaternion $\upsilon'\upsilon^{-1}\upsilon''$ sein, dessen skalar Theil e ist, und δ der Index seines rechten Theils: e und δ bezeichnen denselben Skalar, und denselben Vector, wie in den Nebenartikeln zu 297.

306. Quaternionen können auch angewandt werden, um eine neue Construction zu liefern, welche die graphische Bestimmung der beiden Reihen abgeleiteter Punkte,

$$\text{I.} \ldots D,\ A_1,\ D_1,\ A_2,\ D_2, \text{ u. s. w.},$$

vervollständigt [vergl. 305, (5.)], wenn die drei Punkte A, B, C auf der Einheitskugel gegeben sind; und welche so — wenn ich so

Digitized by Google

sagen darf — mit Hülfe einer neuen Figur das Streben dieser abgeleiteten Punkte sichtbar macht, sich den Fusspunkten — nennen wir sie D' und A' — dieser beiden Bogenlothe abwechselnd und ins Unendliche zu nähern, welche von den beiden gegenüberliegenden Ecken, D und A, des ersten sphärischen Parallelogramms, $BACD$, auf seine gegebne Diagonale BC gefällt sind; diese Diagonale ist, wie wir gesehn haben, allen den aufeinanderfolgenden Parallelogrammen gemeinsam.

(1.) Bei dem gegebnen Dreieck ABC nehmen wir der Einfachheit wegen an, dass seine Seiten abc kleiner als Quadranten sind, wie in 297, so dass ihre Cosinus lmn positiv sind; es seien A', B', C' die Fusspunkte der Lothe, welche auf diese drei Seiten von den Punkten A, B, C gefällt sind; es seien auch M und N zwei Hülfspunkte, welche durch die Gleichungen bestimmt werden,

$$\text{II.} \ldots \frown BM = \frown MC,$$
$$\frown AM = \frown MN;$$

so dass die Bogen AN und BC einander in M halbiren. Man fälle von N ein Loth ND' auf BC, so dass

$$\text{III.} \ldots \frown BD' = \frown A'C;$$

und es seien B'', C'' zwei andere Hülfspunkte, auf den Seiten b und c, oder auf den Verlängerungen derselben, welche den beiden weiteren Gleichungen genügen,

$$\text{IV.} \ldots \frown B'B'' = \frown AC;$$
$$\frown C'C'' = \frown AB.$$

(2.) Dann schneiden die Lothe auf diese letzteren Seiten, CA und AB, welche in den zuletzt erwähnten Punkten, B'' und C'', errichtet werden, einander in dem Punkte D, welcher das sphärische Parallelogramm $BACD$ vervollständigt (305); und der Fusspunkt des Lothes vom Punkte D auf die dritte Seite BC des gegebnen Dreiecks fällt mit dem Fusspunkt D' des Lothes von N auf dieselbe Seite zusammen [vergl. 305, (2.)]; so dass dies letztere Loth ND' ein Ort des Punktes D ist.

(3.) Um einen anderen Ort für diesen Punkt zu erhalten, der unserem gegenwärtigen Zweck angepasst ist, möge E

jetzt* den neuen Punkt bezeichnen, in welchem die beiden Diagonalen, AD und BC, einander schneiden; dann können wir, da wir [vergl. 297, (2.)] den Ausdruck haben,

$$\text{V.}\ldots\ OD = U(m\beta + n\gamma - l\alpha),$$

schreiben [vergl. 297, (25.), und (30.)],

$$\text{VI.}\ldots\ OE = U(m\beta + n\gamma),$$

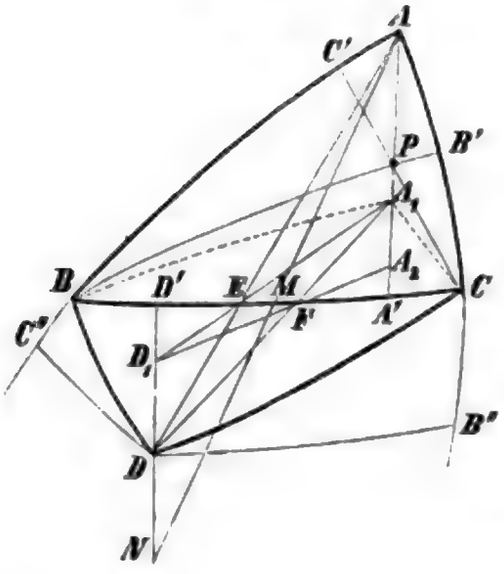
wonach

$$\text{VII.}\ldots\ \sin BE : \sin EC = n : m = \cos BA' : \cos A'C;$$

die Diagonale AD theilt somit den Bogen BC in Abschnitte, deren Sinus den Cosinus der anliegenden Seiten des gegebnen Dreiecks, oder den Cosinus ihrer Projectionen BA' und $A'C$ auf BC proportional sind; so dass der grössere Abschnitt der kleineren Seite anliegt, und der Mittelpunkt M von BC (1.) zwischen den Punkten A' und E liegt.

(4.) Der Durchschnittspunkt E ist daher ein bekannter Punkt, und der grosse Kreis durch A und E ist ein zweiter bekannter Ort für D; dieser Punkt kann daher als der Durchschnitt der Verlängerung des Bogens AE mit dem Loth ND' von N aus (1.) angesehn werden. Und da E jenseits des Mittelpunktes M von BC liegt (3.), mit Beziehung auf den Fusspunkt A' des Lothes auf BC von A aus gefällt, aber (wie leicht zu beweisen ist) nicht so weit jenseits M wie der Punkt D', oder mit anderen Worten, da er zwischen M und D' fällt (wenn der Bogen BC, wie vorher angenommen wurde, weniger als ein Quadrant ist), so schneidet der verlängerte Bogen AE den

Fig. 73.



* Es ist zu beachten, dass M, N, E hier nicht dieselben Bedeutungen haben wie in Fig. 68; und dass die jetzigen Buchstaben C' und C'' dem Q und R in dieser Figur entsprechen.

Digitized by Google

Bogen ND' zwischen N und D'; oder mit anderen Worten, der senkrechte Abstand des gesuchten vierten Punktes D von der gegebnen Diagonale BC des Parallelogramms, ist kleiner als der Abstand des gegebenen zweiten Punktes A von derselben gegebnen Diagonale. (Vergl. die beigefügte Fig. 73.)

(5.) Geht man zunächst (305) dazu über einen neuen Punkt A_1 von B, D, C abzuleiten, wie D von B, A, C abgeleitet worden ist, so sehn wir, dass wir nur einen neuen* Hülfspunkt F, durch die Gleichung,

$$\text{VIII.} \ldots \frown EM = \frown MF,$$

zu bestimmen brauchen; und dann DF zu ziehn und es zu verlängern haben, bis es AA' in dem gesuchten Punkte A_1 trifft, der somit das zweite Parallelogramm, $BDCA_1$, vervollständigt, dessen eine gegebne Diagonale BC ist, wie vorher.

(6.) Ebenso brauchen wir, um das dritte Parallelogramm, BA_1CD_1, mit derselben gegebenen Diagonale BC zu vervollständigen [vergl. 305, (5.)], nur den Bogen A_1E zu ziehn, und ihn zu verlängern, bis er ND' in D_1 trifft; und danach würden wir den Punkt A_2 eines vierten der Reihe nach folgenden Parallelogramms BD_1CA_2 finden, wenn wir D_1F ziehn, und so stetig weiter.

(7.) Das beständige und ins Unbegrenzte fortdauernde Streben der abgeleiteten Punkte D, D_1, . . zum Grenzpunkt D' hin, und der anderen (oder mit ihnen abwechselnden) abgeleiteten Punkte A_1, A_2, . . zu dem anderen Grenzpunkt A' hin, wird daher aus dieser neuen Construction einleuchtend; und ihre End- (oder Grenz-) Resultate können wir durch die beiden Gleichungen [vergl. wieder 305, (5.)] ausdrücken,

$$\text{IX.} \ldots D_\infty = D'; \qquad A_\infty = A'.$$

---

* Dieser neue Punkt, und der Durchschnitt der Lothe des gegebnen Dreiecks, ist augenscheinlich nicht derselbe in der neuen Fig. 73, wie die mit denselben Buchstaben, F und P, bezeichneten Puukte in der früheren Figur 68; obwohl die vier Punkte A, B, C, D in denselben Beziehungen zu einander in beiden Figuren gedacht sind, und in Wirklichkeit auch in Fig. 67; $BACD$ ist in dieser Figur auch, wie wir vorgeschlagen haben es zu nennen, ein sphärisches Parallelogramm. Vergleiche die Anmerkung zu (3.).

(8.) Aber die Kleinheit (305) der ersten Abweichung AA_1 wird, wenn die Seiten des gegebnen Dreiecks ABC klein sind, zu gleicher Zeit vermittelst derselben Construction mit Hülfe der Formel VII. einleuchtend; sie zeigt, dass das Intervall* EM, oder das gleiche Intervall MF (5.), klein von der dritten Ordnung ist, wenn die Seiten des gegebnen Dreiecks als klein von der ersten Ordnung angenommen werden: das stimmt aber mit der Gleichung 305, VIII. überein.

(9.) Die Theorie solcher sphärischen Parallelogramme erlaubt einige interessante Anwendungen, besonders in Verbindung mit sphärischen Kegelschnitten; wir können indessen hier nicht auf sie eingehn, und wollen nur einen Satz** aussprechen, dessen Beweis (vergl. 271) durch Quaternionen leicht ist:

„Wenn $KLMN$ irgend ein sphärisches Vierseit ist, und I irgend ein Punkt auf der Kugel; wenn wir ferner die sphärischen Parallelogramme,

$$\text{X}\ldots KILA,\quad LIMB,\quad MINC,\quad NIKD,$$

vollständig ausführen, und die Pole E und F der Diagonalen KM und LN des Vierseits bestimmen; so sind diese beiden Pole die Brennpunkte*** eines sphärischen Kegelschnitts, welcher dem abgeleiteten Vierseit $ABCD$ eingeschrieben ist, oder welcher seine vier Seiten berührt."

---

* Die Formel VII. ergiebt leicht die Relation,

$$\text{VII}'\ldots \tan EM = \tan MA' \left(\tan \frac{a}{2}\right)^2;$$

und danach ist das Intervall EM in dem hier angenommenen Falle (8.) klein von der dritten Ordnung; und allgemein zeigt die Formel, dass, wenn $a < \frac{\pi}{2}$ ist, wie in (1.), während b und c ungleich sind, das Intervall EM kleiner als MA', oder als $D'M$, ist, so dass E zwischen M und D' fällt, wie in (4.).

** Dieser Satz wurde der Königlich Irischen Akademie im Juni, 1845, als eine Folgerung aus den Grundsätzen der Quaternionen mitgetheilt. Siehe die Berichte von diesem Datum (Vol. III., Seite 109).

*** In der Sprache der neueren Geometrie kann man sagen, dieser fragliche Kegelschnitt berührt acht gegebene Bogen; vier reelle, nämlich die Seiten AB, BC, CD, DA; und vier imaginäre, nämlich zwei von jedem der beiden Focalpunkte, E und F, aus.

Digitized by Google

(10.) Daher erhalten wir, in einer an anderer Stelle vorgeschlagenen Bezeichnung*, bei diesen Constructionsbedingungen die Formel:

$$\text{XI.}\ldots EF(..)ABCD;$$

oder

$$\text{XI}'\ldots EF(..)BCDA;\quad \text{u. s. w.}$$

(11.) Bevor ich diesen Abschnitt und diesen Artikel schliesse, scheint mir nicht unerheblich zu bemerken, dass die Projection γ' des Einheitsvectors γ, auf die Ebne von α und β, durch die Formel gegeben wird,

$$\text{XII.}\ldots \gamma' = \frac{\alpha \sin a \cos B + \beta \sin b \cos A}{\sin c},$$

und dass daher der Punkt P, in welchem (siehe wieder Fig. 73) sich die drei Bogenlothe des Dreiecks ABC schneiden, auf dem Vector,

$$\text{XIII.}\ldots \varrho = \alpha \tan A + \beta \tan B + \gamma \tan C,$$

liegt.

(12.) Es mag hinzugefügt werden, in Betreff der Construction in 305, (2.), dass die graden Linien,

$$\text{XIV.}\ldots PP_1,\ P_1P_2,\ P_2P_3,\ P_3P_4,\ \ldots$$

wie weit deren Reihe auch immer fortgesetzt werden mag, die gegebene Ebne BOC, abwechselnd, in den beiden Punkten S und T schneiden, deren Vectoren,

$$\text{XV.}\ldots OS = \frac{\varrho_1' + l\varrho'}{1+l},$$

und

$$OT = \frac{\varrho' + l\varrho_1'}{1+l},$$

sind; und die somit zwei feste Punkte in der Ebne werden, wenn die Lage des Punktes P im Raume gegeben oder angenommen wird.

---

* Vergleiche die Anmerkung zu Seite 402.

Neunter Abschnitt.

Ueber eine dritte Methode ein Product oder eine Function von Vectoren als Quaternion zu deuten; und über die Uebereinstimmung der Resultate der so erhaltenen Deutung mit denjenigen, welche nach den beiden vorhergehenden Methoden dieses Theils abgeleitet worden sind.

307. Der Begriff der vierten Proportionale zu drei rechtwinkligen Einheitslinien, und dass sie selbst eine Art von vierter Einheit in der Geometrie ist, ist augenscheinlich charakteristisch für unser Rechensystem; und bietet eine dritte Methode dar ein Product von zwei Vectoren als einen Quaternion zu deuten: sie findet sich indessen in allen ihren Ergebnissen in Uebereinstimmung mit den beiden vorigen Methoden (278, 284 des vorliegenden Theils; und lässt sich leicht auf Producte von drei oder mehr Linien im Raume, und allgemein auf Functionen von Vectoren (289) ausdehnen. In der That brauchen wir uns nur vorzustellen (vergl. die folgende Anm.), dass jeder vorgeschlagene Vector, α, durch die neue oder vierte Einheit, u, dividirt wird, auf welche wir vorher hingewiesen haben; und dass der so erhaltene Quotient, welcher stets (nach 303, VIII.) der rechte Quaternion $I^{-1}\alpha$ ist, dessen Index der Vector α ist, für diesen Vector eingesetzt wird: der sich ergebende Quaternion wird endlich, wenn wir es für passend halten, in dieselbe vierte Einheit multiplicirt. Denn auf diesem Wege reproduciren wir nur das Verfahren von 284, oder 289, obwohl jetzt als eine Folgerung eines verschiedenen Gedankenganges, oder einer anders beschaffenen, aber in Uebereinstimmung mit dem dortigen befindlichen Methode: und sie führt somit, vermittelst einer neuen Methode, zu denselben Rechnungsregeln wie vorher.

Anmerkung. Auf einem einigermassen entsprechenden Wege zeigte Des Cartes in seiner Geometria (Schooten's Ausgabe, Amsterdam, 1659), dass alle Producte und Potenzen von Linien, welche allein in Betreff ihrer Länge in Betracht gezogen werden, und ohne irgend wie Bezug auf ihre Richtungen zu nehmen, durch eine passende Einführung einer zur Einheit genommenen Linie als Linien gedeutet werden könnten, wie gross auch immer die Dimension des Productes oder

der Potenz sein möchte. So begegnet uns (auf Seite 3 des erwähnten Werkes) die folgende Bemerkung:

„Ubi notandum est, quòd per a^2 vel b^3, similesve, communiter, non nisi lineas omnino simplices concipiam, licèt illas, ut nominibus in Algebra usitatis utar, Quadrata aut Cubos, etc. appellem.“

Aber es war viel schwieriger die entsprechende Multiplication von Linien mit bestimmter Richtung im Raume zu vervollständigen; und zwar weil keine solche Linie vorhanden ist, welche zu allen anderen Linien in symmetrischer Beziehung steht, oder welche allen möglichen Ebnen gemeinsam ist (vergl. die Anmerkung zu Seite 331). Die Einheit der Vector-Multiplication kann nicht in eigentlichem Sinne selbst ein Vector sein, wenn der Begriff der Symmetrie des Raumes beibehalten und mit den anderen Bestandtheilen der Frage gebührend in Zusammenhang gebracht wird. Diese Schwierigkeit verschwindet indessen, wenigstens in der Theorie, wenn wir dazu gelangen, die neue Einheit, von einer skalar Art (300), zu betrachten, welche wir vorher durch das für den Augenblick eingeführte Symbol, u, bezeichnet hatten, und im vorigen Abschnitt als eine gewisse vierte Proportionale zu drei rechtwinkligen Einheitslinien erhalten hatten, wie es die drei coinitialen Kanten AB, AC, AD eines — wie wir gesagt hatten — Einheitswürfels sind: denn diese vierte Proportionale erleidet, nach dem vorgeschlagenen Begriff derselben, keine Veränderung, wenn der Würfel $ABCD$ in irgend einer Weise bewegt, oder gedreht wird; und sie kann daher als symmetrisch in Bezug auf die Richtungen sämmtlicher Linien im Raume angesehn werden, oder in Bezug auf alle möglichen Fortbewegungen (oder Translationen) eines Punktes, oder Körpers. In der That denken wir uns, dass ihre Bestimmung, und die Unterscheidung derselben (als $+u$) von der entgegengesetzten Einheit derselben Art ($-u$), allein von der üblichen Annahme einer Längeneinheit abhängt, in Verbindung mit der Auswahl einer Drehungsrichtung (zum Beispiel, der rechtsläufigen), welche als positiv zu betrachten sein wird, und mit welcher eine anderssinnige Drehungsrichtung um dieselbe willkürliche Achse (als solche) im Gegensatz steht. In welcher Weise jetzt auch immer der angenommene Würfel im Raume um-

herbewegt werden mag, die vorgestellte Drehung um die Kante AB, von AC nach AD, bewahrt denselben Charakter, als rechtsläufige oder linksläufige, zu Ende wie zu Anfang der Bewegung. Wenn daher die vierte Proportionale zu den drei Kanten, in dieser Anordnung genommen, mit $+u$, oder einfach mit $+1$, in einem Stadium der willkürlichen Bewegung bezeichnet wird, so kann sie (in dem hier betrachteten Sinne) durch dasselbe Symbol in jedem anderen Stadium bezeichnet werden: während der entgegengesetzte Charakter der (gedachten) Drehung um dieselbe Kante AB, von AD nach AC, uns dazu führt, die vierte Proportionale zu AB, AD, AC als im Gegensatz zur vorigen gleich $-u$, oder gleich -1, anzusehn. Zwar kann dieser Begriff einer neuen Einheit für den Raum, welche in symmetrischer Beziehung zu allen linearen Richtungen in ihm steht (wie vorher), als etwas abstract und metaphysisch erscheinen; sollten Leser ihn dafür halten, so können sie ihre Aufmerksamkeit natürlich auf die Rechnungsregeln beschränken, welche vorher aus ihm abgeleitet worden sind, und aus anderen mit ihm im Zusammenhang stehenden Betrachtungen: und die (wie ich hoffe) in diesem und in einem früheren Buche mit hinreichender Klarheit und Vollständigkeit aufgestellt und durch Beispiele erläutert worden sind.

(1.) Die Gleichung der Einheitskugel, $\rho^2 + 1 = 0$ (282, XIV.), kann somit als Abkürzung der folgenden vollständigeren Gleichung gedacht werden:

$$\text{I.} \ldots \left(\frac{\rho}{u}\right)^2 = -1;$$

der Quotient $\rho : u$ wird als dem rechten Quaternion, $I^{-1}\rho$, gleich (nach 303) betrachtet, der hier ein rechter Versor (154) sein muss, da sein Quadrat die negative Einheit ist.

(2.) Die Gleichung des Ellipsoids,

$$T(\iota\rho + \rho\varkappa) = \varkappa^2 - \iota^2 \quad (282, \text{XIX.}),$$

kann, in gleicher Weise, als Abkürzung der anderen Gleichung,

$$\text{II.} \ldots T\left(\frac{\iota}{u}\frac{\rho}{u} + \frac{\rho}{u}\frac{\varkappa}{u}\right) = \left(\frac{\varkappa}{u}\right)^2 - \left(\frac{\iota}{u}\right)^2,$$

angesehn werden; und ähnlich in anderen Fällen.

Digitized by Google

(3.) Wir könnten auch diese Gleichungen, der Kugel und des Ellipsoids, unter den anderen, aber mit den vorigen im Zusammenhang stehenden Formen hinschreiben:

$$\text{III.}\ldots \frac{\varrho}{u}\,\varrho = -u;$$

$$\text{IV.}\ldots T\left(\frac{\iota}{u}\,\varrho + \frac{\varrho}{u}\,\varkappa\right) = \frac{\varkappa}{u}\,\varkappa - \frac{\iota}{u}\,\iota;$$

mit Bedeutungen, die sich leicht von selbst nach den Sätzen des vorigen Abschnitts darbieten.

(4.) Es muss indessen im Unterschiede dazu wohl verstanden werden, dass wir nicht vorschlagen, diese Form der Bezeichnung in der praktischen Anwendung unseres Rechnungssystems anzunehmen: und dass wir sie nur vorübergehend als eine an die Hand gaben, welche dazu dienen kann, einiges weitere Licht auf den Begriff zu werfen, der in diesem dritten Theil eingeführt wurde, nämlich den eines Productes von zwei Vectoren als einen Quaternion.

(5.) Im Allgemeinen scheint die Bezeichnung als Product, welche den grössten Theil dieses Theils und Kapitels hindurch angewandt worden ist, viel passender für wirklichen Gebrauch beim Rechnen zu sein, als irgend welche Bezeichnung als Quotient: entweder von der Art, wie sie eben jetzt zum Zwecke der Erläuterung angeführt wurde, oder von der Art, wie sie im zweiten Theil, im Zusammenhang mit jenem ersten Begriff eines Quaternions (112) angewandt wurde, auf den dieser Theil hauptsächlich Bezug hat, nämlich als eines Quotienten zweier Vectoren (oder zweier Linien von bestimmter Richtung im Raume). Die Bezeichnungen der beiden Theile sind indessen aufs innigste mit einander verknüpft, und den ersteren hielt ich für eine nützliche Vorbereitung für den letzteren, grade in Betracht der Quotientenformen von vielen der gebrauchten Ausdrücke: während die charakteristischen Operationszeichen, wie

$$S,\ V,\ T,\ U,\ K,\ N,$$

in beiden gemäss genau denselben Gesetzen angewandt werden. Kurz, ein Leser des zweiten Theils braucht nichts in dem dritten zu verlernen; wenngleich man annehmen kann,

dass er für den Gebrauch etwas kürzerer und angemessenerer Verfahrungsarten vorbereitet worden ist, als diejenigen waren, welche vorher angewandt wurden.

Zehnter Abschnitt.

Ueber die Deutung einer Potenz eines Vectors als Quaternion.

308. Die einzigen Symbole von denjenigen Arten, wie sie in 277 erwähnt wurden, welche bis jetzt noch nicht gedeutet worden sind, sind der Cubus α^3, und die allgemeine Potenz α^t, einer beliebigen Vectorbasis, α, mit einem beliebigen skalar Exponenten, t; denn wir haben schon Deutungen [282, (1.), (14.), und 299, (8.)] für die besonderen Symbole α^2, α^{-1}, α^{-2}, angegeben, welche in dieser letzten Form mitenthalten sind. Und wir behalten diese besonderen Deutungen bei, wenn wir jetzt in vollständiger Uebereinstimmung mit den Sätzen dieses und des vorhergehenden Theils als Definition aufstellen, dass die Potenz α^t allgemein ein Quaternion sein soll, der in zwei Factoren zerlegt werden kann, von der tensor und versor Art, wie folgt:

$$\text{I.} \ldots \alpha^t = T\alpha^t . U\alpha^t;$$

hier bezeichnet $T\alpha^t$ den arithmetischen Werth der t-Potenz der positiven Zahl $T\alpha$, welche, wie üblich, die Länge der Basislinie α darstellt; und $U\alpha^t$ einen Versor, welcher bewirkt, dass sich irgend eine Linie ρ, welche senkrecht zur Linie α ist, um sie wie um eine Achse um t rechte Winkel, oder Quadranten, dreht, und zwar in einer positiven oder negativen Richtung, je nachdem der skalar Exponent, t, selbst eine positive oder negative Zahl [vergl. 234, (5.)] ist.

(1.) Was die Fortlassung der Parenthesen in der Formel I. betrifft, so wollen wir bemerken, dass die vorige Definition, oder Deutung, des Symbols α^t, uns in den Stand setzt, zu schreiben (vergl. 237, II. III.),

$$\text{II.} \ldots T(\alpha^t) = (T\alpha)^t = T\alpha^t;$$
$$\text{III.} \ldots U(\alpha^t) = (U\alpha)^t = U\alpha^t.$$

(2.) Die Achse und der Winkel der Potenz α^t, diese als

Digitized by Google

ein Quaternion aufgefasst, werden allgemein durch die beiden folgenden Formeln bestimmt:

$$\text{IV.}\ldots \text{Ax.}\,\alpha^t = \pm U\alpha;$$
$$\text{V.}\ldots \angle.\alpha^t = 2n\pi \pm \tfrac{1}{2}t\pi;$$

die nebeneinanderstehenden Vorzeichen, und die ganze Zahl, n, welche positiv oder negativ oder null sein kann, werden so gewählt, dass sie den Winkel in die üblichen Grenzen, 0 und π, bringen.

(3.) Im Allgemeinen (vergl. 235) können wir von dem (positiven oder negativen) Producte $\frac{1}{2}t\pi$, als von der Amplitude derselben Potenz in Bezug auf die Linie α als Umdrehungsachse sprechen; und können demgemäss schreiben,

$$\text{VI.}\ldots am.\alpha^t = \tfrac{1}{2}t\pi.$$

(4.) Wir können auch schreiben (vergl. 234, VII. VIII.),

$$\text{VII.}\ldots U\alpha^t = \cos\frac{t\pi}{2} + U\alpha.\sin\frac{t\pi}{2};$$

oder kurz,

$$\text{VIII.}\ldots U\alpha^t = cas\frac{t\pi}{2}.$$

(5.) Im Besonderen ist,

$$\text{IX.}\ldots U\alpha^{2n} = cas\,n\pi = \pm 1;$$
$$\text{IX}'.\ldots U\alpha^{2n+1} = \pm U\alpha;$$

das obere oder untere Vorzeichen wird genommen, je nachdem die Zahl n (welche als ganz angenommen ist) grade oder ungrade ist. Zum Beispiel, wir haben so die Cuben,

$$\text{X.}\ldots U\alpha^3 = -U\alpha;$$
$$\text{X}'.\ldots \alpha^3 = -\alpha N\alpha.$$

(6.) Der Conjugirte und die Norm der Potenz α^t kann (und es ist daran zu erinnern, dass die Drehung einer Linie $\perp\alpha$ um $-\frac{1}{2}t\pi$ um $+\alpha$, gleichbedeutend mit einer Drehung dieser Linie um $+\frac{1}{2}t\pi$ um $-\alpha$ ist) somit ausgedrückt werden:

$$\text{XI.}\ldots K\alpha^t = T\alpha^t.U\alpha^{-t} = (-\alpha)^t;$$
$$\text{XII.}\ldots N\alpha^t = T\alpha^{2t};$$

und die Parenthesen sind unnöthig, da (nach 295, VIII.) $K\alpha = -\alpha$.

(7.) Der Skalar, Vector, und Reciproke derselben Potenz werden durch die Formeln gegeben:

$$\text{XIII.}\ldots S.\alpha^t = T\alpha^t.\cos\frac{t\pi}{2};$$

$$\text{XIV.}\ldots V.\alpha^t = T\alpha^t.U\alpha.\sin\frac{t\pi}{2};$$

$$\text{XV.}\ldots 1:\alpha^t = T\alpha^{-t}.U\alpha^{-t} = \alpha^{-t} = K\alpha^t : N\alpha^t \text{ [vergl. 190. (3.)]}.$$

(8.) Wenn wir irgend einen Vector ϱ in die Theile ϱ' und ϱ'' zerlegen, welche bezüglich parallel und senkrecht zu α sind, so erhalten wir die allgemeine Transformation*:

$$\text{XVI.}\ldots \alpha^t\varrho\alpha^{-t} = \alpha^t(\varrho' + \varrho'')\alpha^{-t} = \varrho' + U\alpha^{2t}.\varrho'',$$

= einem neuen Vector, welcher dadurch erhalten wird, dass man sich ϱ um eine Winkelgrösse, welche durch $t\pi$ ausgedrückt wird, konisch um die Linie α als Achse [vergl. 297, (15.)] drehn lässt.

(9.) Allgemeiner [vergl. 191, (5.)], wenn q irgend ein Quaternion ist, und wenn

$$\text{XVII.}\ldots \alpha^t q\alpha^{-t} = q',$$

so wird der neue Quaternion q' aus q durch eine solche konische Drehung seiner eignen Achse $\text{Ax.}q$ um α um den Winkel $t\pi$ gebildet, ohne irgend welche Aenderung seines Winkels $\angle q$, oder seines Tensors Tq.

(10.) Behandelt man ijk als drei rechtwinklige Einheitslinien (295), so kann das Symbol, oder der Ausdruck,

$$\text{XVIII.}\ldots \varrho = rk^t j^s k j^{-s} k^{-t},$$

oder

$$\text{XIX.}\ldots \varrho = rk^t j^{2s} k^{1-t},$$

in dem

$$\text{XX.}\ldots r \geqq 0, \quad s \geqq 0, \quad s \leqq 1, \quad t \geqq 0, \quad t \leqq 2,$$

ist, irgend einen Vector darstellen; die Länge oder der Tensor dieser Linie ϱ ist r; ihre Neigung** gegen k ist $s\pi$; und der

* Vergleiche den kurz nachher folgenden Nebenartikel (11.).

** Wenn wir uns vorstellen (vergl. die Anmerkung zu Seite 446), dass die beiden Linien i und j bezüglich gegen den Süd- und West-Punkt des Horizontes gerichtet sind, während die dritte Linie k nach dem Zenith gerichtet ist, dann ist $s\pi$ die Zenith-Distanz von ϱ; und $t\pi$ ist das Azimuth derselben Linie, von Süd nach West gemessen, und daher (wenn nöthig) durch Nord und Ost, wieder nach Süd.

Digitized by Google

Winkel, um welchen die variable Ebne $k\varrho$ von der Anfangslage ki aus, mit einer anfänglichen Richtung gegen die Lage kj hin, gedreht gedacht werden kann, ist $t\pi$.

(11.) Wenn wir die Umformung XVI. vollständig ausführen, und vom Ausdruck XVIII. zu dem weniger symmetrischen, aber gleichbedeutenden Ausdruck XIX. übergehn, so wenden wir den Satz an, dass

$$\text{XXI.}\ldots kj^{-s} = S^{-1}0 = -K(kj^{-s}) = j^s k,$$

ist; er lässt sich leicht erweitern, und kann durch solche Transformationen, wie sie VII. oder VIII. sind, bestätigt werden.

(12.) Es ist kaum nothwendig zu bemerken, dass die Definition oder Deutung I., der Potenz α^t irgend eines Vectors α, wie in der Algebra die exponential Eigenschaft ergiebt,

$$\text{XXII.}\ldots \alpha^s\alpha^t = \alpha^{s+t},$$

welche Skalare auch immer mit s und t bezeichnet werden mögen; und gleiches gilt, wenn mehr als zwei Factoren von dieser Form vorhanden sind.

(13.) Was die Verificationen des Ausdrucks XVIII. betrifft, wenn er als Darstellung eines Vectors angesehn wird, so mögen wir hier bemerken, dass er ergiebt,

$$\text{XXIII.}\ldots \varrho = -K\varrho;$$

und

$$\text{XXIV.}\ldots \varrho^2 = -r^2.$$

(14.) Allgemeiner werden wir finden, dass wenn u* irgendein Skalar ist, wir die in hohem Grade einfache Transformation erhalten:

$$\text{XXV.}\ldots \varrho^u = (rk^tj^skj^{-s}k^{-t})^u = r^uk^tj^sk^uj^{-s}k^{-t}.$$

In der That bezeichnen die beiden letzten Ausdrücke allgemein zwei gleiche Quaternionen, denn sie haben: I. gleiche

---

* Die Benutzung des Buchstabens u, um das zu bezeichnen, was wir in den beiden vorhergehenden Abschnitten, als eine vierte Einheit u. s. w., bezeichneten, wurde ausdrücklich als eine nur augenblickliche bezeichnet. Im Allgemeinen werden wir daher diese skalar Einheit einfach gleich der Zahl Eins setzen; und sie (wenn es überhaupt nothwendig sein sollte, sie zu bezeichnen) durch das übliche Symbol, 1, für diese Zahl bezeichnen.

Tensoren, jeden $= r^u$; II. gleiche Winkel, jeden $= \angle (k^u)$; und III. gleiche (oder zusammenfallende) Achsen, von denen jede aus $\pm k$ durch ein und dasselbe System von zwei aufeinanderfolgenden Drehungen gebildet wird, die eine um den Winkel $s\pi$ um j, und die andere um den Winkel $t\pi$ um k.

309. Irgend ein Quaternion, q, der nicht einfach ein Skalar ist, kann auf die Form α^t durch eine passende Wahl der Basis, α, und des Exponenten, t, gebracht werden; von diesem letzteren kann überdies angenommen werden; dass er zwischen die Grenzen 0 und 2 fällt; wir brauchen für diesen Zweck nur zu schreiben,

$$\text{I.} \ldots t = \frac{2 \angle q}{\pi};$$

$$\text{II.} \ldots T\alpha = Tq^{\frac{1}{t}};$$

$$\text{III.} \ldots U\alpha = \text{Ax.}q;$$

und somit zeigt sich die allgemeine Abhängigkeit eines Quaternions von einem skalar und einem vector Element von selbst auf einem neuen Wege (vergl. 17, 207, 292). Wenn der vorgeschlagene Quaternion ein Versor ist, $Tq = 1$, so erhalten wir $T\alpha = 1$; oder mit anderen Worten, die Basis, α, der ihm äquivalenten Potenz α^t, ist eine Einheitslinie. Umgekehrt kann jeder Versor als eine Potenz einer Einheitslinie mit einem skalar Exponenten, t, angesehn werden, der im Allgemeinen als positiv und kleiner als zwei angenommen werden kann; so dass wir allgemein schreiben können,

$$\text{IV.} \ldots Uq = \alpha^t,$$

und

$$\text{V.} \ldots \alpha = \text{Ax.}q = T^{-1}1,$$

wo

$$\text{VI.} \ldots t > 0, \qquad t < 2;$$

wenn auch der Exponent t gleich 0 oder 2 werden kann, und die Basis α dann eine unbestimmte oder willkürliche Richtung hat, wenn dieser Versor zu 1 oder -1 degenerirt. Und aus solchen Umformungen von Versoren können neue Methoden für die Behandlung von Fragen der sphärischen Trigonometrie, und allgemein der sphärischen Geometrie, abgeleitet werden.

Digitized by Google

(1.) Denken wir uns, dass P, Q, R, in Fig. 46, durch A, B, C ersetzt werden, deren Einheitsvectoren α, β, γ seien wie üblich; und es mögen x, y, z drei Skalare zwischen 0 und 2 sein, welche durch die drei Gleichungen bestimmt werden,

$$\text{VII.}\ldots \begin{aligned} x\pi &= 2A, \\ y\pi &= 2B, \\ z\pi &= 2C; \end{aligned}$$

wo A, B, C die Winkel des sphärischen Dreiecks bezeichnen. Die drei Versoren, welche durch die drei Pfeile in dem oberen Theile dieser Figur angedeutet sind, werden somit dann bezeichnet durch:

$$\text{VIII.}\ldots \begin{aligned} q &= \alpha^x; \\ q' &= \beta^y; \\ q'q &= \gamma^{2-z}; \end{aligned}$$

so dass wir die Gleichung haben,

$$\text{IX.}\ldots \beta^y\alpha^x = \gamma^{2-z};$$

oder

$$\text{X.}\ldots \gamma^z\beta^y\alpha^x = -1;$$

und aus der letzteren folgen durch leichte Divisionen und Multiplicationen unmittelbar die beiden anderen:

$$\begin{aligned} &\text{X}'\ldots \alpha^x\gamma^z\beta^y = -1; \\ &\text{X}''\ldots \beta^y\alpha^x\gamma^z = -1; \end{aligned}$$

die Drehung um α von β nach γ wird wieder als negativ angenommen.

(2.) In X. können wir schreiben (nach 308, VIII.),

$$\text{XI.}\ldots \begin{aligned} \alpha^x &= c\alpha s A; \\ \beta^y &= c\beta s B; \\ \gamma^z &= c\gamma s C; \end{aligned}$$

und dann wird die Formel, für irgend ein sphärisches Dreieck, in welchem die Anordnung der Drehung die vorige ist:

$$\text{XII.}\ldots c\gamma s C.c\beta s B.c\alpha s A = -1;$$

oder (vergl. IX.),

$$\text{XIII.}\ldots -\cos C + \gamma \sin C = (\cos B + \beta \sin B)(\cos A + \alpha \sin A).$$

(3.) Nimmt man von beiden Seiten der letzten Gleichung die Skalare, und erinnert sich daran, dass $S\beta\alpha = -\cos c$,

so leiten wir somit unmittelbar eine Form der Grundgleichung der sphärischen Trigonometrie ab; nämlich die Gleichung,

$$\text{XIV.}\ldots \cos C + \cos A \cos B = \cos c \sin A \sin B.$$

(4.) Nimmt man die Vectoren, so erhalten wir die andere Formel:

$$\text{XV.}\ldots \gamma \sin C = \alpha \sin A \cos B + \beta \sin B \cos A + V\beta\alpha \sin A \sin B;$$

sie stimmt, wie leicht zu sehn, mit 306, XII. überein, und kann auch mit Nutzen mit der Gleichung 210, XXXVII. verglichen werden.

(5.) Das Resultat XV. kann als Satz in folgender Form ausgesprochen werden:

„Wenn in irgend einem sphärischen Dreieck ABC drei Linien vom Mittelpunkt der Kugel O aus gezogen werden, die eine nach dem Punkt A hin, von einer Länge $= \sin A \cos B$; eine andere nach dem Punkt B hin, deren Länge $= \sin B \cos A$ sei; und die dritte senkrecht zur Ebne AOB, und nach derselben Seite von ihr aus gezogen, nach welcher der Punkt C liegt, und der Länge nach $= \sin c \sin A \sin B$; und wenn wir mit diesen drei Linien als Kanten ein Parallelepiped construiren: so ist die mittlere Diagonale von O aus nach C hin gerichtet und hat eine Länge $= \sin C$."

(6.) Dividirt man beide Glieder derselben Gleichung XV. durch ϱ, und nimmt die Skalare, so findet man, dass, wenn P irgend ein vierter Punkt auf der Kugel ist, und Q der Fusspunkt des Lothes, welches von diesem Punkt auf den Bogen AB gefällt wird, und wenn wir das Loth PQ als positiv betrachten, wenn C und P auf ein und derselben Seite des Bogens liegen (oder auf ein und derselben Halbkugel von denjenigen beiden, in welche der grosse Kreis durch A und B die Kugeloberfläche theilt), findet man, dass wir dann erhalten,

$$\text{XVI.}\ldots \sin C \cos PC = \sin A \cos B \cos PA + \sin B \cos A \cos PB + \sin A \sin B \sin c \sin PQ;$$

und diese Formel hätte aus der Gleichung 210, XXXVIII. dadurch abgeleitet werden können, dass man zuerst $abcABC$

durch cyklische Vertauschung in $bcaBCA$ verwandelt hätte, und dann von dem ersten Dreieck zu seinem Polardreieck, oder Supplementardreieck, übergegangen wäre: und aus ihr hätten viele, weniger allgemeine Gleichungen abgeleitet werden können, wenn man dem P besondere Lagen beigelegt hätte.

(7.) Zum Beispiel, wenn wir uns den Punkt P als den Mittelpunkt des umschriebenen kleinen Kreises ABC denken, und mit R den Bogenradius dieses Kreises bezeichnen, und mit S die halbe Summe der drei Winkel, so dass $2S = A + B + C = \pi + \sigma$, wenn σ wieder, wie in 297, (47.), die Fläche* des Dreiecks ABC bezeichnet, so ist danach

$$\text{XVII.} \ldots PA = PB = PC = R,$$

und

$$\sin PQ = \sin R \sin (S - C),$$

und es ergiebt die Formel XVI. leicht,

$$\text{XVIII.} \ldots 2 \cot R \sin \tfrac{\sigma}{2} = \sin A \sin B \sin c;$$

eine Beziehung zwischen Radius und Fläche, welche mit bekannten Resultaten übereinstimmt, und aus der wir, nach 297, LXX., u. s. w., die bekannte Gleichung ableiten können:

$$\text{XIX.} \ldots e \tan R = 4 \sin \tfrac{a}{2} \sin \tfrac{b}{2} \sin \tfrac{c}{2};$$

in ihr haben wir wieder, wie in 297, (47.), u. s. w.,

$$\text{XX.} \ldots e = (S\alpha\beta\gamma =) \sin a \sin b \sin C = \text{u. s. w.}$$

(8.) Ebenso hätten wir annehmen können, dass P, in der entsprechenden allgemeinen Gleichung 210, XXXVIII., in den Mittelpunkt des eingeschriebenen kleinen Kreises versetzt worden wäre, und dass der Bogenradius dieses Kreises r, die halbe Summe der Seiten s wäre; und so würden wir mit Leichtigkeit die weitere bekannte Beziehung haben ableiten können, welche gewissermassen reciprok polar zu XVIII. ist,

$$\text{XXI.} \ldots 2 \tan r \cdot \sin s = e.$$

---

* Vergleiche die Anmerkung zu dem erwähnten Nebenartikel.

Aber diese Resultate werden hier nur erwähnt, um die Fruchtbarkeit der Formeln durch Beispiele zu belegen, auf welche unsere Rechnungsmethode hinführt, und aus denen sich, wie wir sahn, der Satz in (5.) leicht folgern liess.

(9.) Wir könnten das ternäre Product in der Gleichung XII. entwickeln, wie wir das binäre Product XIII. entwickelt haben; man vergleiche skalar und vector Theile; und operire an dem letzteren mit dem Symbol $S.\varrho^{-1}$. So würden neue allgemeine Sätze, oder wenigstens neue allgemeine Formen, entstehn, und es ist an dieser Stelle völlig hinreichend, auf ihre Aufsuchung hingewiesen zu haben.

(10.) Was die Anordnung der Drehung (1.), (2.) anbetrifft, so ist klar, aus dem blossen Anblick der Formel XV., dass die Drehung um γ von β nach α, oder diejenige um C von B nach A, positiv sein muss, wenn die Gleichung XV. statt haben soll; wenigstens wenn die Winkel A, B, C des Dreiecks ABC, wie gewöhnlich, als positiv behandelt werden: denn die Drehung um die Linie $V\beta\alpha$ von β nach α ist stets positiv [nach 281, (3.)].

(11.) Wenn daher in irgend einem gegebenen sphärischen Dreieck, ABC, dessen Winkel wieder als positiv angenommen sind, die Drehung um C von B nach A zufällig (im Gegensatz dazu) negativ sein sollte, so würden wir gezwungen sein, die Formel XV. zu verändern; und das könnte geschehn, indem man zum Beispiel, um ihre genaue Richtigkeit wiederherzustellen, α mit β vertauschte, und zu gleicher Zeit A mit B.

(12.) Es giebt indessen einen Sinn, in welchem die Formel noch als völlig richtig angesehn werden könnte, ohne irgend welche Aenderung in der Art sie zu schreiben; nämlich wenn wir die Symbole A, B, C in dem zuletzt angenommenen Falle (11.) so deuteten, als ob sie negative Winkel bezeichneten. Demgemäss erhalten wir, wenn wir die Reciproke der Gleichung X. nehmen, die weitere Gleichung,

$$\text{XXII.} \ldots \alpha^{-x}\beta^{-y}\gamma^{-z} = -1;$$

wo x, y, z positiv sind, wie vorher, und die neuen Exponenten, $-x, -y, -z$, daher negativ sind, wenn die Drehung um α von β nach γ selbst negativ ist, wie in (1.).

Digitized by Google

(13.) Ueberhaupt können wir daher, wenn α, β, γ irgend ein gegebnes System dreier coinitialen und diplanaren Einheitslinien, OA, OB, OC, ist, stets ein System von drei Skalaren, x, y, z, angeben, welche der exponential Gleichung X. genügen, und Beziehungen von der Form VII. zu den sphärischen Winkeln A, B, C haben; aber diese drei Skalare sind, wenn sie so bestimmt werden, dass sie zwischen die Grenzen ± 2 fallen, sämmtlich positiv, oder sämmtlich negativ, je nachdem die Drehung um α von β nach γ negativ ist, wie in (1.), oder positiv, wie in (11.).

(14.) Was die eben erwähnten Grenzen betrifft, oder die Ungleichheiten,

$$\text{XXIII.} \ldots \begin{matrix} x < 2, & y < 2, & z < 2; \\ x > -2, & y > -2, & z > -2, \end{matrix}$$

so werden sie eingeführt mit dem Hinblick darauf, das Problem, die Exponenten xyz in der Formel X. zu finden, zu einem bestimmten zu machen; denn da wir, nach 308, haben,

$$\text{XXIV.} \ldots \alpha^4 = \beta^4 = \gamma^4 = +1,$$

wenn

$$T\alpha = T\beta = T\gamma = 1,$$

so könnten wir anderwärts irgend ein Vielfaches (ein positives oder negatives) der Zahl Vier zum Werthe des Exponenten irgend einer Einheitslinie addiren, und der Werth der resultirenden Potenz würde doch nicht geändert werden.

(15.) Wenn wir Exponenten $= \pm 2$ zulassen, so könnten wir das Problem, der Gleichung X. zu genügen, auf anderem Wege zu einem unbestimmten machen; denn es würde dann genügend sein anzunehmen, dass irgend einer von den drei Exponenten somit gleich $+2$, oder gleich -2, wäre, und dass von den beiden andern jeder $= 0$ wäre; oder auch, dass alle drei von der Form ± 2 wären.

(16.) Als ich kürzlich sagte (13.), dass die Exponenten x, y, z, in der Formel X., wenn sie wie vorher beschränkt werden, ein und dasselbe Vorzeichen haben, war der Fall stillschweigend ausgeschlossen, wenn diese Exponenten, oder einige von ihnen, nach der Multiplication eines jeden mit einem Quadranten Winkel ergeben, welche denen des sphärischen Drei-

ecks ABC nicht gleich sind, weder wenn man sie positiv, noch wenn man sie negativ nimmt; dagegen den Supplementwinkeln zu diesen Winkeln, oder den negativen Werthen dieser Supplementwinkel gleich werden.

(17.) In der That ist es augenscheinlich (da $\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = -1$), dass die Gleichung X., oder die reciproke Gleichung XXII., wenn sie durch irgend ein Werthsystem von xyz befriedigt wird, auch befriedigt werden wird, wenn wir irgend zwei von den drei exponential Factoren durch die Quadrate der beiden Einheitsvectoren dividiren oder multipliciren, als deren Potenzen diese Factoren angenommen sind: oder mit anderen Worten, wenn wir die Zahl zwei in jedem der beiden Exponenten hinzufügen oder abziehn.

(18.) Wir können, zum Beispiel, aus XXII. die weitere Gleichung ableiten:

$$\text{XXV.} \ldots \alpha^{2-x}\beta^{2-y}\gamma^{2-z} = -1;$$

oder

$$\text{XXVI.} \ldots \alpha^{2-x}\beta^{2-y} = \gamma^{z-2};$$

und sie kann, wenn wir die Drehung so wie in (1.) annehmen, so dass xyz positiv sind, in folgender Weise gedeutet werden.

(19.) Denken wir uns ein sichelförmiges Stück CC', bei dem die Punkte A und B auf seinen beiden begrenzenden Halbkreisen liegen, und bei dem die Drehung um A von B nach C' negativ ist; oder, was auf dasselbe hinauskommt, bei dem die Drehung um A von B nach C positiv ist. Dann stellen, in dem durch Figur 45 und 46 erläuterten Sinne, die Supplementwinkel $\pi - A$, $\pi - B$, der Winkel A und B in dem Dreieck ABC, oder die Winkel bei denselben Punkten A und B des Dreiecks ABC', welches in dem zugehörigen sichelförmigen Stück liegt, zwei Versoren dar, einen Multiplicator und einen Multiplicandus, welche ebendiejenigen sind, die in XXVI. durch die beiden Factoren, α^{2-x} und β^{2-y}, bezeichnet werden; und das Product dieser beiden Factoren, in dieser Aufeinanderfolge genommen, ist jener dritte Versor, dessen Achse nach C' hin gerichtet ist, und in demselben allgemeinen Sinne (177), durch den Aussenwinkel der Sichel im Punkte C' dargestellt wird; und es ist an Grösse dem Aussen-

Digitized by Google

winkel desselben sichelförmigen Stücks bei C gleich, oder dem Winkel $\pi - C$. Dies Product ist daher der Potenz der Einheitslinie OC', oder $-\gamma$, gleich, deren Exponent $= \frac{2}{\pi}(\pi - C)$ $= 2 - z$ ist; wir haben daher, nach dieser Construction, die Gleichung,

$$\text{XXVII.} \ldots \alpha^{2-x}\beta^{2-y} = (-\gamma)^{2-z};$$

und sie stimmt [nach 308, (6.)] mit der vorigen Formel XXVI. überein.

310. Die Gleichung,

$$\text{I.} \ldots \gamma^{\frac{2C}{\pi}}\beta^{\frac{2B}{\pi}}\alpha^{\frac{2A}{\pi}} = -1,$$

welche sich aus 309, (1.) ergiebt, und in der α, β, γ die Einheitsvectoren OA, OB, OC irgend dreier Punkte auf der Einheitskugel sind; während die drei Skalare A, B, C, welche in den Exponenten der drei Factoren vorkommen, allgemein die Winkelgrössen der Drehung um die drei Einheitslinien, oder Radien, α, β, γ darstellen, von der Ebne AOC zur Ebne AOB, von BOA nach BOC, und von COB nach COA, und positiv oder negativ sind, je nachdem die Drehungen der Ebnen selbst positiv oder negativ sind: muss als eine Formel betrachtet werden, welche in den Anwendungen unserer Rechnungsart von Wichtigkeit ist. Sie schliesst, zum Beispiel, die ganze Lehre von den sphärischen Dreiecken ein; nicht nur, weil sie — wie wir gesehn haben [309, (3.)] — zu einer Form der Grundskalargleichung der sphärischen Trigonometrie führt, nämlich zu der Gleichung,

$$\text{II.} \ldots \cos C + \cos A \cos B = \cos c \sin A \sin B;$$

sondern auch, weil sie eine vector Gleichung [309, (4.)] ergiebt, welche dazu dient, die Winkel, oder die Drehungen A, B, C, mit den Richtungen* der Radien α, β, γ, oder

---

* Es kann dies als ein weiteres Beispiel der gewöhnlichen Beziehung zur Richtung angesehn werden, als verschieden von derjenigen der reinen Grösse (oder des Betrags), obwohl sie mit ihr in Verbindung steht, welche unser ganzes Rechnungssystem durchzieht, und für dasselbe in ganz besonderem Grade charakteristisch ist; während Des Cartes, im Gegentheil, den Zweck im Auge hatte, alle Probleme der Geometrie auf die

OA, OB, OC, für irgend ein System von drei graden Linien in Verbindung zu setzen, welche von einem Anfangspunkt aus divergiren. Es mag daher hier nicht unangemessen sein, einige wenige weitere Bemerkungen über die Natur, Augenscheinlichkeit und Ausdehnung der vorigen Formel I. zu geben.

(1.) Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung I. mit dem inversen Exponential $\gamma^{-\frac{2C}{\pi}}$, so erhalten wir die Transformation [vergl. 309, (1.)]:

$$\text{III.} \ldots \beta^{\frac{2B}{\pi}} \alpha^{\frac{2A}{\pi}} = -\gamma^{-\frac{2C}{\pi}} = \gamma^{\frac{2(\pi - C)}{\pi}}.$$

(2.) Multiplicirt man ferner beide Seiten von I in* $\alpha^{-\frac{2A}{\pi}}$, so erhalten wir die weitere Formel:

$$\text{IV.} \ldots \gamma^{\frac{2C}{\pi}} \beta^{\frac{2B}{\pi}} = -\alpha^{-\frac{2A}{\pi}} = \alpha^{\frac{2(\pi - A)}{\pi}}.$$

(3.) Multiplicirt man diese letzte Gleichung IV. durch

Bestimmungen der Längen von graden Linien zurückzuführen: wenn auch (wie alle, welche seine Coordinaten benutzen, ja wohl wissen) eine gewisse Beziehung zur Richtung selbst in seiner Theorie unvermeidlich ist, in Verbindung mit der Deutung der negativen Wurzeln (welche von ihm inverse oder falsche Wurzeln genannt werden) von Gleichungen. So finden wir in der ersten Sentenz von Schooten's kürzlich erwähnter Uebersetzung (1659) der Geometrie des Des Cartes die Worte:

„Omnia Geometriae Problemata facilè ad hujusmodi terminos reduci possunt, ut deinde ad illorum constructionem, opus tantum sit rectarum quarundam longitudinem cognoscere."

Der sehr verschiedene geometrische Gesichtspunkt, zu welchem der Schreiber dieser Zeilen geführt wurde, macht es um so angemessener, hier die tiefe Bewunderung auszudrücken, mit welcher er die erwähnte Abhandlung des Des Cartes betrachtet: sie enthält in der That die Keime eines so grossen Theils von Allem, was seitdem in der mathematischen Wissenschaft gethan worden ist, selbst was imaginäre Wurzeln von Gleichungen betrifft, wenn man sie als Kennzeichen der geometrischen Unmöglichkeit ansieht.

* In Betreff der Unterscheidung zwischen der Multiplication eines Quaternions in und durch einen Factor, siehe die Anmerkungen zu den Seiten 188, 204.

Digitized by Google

$\alpha^{\frac{2A}{\pi}}$, und die Gleichung III. in $\gamma^{\frac{2C}{\pi}}$, so leiten wir die weiteren Formeln ab:

$$\text{V.}\ldots\ \alpha^{\frac{2A}{\pi}}\,\gamma^{\frac{2C}{\pi}}\,\beta^{\frac{2B}{\pi}} = -1;$$

$$\text{VI.}\ldots\ \beta^{\frac{2B}{\pi}}\,\alpha^{\frac{2A}{\pi}}\,\gamma^{\frac{2C}{\pi}} = -1,$$

so dass cyklische Vertauschung der Buchstaben α, β, γ, und A, B, C, in der Gleichung I. erlaubt ist; wie in der That aus der eigenen Natur des Satzes zu erwarten war, welchen diese Gleichung ausdrückt.

(4.) Entweder aus V. oder aus VI. können wir die Formel ableiten:

$$\text{VII.}\ldots\ \alpha^{\frac{2A}{\pi}}\,\gamma^{\frac{2C}{\pi}} = -\beta^{-\frac{2B}{\pi}} = \beta^{\frac{2(\pi-B)}{\pi}};$$

vergleicht man sie mit III. und IV., so sieht man, dass cyklische Vertauschung der Buchstaben auch in diesen Gleichungen erlaubt ist.

(5.) Nimmt man die Reciproke (oder Conjugirte) zur Gleichung I., so erhält man (vergl. 309, XXII.) die weitere Gleichung:

$$\text{VIII.}\ldots\ \alpha^{-\frac{2A}{\pi}}\,\beta^{-\frac{2B}{\pi}}\,\gamma^{-\frac{2C}{\pi}} = -1;$$

oder

$$\text{IX.}\ldots\ \alpha^{\frac{2(\pi-A)}{\pi}}\,\beta^{\frac{2(\pi-B)}{\pi}}\,\gamma^{\frac{2(\pi-C)}{\pi}} = +1;$$

und in ihr ist cyklische Permutation der Buchstaben wieder erlaubt, und aus ihr (oder aus III.) können wir sofort die Formel ableiten,

$$\text{X.}\ldots\ \alpha^{-\frac{2A}{\pi}}\,\beta^{-\frac{2B}{\pi}} = -\gamma^{\frac{2C}{\pi}}.$$

(6.) Die Gleichung X. kann auch so geschrieben werden (vergl. 309, XXVII.):

$$\text{XI.}\ldots\ \alpha^{\frac{2(\pi-A)}{\pi}}\,\beta^{\frac{2(\pi-B)}{\pi}} = \gamma^{-\frac{2(\pi-C)}{\pi}} = (-\gamma)^{\frac{2(\pi-C)}{\pi}}.$$

(7.) Und alle die vorhergehenden Gleichungen können durch einen Hinweis auf die allgemeine Construction (177) für

die Multiplication von Versoren gedeutet [vergl. 309, (19.)], und zu gleicher Zeit bewiesen werden, welche die Figuren 45 und 46 zu erläutern bestimmt waren; wenn wir im Gedächtniss behalten, dass eine Potenz α^t, einer Einheitslinie α, mit einem skalar Exponenten t (nach 308, 309), ein Versor ist, dessen Wirkung die Drehung einer Linie $\perp \alpha$ um t rechte Winkel ist, um α als Drehungsachse.

(8.) Der Satz, welcher durch die Gleichung I. ausgedrückt wird, und aus dem sämmtliche folgenden Gleichungen abgeleitet worden sind, kann in folgender Weise ausgesprochen werden, wenn wir die Definition annehmen, welche in einem früheren Theil dieses Werkes [180, (4.)] für die sphärische Summe zweier Winkel auf einer Kugeloberfläche vorgeschlagen worden ist:

„In irgend einem sphärischen Dreieck ist die sphärische Summe der drei Winkel, wenn sie in einer passenden Aufeinanderfolge genommen werden, gleich zwei rechten Winkeln."

(9.) In der That, wenn die Drehung um A von B nach C negativ ist, so ist die sphärische Summe, welche man erhält, wenn man den Winkel B zum Winkel A sphärisch addirt (nach der Definition, auf welche ich Bezug genommen habe), gleich dem Aussenwinkel bei C; wenn wir daher zu dieser Summe, oder dem Supplement von C, den Winkel C selbst addiren, so bekommen wir eine End- oder Gesammtsumme, welche genau gleich π ist; Addition sphärischer Winkel mit einem Scheitel, und daher in einer Ebne, wird in der üblichen Weise ausgeführt; dagegen vollzieht sich die sphärische Summation von Winkeln mit verschiedenen Scheiteln nach den neuen Regeln, welche im neunten Abschnitt des zweiten Theils, Kap. I., abgeleitet worden sind; und welche mit dem Begriff der Winkelbewegung, oder der Zusammensetzung von Winkelbewegungen, in verschiedenen und aufeinanderfolgenden Ebnen, im Zusammenhang stehn [180, (5.)].

(10.) Ohne zu verlangen, dass man der folgenden Bezeichnung Wichtigkeit beilege, schlage ich sie grade vorübergehend vor, als eine, welche dazu dienen mag, an den Begriff zu erinnern und ihn darzustellen, auf den hier Bezug genommen ist. Benutzt man ein plus in Parenthesen als ein Symbol

Digitized by Google

oder als ein charakteristisches Zeichen für solche sphärische Addition von Winkeln, so können wir die Formel I., wie folgt, abkürzen:

$$\text{XII.}\ldots C(+)B(+)A = \pi;$$

das Zeichen für einen addirten Winkel wird zur Linken des Zeichens für den Winkel geschrieben, zu welchem er addirt wird [vergl. 264, (4.)]; denn solche Addition entspricht (wie vorher) einer Multiplication von Versoren, und wir sind übereingekommen, das Symbol des Multiplicators zur Linken* des Symbols des Multiplicandus zu schreiben, bei jeder Multiplication von Quaternionen.

311. Es giebt indessen einen anderen Gesichtspunkt der wichtigen Gleichung 310, I., nach dem sie besser mit der Addition von Bogen [180, (3.)] in Verbindung zu setzen ist als mit der Addition von Winkeln [180, (4.)]; und nach dem sie mit Hülfe des supplementären oder polar Dreiecks, $A'B'C'$, in folgender Weise gedeutet, und von neuem bewiesen werden kann.

(1.) Die Drehung um A von B nach C werde wieder als negativ vorausgesetzt, und es seien A', B', C' (wie in 175) die positiven Pole der Seiten BC, CA, AB; und α', β', γ' seien ihre Einheitsvectoren. Dann ist, da die Drehung um α von γ' nach β' positiv ist [nach 180, (2.)], und an Grösse dem Supplement des sphärischen Winkels A gleich, das Product $\gamma'\beta'$ [nach 281, (2.), (3.)] ein Versor, dessen Achse α, und dessen Winkel A ist; und ähnliche Resultate ergeben sich für die beiden anderen Producte, $\alpha'\gamma'$, $\beta'\alpha'$.

(2.) Wenn wir daher schreiben (vergl. 291),

$$\text{I.}\ldots \begin{aligned} \alpha' &= UV\beta\gamma, \\ \beta' &= UV\gamma\alpha, \\ \gamma' &= UV\alpha\beta, \end{aligned}$$

und annehmen, dass

$$\text{II.}\ldots T\alpha = T\beta = T\gamma = 1,$$

und

$$\text{III.}\ldots S\alpha\beta\gamma > 0,$$

---

* Vergl. die Anmerkung zu Seite 188.

so erhalten wir [vergl. wieder 180, (2.)],

$$\text{IV.}\ldots \alpha = UV\gamma'\beta', \quad \beta = UV\alpha'\gamma', \quad \gamma = UV\beta'\alpha',$$

und

$$\text{V.}\ldots A = \angle\,\gamma'\beta', \quad B = \angle\,\alpha'\gamma', \quad C = \angle\,\beta'\alpha';$$

und daraus erhalten wir (nach 308 oder 309) die folgenden exponential Ausdrücke für die drei letzten Producte von Einheitslinien,

$$\text{VI.}\ldots \gamma'\beta' = \alpha^{\frac{2A}{\pi}}; \quad \alpha'\gamma' = \beta^{\frac{2B}{\pi}}; \quad \beta'\alpha' = \gamma^{\frac{2C}{\pi}}.$$

(3.) Multiplicirt man diese drei Ausdrücke in umgekehrter Reihenfolge, so erhalten wir daher das neue Product:

$$\begin{aligned}\text{VII.}\ldots \gamma^{\frac{2C}{\pi}}\beta^{\frac{2B}{\pi}}\alpha^{\frac{2A}{\pi}} &= \beta'\alpha'.\alpha'\gamma'.\gamma'\beta' \\ &= \gamma'^2\beta'^2\alpha'^2 \\ &= -1;\end{aligned}$$

und die Gleichung 310, I. wird auf diesem Wege von neuem bewiesen.

(4.) Und da wir, anstatt VI., hätten schreiben können,

$$\text{VIII.}\ldots \alpha^{\frac{2A}{\pi}} = -\frac{\gamma'}{\beta'}, \quad \beta^{\frac{2B}{\pi}} = -\frac{\alpha'}{\gamma'}, \quad \gamma^{\frac{2C}{\pi}} = -\frac{\beta'}{\alpha'},$$

so sehn wir, dass die Gleichung, welche zu beweisen ist, auf die Form der Identität,

$$\text{IX.}\ldots \frac{\beta'}{\alpha'}\,\frac{\alpha'}{\gamma'}\,\frac{\gamma'}{\beta'} = +1,$$

zurückgeführt werden kann; und als Ausdruck dafür gedeutet

Digitized by Google

werden kann, wie es augenscheinlich ist, dass, wenn man sich einen Punkt zuerst auf der Seite $B'C'$ entlang bewegt denkt, im polar Dreieck $A'B'C'$, von B' nach C'; dann auf der folgenden Seite $C'A'$ entlang, von C' nach A'; und endlich auf der übrigbleibenden Seite $A'B'$ entlang, von A' nach B', er in die Lage zurückgekehrt ist, von der er ausgegangen ist, oder im Ganzen seine Stelle überhaupt nicht geändert hat.

(5.) Von diesem Gesichtspunkte aus bilden wir nun, was ich an einem anderen Orte eine Addition von Bogen genannt habe (anstatt von Winkeln wie in 310); und in einer schon gebrauchten [264, (4.)] Bezeichnung können wir das Resultat durch die Formel ausdrücken,

$$\text{X.} \ldots \frown A'B' + \frown C'A' + \frown B'C' = 0;$$

jedes von den beiden zur linken Hand stehenden Symbolen bezeichnet einen Bogen, den man sich zu dem Bogen addirt denkt [als einen auf ihn folgenden Vectorbogen, 180, (3.)], dessen Symbol unmittelbar auf ihn folgt, oder ihm zunächst geschrieben ist, aber zur rechten Hand.

(6.) Die Ausdrücke VI. oder VIII., für die exponential Factoren in 310, I., zeigen auf einem neuen Wege die Nothwendigkeit, auf die Anordnung der Factoren in dieser Formel Acht zu geben: denn wenn wir diese Anordnung umkehren würden, ohne die Exponenten zu ändern (wie in 310, VIII.), so können wir jetzt übersehn, dass wir das neue Product erhalten würden:

$$\text{XI.} \ldots \alpha^{\frac{2A}{\pi}} \beta^{\frac{2B}{\pi}} \gamma^{\frac{2C}{\pi}} = -\frac{\gamma'}{\beta'}\frac{\alpha'}{\gamma'}\frac{\beta'}{\alpha'} = +(\gamma'\beta'\alpha')^2;$$

und das ist, in Folge der Diplanarität der Linien α', β', γ', nicht gleich der negativen Einheit, sondern gleich einem gewissen anderen Versor; auf die Eigenschaften desselben können wir aus dem schliessen, was in 297, (64.), und in 298, (8.) gezeigt wurde, aber wir können hier nicht dabei verweilen.

312. Im Allgemeinen (vergl. 221), umschliesst eine Gleichung, wie

$$\text{I.} \ldots q' = q,$$

zwischen zwei Quaternionen ein System von vier* skalar Gleichungen, wie sie die folgenden sind:

$$\text{II.}\ldots\quad Sq' = Sq; \qquad S\alpha q' = S\alpha q;$$
$$S\beta q' = S\beta q; \qquad S\gamma q' = S\gamma q;$$

hier können α, β, γ irgend drei wirkliche und diplanare Vectoren sein: und umgekehrt, wenn α, β, γ irgend drei derartige Vectoren sind, dann bringen die vier skalar Gleichungen II. hervor, und werden ausreichend ersetzt durch, die eine quaternion Gleichung I. Dagegen ist eine Gleichung zwischen zwei Vectoren nur mit einem System von drei skalar Gleichungen gleichbedeutend, von der Art, wie sie die drei letzten Gleichungen II. sind; zum Beispiel, in 294, (12.), ist die eine vector Gleichung XXII. mit den drei skalar Gleichungen XXI. gleichbedeutend, unter der unmittelbar vorhergehenden Bedingung XX. In gleicher Weise umschliesst eine Gleichung zwischen zwei Versoren von Quaternionen**, wie die Gleichung,

$$\text{III.}\ldots\quad Uq' = Uq,$$

allgemein ein System von drei, aber von nicht mehr als drei, skalar Gleichungen; denn der Versor Uq hängt im Allgemeinen (vergl. 157) von einem System von drei Skalaren ab, nämlich von den beiden, welche seine Achse $\mathrm{Ax}.q$ bestimmen, und von dem einen, welcher seinen Winkel $\angle q$ bestimmt; oder weil die versor Gleichung III. mit der tensor Gleichung,

$$\text{IV.}\ldots\quad Tq' = Tq, \qquad \text{vergl. 187, (13.),}$$

combinirt werden muss, um die quaternion Gleichung I. zu reproduciren. Jetzt ist die vorige Gleichung, 310, I., augenscheinlich von dieser versor Form III., wenn α, β, γ wieder

---

* Auf die Eigenschaft, welche solche Resultate wie dieses darthun, und ihr Bezug auf den Gebrauch des Namens, Quaternionen, wie er für diese ganze Rechnungsart angewandt wurde, wegen ihres wesentlichen Zusammenhangs mit der Zahl Vier, braucht hier nicht wieder näher eingegangen zu werden.

** Eine Gleichung, $U\varrho' = U\varrho$, oder $UV\varrho' = UV\varrho$, zwischen zwei Versoren von Vectoren (156), oder zwischen den Achsen zweier Quaternionen (291), ist nur einem System von zwei skalar Gleichungen äquivalent; denn die Richtung einer Achse, oder eines Vectors, hängt nur von einem System von zwei Winkelelementen (111) ab.

Digitized by Google

als Einheitslinien angenommen werden. Wenn wir daher diese Gleichung antreffen, oder wenn eine von ihrer Form uns begegnet wäre, ohne ihre geometrische Bedeutung irgendwie zu kennen, so könnten wir vorschlagen, sie in Bezug auf die drei Skalare A, B, C aufzulösen, die als drei unbekannte Grössen zu behandeln wären. Die wenigen folgenden Bemerkungen über das in dieser Weise gestellte Problem mögen hier wohl am Platze sein, und sind recht lehrreich.

(1.) Schreibt man zur Abkürzung,

$$\text{V.}\ldots \cot A = t, \qquad \cot B = u, \qquad \cot C = v,$$

und

$$\text{VI.}\ldots s = -\operatorname{cosec} A \operatorname{cosec} B \operatorname{cosec} C,$$

so wird die aufzulösende Gleichung (nach 308, VII., oder 309, XII.),

$$\text{VII.}\ldots (v+\gamma)(u+\beta)(t+\alpha) = s;$$

in ihr sind die Tensoren auf beiden Seiten schon gleich, denn

$$\text{VIII.}\ldots s^2 = (v^2+1)(u^2+1)(t^2+1).$$

(2.) Multiplicirt man die Gleichung VII. durch $t+\alpha$, und in $t-\alpha$, und dividirt das Resultat durch t^2+1, so erhalten wir die neue Gleichung von derselben Form, welche aber von ihr durch cyklische Vertauschung [vergl. 310, (3.)] verschieden ist:

$$\text{IX.}\ldots (t+\alpha)(v+\gamma)(u+\beta) = s;$$

und ebenso,

$$\text{X.}\ldots (u+\beta)(t+\alpha)(v+\gamma) = s.$$

(3.) Nimmt man die halbe Differenz der beiden letzten Gleichungen, und beachtet, dass (nach 279, IV., und 294, II.)

$$\text{XI.}\ldots \begin{cases} \frac{1}{2}(\beta\alpha\gamma - \alpha\gamma\beta) = V.\beta V\alpha\gamma = \gamma S\alpha\beta - \alpha S\beta\gamma, \\ \frac{1}{2}(\beta\alpha - \alpha\beta) = V\beta\alpha, \qquad \frac{1}{2}(\beta\gamma - \gamma\beta) = V\beta\gamma, \end{cases}$$

so gelangen wir zu der neuen Gleichung, von vector Form:

$$\text{XII.}\ldots 0 = vV\beta\alpha + tV\beta\gamma + \gamma S\alpha\beta - \alpha S\beta\gamma;$$

sie ist nur einem System von zwei skalar Gleichungen äquivalent, denn sie ergiebt $0=0$, wenn man an ihr mit $S.\beta$ [vergl. 294, (9.)] operirt.

(4.) Sie setzt uns indessen in den Stand, die beiden Skalare, t und v, zu bestimmen; denn wenn wir an ihr mit $S.\alpha$ operiren, so bekommen wir (vergl. 298, XXVI.),

$$\text{XIII.}\ldots\ tS\alpha\beta\gamma = \alpha^2 S\beta\gamma - S\beta\alpha S\alpha\gamma = S(V\beta\alpha . V\alpha\gamma);$$

und wenn wir an derselben Gleichung XII. mit $S.\gamma$ operiren, so erhalten wir in gleicher Weise,

$$\text{XIV.}\ldots\ vS\alpha\beta\gamma = \gamma^2 S\alpha\beta - S\alpha\gamma S\gamma\beta = S(V\alpha\gamma . V\gamma\beta).$$

(5.) Ganz ähnliche Methoden ergeben das entsprechende Resultat,

$$\text{XV.}\ldots\ uS\alpha\beta\gamma = \beta^2 S\gamma\alpha - S\gamma\beta S\beta\alpha = S(V\gamma\beta . V\beta\alpha);$$

und somit ist die Aufgabe in dem Sinne gelöst, dass Ausdrücke für die drei gesuchten Skalare t, u, v, oder für die Cotangenten V. der drei gesuchten Winkel A, B, C, gefunden worden sind: und aus ihnen kann der vierte Skalar, s, in der quaternion Gleichung VII. leicht abgeleitet werden, wie folgt.

(6.) Da wir [nach 294, (6.), wenn wir δ mit α vertauschen, und nachher cyklisch permutiren] für irgend drei Vectoren, α, β, γ, die allgemeinen Transformationen haben,

$$\text{XVI.}\ldots\begin{aligned} \alpha S\alpha\beta\gamma &= V(V\beta\alpha . V\alpha\gamma),\\ \beta S\alpha\beta\gamma &= V(V\gamma\beta . V\beta\alpha),\\ \gamma S\alpha\beta\gamma &= V(V\alpha\gamma . V\gamma\beta),\end{aligned}$$

so ergeben die Ausdrücke XIII., XV., XIV.,

$$\text{XVII.}\ldots\begin{cases}(t+\alpha) S\alpha\beta\gamma = V\beta\alpha . V\alpha\gamma;\\ (u+\beta) S\alpha\beta\gamma = V\gamma\beta . V\beta\alpha;\\ (v+\gamma) S\alpha\beta\gamma = V\alpha\gamma . V\gamma\beta;\end{cases}$$

und danach ist, nach VII.,

$$\text{XVIII.}\ldots\ s(S\alpha\beta\gamma)^3 = (V\gamma\beta)^2 (V\beta\alpha)^2 (V\alpha\gamma)^2;$$

und somit ist auch der übrigbleibende Skalar, s, völlig bestimmt.

(7.) Und die Gleichung VIII. kann auch bewahrheitet werden, wenn man beachtet, dass die Ausdrücke XVII. ergeben,

Digitized by Google

$$\text{XIX.}\ldots\begin{cases}(t^2+1)\,(S\alpha\beta\gamma)^2=(V\beta\alpha)^2\,(V\alpha\gamma)^2;\\(u^2+1)\,(S\alpha\beta\gamma)^2=(V\gamma\beta)^2\,(V\beta\alpha)^2;\\(v^2+1)\,(S\alpha\beta\gamma)^2=(V\alpha\gamma)^2\,(V\gamma\beta)^2.\end{cases}$$

(8.) Die Gleichungen XIII., XIV., XV., XVI. ergeben, durch Elimination von $S\alpha\beta\gamma$, die neuen Ausdrücke:

$$\text{XX.}\ldots\quad \alpha t^{-1}=(V:S)\,(V\beta\alpha\,.\,V\alpha\gamma),$$
$$\beta u^{-1}=(V:S)\,(V\gamma\beta\,.\,V\beta\alpha),$$
$$\gamma v^{-1}=(V:S)\,(V\alpha\gamma\,.\,V\gamma\beta);$$

vergleicht man sie mit der Formel 281, XXVIII., nachdem man das charakteristische Zeichen I fortgelassen hat (291), so findet man, dass die drei Skalare, t, u, v, entweder I. die Cotangenten der Winkel sind, welche den Seiten a, b, c des sphärischen Dreiecks gegenüberliegen, in dem die drei gegebenen Einheitslinien α, β, γ endigen, oder II. die negativen Werthe dieser Cotangenten sind, wobei die Winkel des Dreiecks selbst, wie gewöhnlich, als positiv [309, (10.)] angenommen werden, je nachdem die Drehung um α von β nach γ negativ oder positiv ist: das heisst [294, (3.)], je nachdem $S\alpha\beta\gamma >$ oder < 0 ist; oder endlich, nach XVIII., je nachdem der vierte Skalar, s, negativ oder positiv ist, denn das zweite Glied der Gleichung XVIII. ist stets negativ, da es das Product von drei Vectorquadraten (282, 292) ist.

(9.) Im ersten Falle, welcher der von 309, (1.) ist, sehn wir daher von Neuem, nach V. und VI., dass uns erlaubt ist, die Skalare A, B, C in der exponential Formel 310, I., als gleich zu deuten den Winkeln des sphärischen Dreiecks (8.), welches gewöhnlich durch dieselben Buchstaben bezeichnet wird. Aber wir sehn auch, dass wir irgend ein grades Vielfaches von π zu diesen drei Winkeln addiren können, ohne die exponential Gleichung zu stören; oder irgend ein grades, und zwei ungrade Vielfache von π, in irgend einer Anordnung, so dass ein positives Product der Cosecanten bewahrt bleibt, denn s ist, in diesem Falle, negativ in VI., nach (8.).

(10.) Im zweiten Falle, welcher der von 309, (11.) ist, können wir aus ähnlichen Gründen die Skalare A, B, C, in der Formel 310, I., als gleich den negativen Werthen der Winkel des Dreiecks deuten; und damit haben wir, was VI.

jetzt erfordert, denn s ist jetzt positiv (8.), ein negatives Product der Cosecanten, während ihre Cotangenten die gewünschten Werthe haben. Aber wir können auch, wie in (9.), irgend ein Vielfaches von π zu den somit für die Formel gefundenen Skalaren addiren, vorausgesetzt, dass die Anzahl der ungraden Vielfachen, welche so addirt werden, selbst grade (0 oder 2) ist.

(11.) Die Schlüsse in 309, oder 310, in Betreff der Deutung der exponential Formel werden daher bestätigt, und hätten durch die eben angegebne, neue Analyse vorweggenommen werden können: bei ihrer Ausführung ist es augenscheinlich, dass wir nur mit reellen Skalaren, und mit reellen Vectoren, zu thun haben.

(12.) Wenn diese letzte Beschränkung beseitigt und imaginäre Werthe zugelassen worden wären, so hätten wir, bei der Auflösung der quaternion Gleichung VII., damit beginnen können, an dieser Gleichung, wie in II., mit den vier Charakteristiken,

$$\text{XXI.}\ldots S,\quad S.\alpha,\quad S.\beta,\quad \text{und}\quad S.\gamma,$$

zu operiren; und das würde, bei den Bedeutungen von l, m, n und e, wie in 297, (1.), (3.), und daher bei der folgenden Beziehung zwischen diesen vier skalar Daten,

$$\text{XXII.}\ldots e^2 = 1 - l^2 - m^2 - n^2 + 2lmn,$$

ein System von vier skalar Gleichungen ergeben haben, welche die vier gesuchten Skalare, s, t, u, v, enthalten; und man hätte suchen können, aus ihnen die (reellen oder imaginären) Werthe dieser vier Skalare, durch die gewöhnlichen Methoden der Algebra, abzuleiten.

(13.) Die vier skalar Gleichungen, welche man so erhält, sind die folgenden:

$$\text{XXIII.}\ldots \begin{cases} 0 = e + lt + mv + nv - tuv + s; \\ 0 = et + mtu + ntv + uv - l; \\ 0 = -eu + ltu + tv + nuv + m - 2ln; \\ 0 = ev + tu + ltv + muv - n; \end{cases}$$

eliminirt man uv und u zwischen den drei letzten von ihnen, so findet man, mit Hülfe von XXII., die Determinante,

Digitized by Google

$$\text{XXIV.}\ldots 0 = \begin{vmatrix} 1, & mt, & ntv + et - l \\ m, & t, & ltv + ev - n \\ n, & lt - e, & tv + m - 2ln \end{vmatrix}$$
$$= e(t^2 + 1)(ev - n + lm);$$

und entsprechende Eliminationen ergeben,

$$\text{XXV.}\ldots 0 = e(t^2 + 1)(eu - m + nl),$$

und

$$\text{XXVI.}\ldots 0 = (t^2 + 1)\{e^2uv - (m - nl)(n - lm) + (1 - l^2)(et - l + mn)\}.$$

(14.) Verwerfen wir daher den Factor $t^2 + 1$, so finden wir, als die einzige reelle Lösung des Problems (12.), das folgende System von Werthen:

$$\text{XXVII.}\ldots et = l - mn;$$
$$eu = m - nl;$$
$$ev = n - lm;$$

und

$$\text{XXVIII.}\ldots e^3 s = -(1 - l^2)(1 - m^2)(1 - n^2);$$

es entspricht genau denjenigen, welche wir vorher, in (4.), (5.), (6.), fanden, und könnte dazu dienen, die Deutung der exponential Formel (310) wieder möglich zu machen.

(15.) Dagegen findet man nach der rein algebraischen Seite hin, durch eine ähnliche Analyse, dass die vier Gleichungen XXIII. auch durch ein System von vier imaginären Lösungen befriedigt werden, welche durch die folgenden Formeln dargestellt werden:

$$\text{XXIX.}\ldots \begin{cases} t^2 + 1 = 0; & v^2 + 1 = 0; \\ s = tuv - lt - mu - nv - e = 0; \end{cases}$$

es mag genügen, sie im Vorbeigehn erwähnt zu haben, denn sie scheinen nicht irgendwie solch geometrisches Interesse zu haben, um zu verdienen, dass man sich hier bei ihnen aufhalte: obwohl, was die Uebereinstimmung der verschiedenen angewandten Verfahren betrifft, daran erinnert werden kann, dass wir, während wir von der Gleichung VII. zu IX. übergingen (2.), nach gewissen vorläufigen Multiplicationen, durch $t^2 + 1$ dividirten, wozu wir berechtigt waren, als wir nur nach reellen Lösungen suchten, denn es wurde angenommen, dass t ein Skalar sei.

(16.) Dies scheint mir eine natürliche Gelegenheit zu sein, zu bemerken, dass die folgende allgemeine Transformation besteht, welche drei Vectoren auch immer durch α, β, γ bezeichnet werden mögen:

$$\text{XXX.}\ldots\ S(V\beta\gamma\,.\,V\gamma\alpha\,.\,V\alpha\beta) = -(S\alpha\beta\gamma)^2;$$

sie beweist auf einem neuen Wege (vergl. 180), dass die Drehung um die Linie $V\beta\gamma$, von $V\gamma\alpha$ nach $V\alpha\beta$, stets positiv ist; oder dass ihre Richtung in demselben Sinne [281, (3.)] statt hat, wie die Drehung um $V\alpha\beta$ von α nach β, u. s. w.

(17.) Ebenso haben wir allgemein,

$$\text{XXXI.}\ldots\ S(V\alpha\beta\,.\,V\gamma\alpha\,.\,V\beta\gamma) = +(S\alpha\beta\gamma)^2,$$

und

$$\text{XXXII.}\ldots\ S(V\gamma\beta\,.\,V\alpha\gamma\,.\,V\beta\alpha) = +(S\alpha\beta\gamma)^2;$$

so dass die Drehung um $V\gamma\beta$ von $V\alpha\gamma$ nach $V\beta\alpha$ negativ ist, welche Anordnung auch immer die drei diplanaren Vectoren, α, β, γ zu einander haben mögen.

(18.) Wenn daher A'', B'', C'' die negativen Pole der drei aufeinanderfolgenden Seiten, BC, CA, AB, irgend eines sphärischen Dreiecks sind, so ist die Drehung um A'' von B'' nach C'' negativ: und das ist völlig übereinstimmend mit dem entgegengesetzten Resultat (180), in Betreff des Systems der drei positiven Pole A', B', C'.

(19.) Eine quantitative Deutung der Gleichung XXX. kann auch leicht angegeben werden: denn wir können aus ihr [nach 281, (4.), und 294, (3.)] schliessen, dass wenn $OABC$ irgend eine Pyramide ist, und wenn die Längen der Normalen OA', OB', OC' zu den drei Seitenflächen BOC, COA, AOB numerisch gleich den Flächeninhalten jener Seitenflächen sind (in so fern sie in denselben Verhältnissen zu Einheiten stehn, u. s. w.), dann (mit einer ähnlichen Beziehung auf Einheiten) das Volumen der neuen Pyramide, $OA'B'C'$, drei Viertel vom Quadrat des Volumens der vorigen Pyramide, $OABC$ ist.

313. Aber in 310 wurde eine Anspielung auf eine Ausdehnung der exponential Formel gemacht, welche kürzlich discutirt worden ist; und in der That, diese Formel lässt sich

leicht von Dreiecke auf Polygone auf der Kugel ausdehnen: denn wir können, allgemein, schreiben,

$$\text{I.} \ldots \alpha_n^{\frac{2A_n}{\pi}} \alpha_{n-1}^{\frac{2A_{n-1}}{\pi}} \ldots \alpha_2^{\frac{2A_2}{\pi}} \alpha_1^{\frac{2A_1}{\pi}} = (-1)^n,$$

wenn $A_1 A_2 \ldots A_{n-1} A_n$ irgend ein sphärisches Polygon ist, und wenn die Skalare A_1, A_2, ... in den Exponenten die positiven oder negativen Winkel dieses Polygons bezeichnen, welche als die Drehungen $A_n A_1 A_2$, $A_1 A_2 A_3$, ... betrachtet werden, nämlich derjenigen von $A_1 A_n$ nach $A_1 A_2$, u. s. w.; während n irgend eine positive ganze Zahl* > 2 ist.

(1.) Eine Art, diese erweiterte Formel zu beweisen, ist die folgende. Es sei $OC = \gamma$ der Einheitsvector eines beliebigen Punktes C auf der Kugeloberfläche; und man denke sich Bogen grosser Kreise von dem Punkte C aus nach den n aufeinanderfolgenden Ecken des Vielecks gezogen. Wir erhalten so ein System von n sphärischen Dreiecken, und jeder Winkel des Polygons wird (im Allgemeinen) in zwei (positive oder negative) Theilwinkel zerlegt, welche in folgender Weise bezeichnet werden können:

$$\text{II.} \ldots CA_1A_2 = A'_1, \quad CA_2A_3 = A'_2, \ldots;$$
$$\text{III.} \ldots A_nA_1C = A''_1, \quad A_1A_2C = A''_2, \ldots;$$

so dass, wenn man die Vorzeichen der Winkel bei den Additionen beachtet,

$$\text{IV.} \ldots A_1 = A'_1 + A''_1, \qquad A_2 = A'_2 + A''_2,$$

u. s. w., ist. Es sei auch

$$\text{V.} \ldots A_2CA_1 = C_1, \qquad A_3CA_2 = C_2,$$

u. s. w.; und daher

$$\text{VI.} \ldots C_1 + C_2 + \ldots + C_n = \text{einem graden Vielfachen von } \pi,$$

welches sich auf 2π reducirt in dem einfachen Falle eines Vielecks, welches keine einspringenden Winkel hat, und wenn der Punkt C in seinem Innern liegt.

(2.) Daher haben wir für das Dreieck CA_1A_2, dessen Winkel C_1, A'_1, A''_2 sind, nach 310, III., die Gleichung,

* Die Formel lässt eine Deutung auch für den Fall $n = 2$ zu.

$$\text{VII.}\ldots \alpha_2^{\frac{2A''_2}{\pi}}\,\alpha_1^{\frac{2A'_1}{\pi}} = -\gamma^{-\frac{2C_1}{\pi}};$$

und ebenso erhalten wir für das Dreieck CA_2A_3,

$$\text{VIII.}\ldots \alpha_3^{\frac{2A''_3}{\pi}}\,\alpha_2^{\frac{2A'_2}{\pi}} = -\gamma^{-\frac{2C_2}{\pi}},\quad \text{u. s. w.}$$

Wenn wir dagegen VII. durch VIII. multipliciren, so erhalten wir, nach IV., das Product,

$$\text{IX.}\ldots \alpha_3^{\frac{2A''_3}{\pi}}\,\alpha_2^{\frac{2A_2}{\pi}}\,\alpha_1^{\frac{2A'_1}{\pi}} = +\gamma^{-\frac{2(C_1+C_2)}{\pi}};$$

und wenn man so fortfährt, so erhält man zuletzt, nach VI., ein Product von der Form,

$$\text{X.}\ldots \alpha_1^{\frac{2A''_1}{\pi}}\,\alpha_n^{\frac{2A_n}{\pi}}\ldots\alpha_2^{\frac{2A_2}{\pi}}\,\alpha_1^{\frac{2A'_1}{\pi}} = (-1)^n;$$

es reducirt sich auf I., wenn es durch $\alpha^{-\frac{2A''_1}{\pi}}$, und in $\alpha^{\frac{2A''_1}{\pi}}$ multiplicirt wird [vergl. 310, (3.)]. Der Satz ist daher bewiesen.

(3.) Mit Worten [vergl. 310, (8.)]: „die sphärische Summe der aufeinanderfolgenden Winkel irgend eines sphärischen Polygons ist, wenn sie in passender Aufeinanderfolge genommen werden, gleich einem Vielfachen von zwei rechten Winkeln, welches ungrade oder grade ist, je nachdem die Anzahl der Seiten (oder Ecken) des Polygons selbst ungrade oder grade ist"; die früher gegebne Definition [180, (4.)] einer sphärischen Summe von Winkeln wird folglich beibehalten. Und der Schluss kann kurz so ausgesprochen werden: Wenn ein willkürlicher Punkt C auf der Kugeloberfläche angenommen wird, wie in (1.), so ist die sphärische Summe der beiden Theilwinkel, an den Enden irgend einer Seite, das Supplement des Winkels, welcher jene Seite umspannt, im Punkte C; aber die Summe aller solcher Winkel, welche umspannt werden, ist entweder vier rechte Winkel, oder ein gewisses ganzes Vielfaches davon: daher kann die Summe ihrer Supplemente sich nur um ein gewisses derartiges Vielfaches von $n\pi$ unterscheiden, wenn n die Anzahl der Seiten ist.

(4.) Welches auch immer diese Anzahl sein mag, wenn wir mit p_n das exponential Product in der Formel I. bezeichnen,

Digitized by Google

so haben wir für jeden Vector ϱ, und für jeden Quaternion q, die Gleichungen:

$$\text{XI.} \ldots p_n \varrho p_n^{-1} = \varrho;$$
$$\text{XII.} \ldots p_n q p_n^{-1} = q;$$

von denen die erstere [nach 308, (8.)] in folgender Weise gedeutet werden kann: —

„Wenn man sich irgend eine Linie OP, welche vom Mittelpunkt O einer Kugel aus gezogen ist, konisch um irgend welche n Radien, $OA_1, \ldots OA_n$, als um n aufeinanderfolgende Drehungsachsen drehen lässt, um Winkel, welche bezüglich dem Doppelten der Winkel des sphärischen Vielecks $A_1 \ldots A_n$ gleich sind, so wird die Linie durch die Zusammensetzung dieser n Drehungen wieder in ihre Anfangslage zurückgebracht."

(5.) Ein anderer Weg, die erweiterte Formel I. für irgend ein sphärisches Polygon zu beweisen, ist demjenigen entsprechend, welcher in 311 für den Fall eines Dreiecks auf einer Kugel angewandt wurde, und kann, wie folgt, angegeben werden. Es seien $A'_1, A'_2, \ldots A'_n$ die positiven Pole der Bogen $A_1A_2, A_2A_3, \ldots A_nA_1$; und es seien $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots \alpha'_n$, die Einheitsvectoren dieser n Pole. Dann ist der Punkt A_1 der positive Pol des neuen Bogens $A'_1A'_n$, und der Winkel A_1 des Vielecks in diesem Punkte wird durch das Supplement dieses Bogens gemessen; und ähnliche Resultate gelten für andere Ecken des Vielecks. Somit erhalten wir das System von Ausdrücken (vergl. 311, VI.):

$$\text{XIII.} \ldots \alpha_1^{\frac{2A_1}{\pi}} = \alpha'_1 \alpha'_n; \ldots \alpha_n^{\frac{2A_n}{\pi}} = \alpha'_n \alpha'_{n-1};$$

so dass das Product von Potenzen in I. gleich dem folgenden Product der n Quadrate von Einheitslinien ist, und daher gleich der n-Potenz der negativen Einheit,

$$\text{XIV.} \ldots \alpha'_n \alpha'_{n-1} \cdot \alpha'_{n-1} \alpha'_{n-2} \ldots \alpha'_2 \alpha'_1 \cdot \alpha'_1 \alpha'_n = (-1)^n;$$

und somit ist der erweiterte Satz von Neuem bewiesen.

(6.) Dies letztere Verfahren kann auf einen anderen Satz über Drehungen übertragen werden, auf den ich möglicherweise, im zweiten und letzten Kapitel des dritten Theils,

kurz zurückkommen* kann, aber bei dem wir hier nicht verweilen können.

(7.) Es mag hier (vergl. 309, XII.) indessen bemerkt werden, dass die erweiterte exponential Formel I. so geschrieben werden kann:

$$\text{XV.}\ldots c\alpha_n s A_n . c\alpha_{n-1} s A_{n-1} \ldots c\alpha_2 s A_2 . c\alpha_1 s A_1 = (-1)^n.$$

(8.) Zum Beispiel, wenn $ABCD$ irgend ein sphärisches Vierseit ist, dessen Winkel (passend gemessen) durch $A, \ldots D$ bezeichnet werden, so dass A die positive oder negative Drehung von AD nach AB darstellt, u. s. w., während α, β, γ, δ die Einheitsvectoren seiner Ecken sind, dann ist

$$\text{XVI.}\ldots c\delta s D . c\gamma s C . c\beta s B . c\alpha s A = +1.$$

(9.) Daher können wir (vergl. 309, XIII.) auch schreiben,

$$\begin{aligned}\text{XVII.}\ldots &(\cos C - \gamma \sin C)(\cos D - \delta \sin D)\\ &= (\cos B + \beta \sin B)(\cos A + \alpha \sin A);\end{aligned}$$

und daher ist, wenn man auf beiden Seiten die Skalare nimmt, und die Vorzeichen wechselt,

$$\begin{aligned}\text{XVIII.}\ldots &- \cos C \cos D + \sin C \sin D \cos CD\\ &= -\cos B \cos A + \sin B \sin A \cos BA;\end{aligned}$$

in der That ist jedes Glied der letzten Formel (nach 309, XIV.) dem Cosinus des Winkels AEB, oder CED, gleich, wenn sich die gegenüberliegenden Seiten AD, BC des Vierseits in E schneiden.

(10.) Es sei $\rho = OP$ der Einheitsvector irgend eines fünften Punktes, P, auf der Kugeloberfläche; operirt man dann mit $S.\rho$ an XVII., so erhalten wir die weitere allgemeine Formel,

$$\text{XIX.}\ldots \begin{cases} 0 = \sin A \cos B \cos AP + \sin B \cos A \cos BP \\ \qquad + \sin A \sin B \sin AB \sin PQ \\ \qquad + \sin C \cos D \cos CP + \sin D \cos C \cos DP \\ \qquad + \sin C \sin D \sin CD \sin PR; \end{cases}$$

in der die Sinus der Seiten AB, CD stets als positiv behandelt werden; die Sinus der Lothe PQ und PR, auf diese

* Vergl. 297, (24.).

Digitized by Google

beiden Seiten, dagegen als positiv oder negativ betrachtet werden, je nachdem die Drehungen um P, von A nach B und von C nach D, negativ oder positiv sind: und aus ihr können, dadurch, dass man dem P besondere Lagen giebt, verschiedene andere, aber weniger allgemeine Gleichungen der sphärischen Trigonometrie abgeleitet werden.

(11.) Zum Beispiel, wenn wir P in den Durchschnittspunkt, nennen wir ihn F, der gegenüberliegenden Seiten AB, CD versetzen, so werden die beiden letzten Lothe null, und zwei von den sechs Gliedern aus der allgemeinen Formel XIX. verschwinden; und eine ähnliche Reduction auf vier Glieder begegnet uns, wenn wir den willkürlichen Punkt P zum Pol einer Seite, oder einer Diagonale machen.

314. Die Definition der Potenz α^t, welche in 308 angegeben wurde, setzt uns in den Stand, einige nützliche Ausdrücke, durch Quaternionen, für kreisförmige, elliptische, und spiralförmige Orte in einer gegebenen Ebne, oder im Raume, zu bilden, und einige wenige von ihnen mögen hier erwähnt werden.

(1.) Es sei α irgend ein gegebner Einheitsvector OA, und β irgend eine andere gegebne Linie OB, senkrecht zu ihr; dann ist, nach der Definition (308), wenn wir schreiben,

$$\text{I.} \ldots OP = \varrho = \alpha^t\beta, \quad T\alpha = 1, \quad S\alpha\beta = 0,$$

der Ort des Punktes P der Umfang eines Kreises mit dem Mittelpunkt O, und dem Radius OB, der in einer Ebne senkrecht zu OA liegt.

(2.) Wenn wir die Bedingung $T\alpha = 1$ beibehalten, aber nicht die Bedingung $S\alpha\beta = 0$, dann ist das Product $\alpha^t\beta$ im Allgemeinen ein Quaternion, und nicht nur ein Vector; aber wenn wir seinen Vectortheil (292) nehmen, können wir den neuen vector Ausdruck bilden,

$$\text{II.} \ldots OP = \varrho = V.\alpha^t\beta = \beta\cos x + \gamma\sin x,$$

wo

$$\text{III.} \ldots 2x = t\pi,$$

und

$$\text{IV.} \ldots \gamma = OC = V\alpha\beta;$$

und jetzt ist der Ort von P eine ebne Ellipse, deren Mittel-

punkt O ist, und deren grosse und kleine Halbachsen OB und OC sind: während die Winkelgrösse, x, das ist, was oft die excentrische Anomalie genannt wird.

(3.) Wenn wir schreiben, unter denselben Bedingungen (2.),

$$\text{V.}\ldots OB' = \beta' = V\beta\alpha : \alpha = \alpha^{-1}\gamma,$$

und

$$\text{VI.}\ldots OP' = \varrho' = V\varrho\alpha : \alpha = \alpha V\varrho\alpha,$$

so dass B' und P' die Projectionen (203) von B und P auf eine Ebne sind, welche durch O, rechtwinklig zur Einheitslinie OA, gelegt ist, so haben wir, nach II., die Gleichung,

$$\text{VII.}\ldots \varrho' = \beta' \cos x + \gamma \sin x = \alpha^t \beta',$$

so dass der Ort des projicirten Punktes P' ein Kreis ist, in dem OB' und OC zwei zu einander rechtwinklige Radien sind.

(4.) Unter denselben Bedingungen ist der elliptische Ort (2.), des Punktes P selbst, der Durchschnitt des graden Cylinders [vergl. 203, (5.)],

$$\text{VIII.}\ldots TV\alpha\varrho = TV\alpha\beta = T\gamma,$$

mit der Ebne,

$$\text{IX.}\ldots 0 = S\gamma\beta\varrho,$$

oder

$$\text{IX}'\ldots \beta^2 S\alpha\varrho = S\alpha\beta S\beta\varrho \quad \text{(vergl. 298, XXVI.)};$$

und als eine Bestätigung dieser letzten Formel haben wir, nach II. und IV.,

$$\text{X.}\ldots S\alpha\varrho = S\alpha\beta\cos x,$$
$$S\beta\varrho = \beta^2 \cos x.$$

(5.) Wenn wir die Bedingung $S\alpha\beta = 0$ (1.) beibehalten, aber jetzt nicht die Bedingung $T\alpha = 1$, so können wir wieder die Gleichung I. für ϱ schreiben; aber der Ort von P ist jetzt eine logarithmische Spirale, deren Pol O ist, in der Ebne senkrecht zu OA; denn gleiche Winkelbewegungen der drehenden Linie OP entsprechen jetzt gleichen Multiplicationen der Länge der Linie ϱ.

(6.) Zum Beispiel, wenn der skalar Exponent t um 4 anwächst, so dass die sich drehende Einheitslinie,

$$\text{XI.}\ldots U\varrho = U\alpha^t . U\beta$$

in die Richtung zurückkehrt (vergl. 309, XXIV.), welche sie

Digitized by Google

hatte, bevor das Anwachsen von t statt fand, so wird die Länge $T\rho$ der drehenden Linie ρ selbst, oder des Radius vector des Ortes, mit $T\alpha^t$ multiplicirt; und dieser constante und positive Skalar ist jetzt nicht gleich der Einheit.

(7.) Wenn wir beide Bedingungen (1.) verwerfen,

$$T\alpha = 1, \quad \text{und} \quad S\alpha\beta = 0,$$

so dass die Linie α, oder die Basis der Potenz α^t, jetzt weder eine Einheitslinie ist, noch senkrecht zu β, nämlich zu derjenigen Linie, an welcher die Potenz operirt, als ein Factor, so müssen wir wieder vector Theile nehmen, aber wir haben jetzt den neuen Ausdruck:

$$\text{XII.} \ldots OP = \rho = V.\alpha^t\beta = a^t(\beta\cos x + \gamma\sin x),$$

in dem wir zur Abkürzung geschrieben haben,

$$\text{XIII.} \ldots a = T\alpha, \qquad \gamma = V(U\alpha.\beta).$$

(8.) In diesem complicirteren Falle ist der Ort von P wieder eine ebne Curve, und kann jetzt eine elliptische* logarithmische Spirale genannt werden; denn wenn wir den skalar Factor, α^t, unterdrücken, so verfallen wir wieder auf die Form II., und haben wieder eine Ellipse als Ort: aber wenn wir diesen Factor in Rechnung ziehn, so finden wir [vergl. (2.)], dass gleiche Zunahmen der excentrischen Anomalie (x), in der so bestimmten Hülfsellipse, gleichen Vervielfachungen der Länge ($T\rho$) des Vectors der neuen Spirale entsprechen.

(9.) Wir können auch B und P, wie in (3.), in die Punkte B' und P', auf die Ebne durch O senkrecht zu OA projiciren, und diese Ebne enthält wieder den Endpunkt C des Hülfsvectors γ; und dann wird, da leicht zu beweisen ist, dass $\gamma = U\alpha.\beta'$, die Gleichung der projicirten Spirale (wenn $T\alpha >$ oder < 1),

$$\text{XIV.} \ldots \rho' = a^t(\beta'\cos x + \gamma\sin x) = \alpha^t\beta';$$

so dass wir wieder auf den Fall (5.) gebracht werden, und wir

* Die gebräuchliche logarithmische Spirale könnte vielleicht, im Gegensatz zu dieser, eine kreisförmige logarithmische Spirale genannt werden. Vergleiche den folgenden Nebenartikel (9.), in Betreff der Projection der hier sogenannten elliptischen logarithmischen Spirale.

sehn, dass die projicirte Curve eine logarithmische Spirale ist, von der bekannten und gewöhnlichen Art.

(10.) Verschiedene Spiralen von doppelter Krümmung könnnen, in demselben allgemeinen Sinne, allein dadurch dargestellt werden, dass man ein vector Glied proportional mit t einführt, im Verein mit einem constanten vector Glied, oder ohne dasselbe, in jeden der vorher gegebenen Ausdrücke für den variablen Vector ϱ. Zum Beispiel, die Gleichung,

$$\text{XV.} \ldots \varrho = ct\alpha + \alpha^t\beta,$$

im Verein mit

$$T\alpha = 1, \qquad \text{und} \qquad S\alpha\beta = 0,$$

wo c irgend ein constanter Skalar verschieden von null ist, stellt eine Schraubenlinie dar, auf dem graden kreisförmigen Cylinder VIII.

(11.) Und wenn wir einen neuen und variablen Skalar, u, als Factor in das Glied rechter Hand einführen, und somit schreiben,

$$\text{XVI.} \ldots \varrho = ct\alpha + u\alpha^t\beta,$$

so erhalten wir einen Ausdruck für einen variablen Vector ϱ, der von zwei variablen Skalaren (t und u) abhängig angesehn wird, und der somit (99) der Ausdruck für einen Vector einer Fläche wird: nämlich jener wichtigen Schraubenfläche, welche der Ort der Lothe ist, die man von den verschiedenen Punkten einer gegebenen Schraubenlinie auf die Achse des Umdrehungscylinders fällt, auf welchem jene Schraubenlinie, oder spiralige Curve, gezogen ist.

315. Ohne für jetzt das Studium dieser Orte durch Quaternionen weiter zu verfolgen, mag doch bemerkt werden, dass die Definition (308) der Potenz α^t, besonders für den Fall, wenn $T\alpha = 1$ ist, in Verbindung mit den Gesetzen (182) von i, j, k, und mit der Identificirung (295) dieser drei wichtigen rechten Versoren mit ihren Indices, uns in den Stand setzt, ausser anderen die folgenden Transformationen aufzustellen, welche sich bei verschiedenen Gelegenheiten als nützlich erweisen werden.

Digitized by Google

(1.) Es sei α irgend ein Einheitsvector, und es möge t irgend ein Skalar sein; dann ist,

$$\text{I.}\ldots S.\alpha^{-t} = S.\alpha^{t};$$
$$\text{II.}\ldots S.\alpha^{-t-1} = S.\alpha^{t+1} = -S.\alpha^{t-1};$$
$$\text{III.}\ldots \alpha^{t} = S.\alpha^{t} + \alpha S.\alpha^{t-1};$$
$$\text{IV.}\ldots \alpha^{-t} = S.\alpha^{t} - \alpha S.\alpha^{t-1};$$
$$\text{V.}\ldots (S.\alpha^{t})^{2} + (S.\alpha^{t-1})^{2} = \alpha^{t}\alpha^{-t} = 1.$$

(2.) Es mögen α und ι irgend zwei Einheitsvectoren sein, und es sei t wieder irgend ein Skalar; dann ist

$$\text{VI.}\ldots S.\alpha^{t} = S.\iota^{t};$$
$$\text{VII.}\ldots V.\alpha^{t} = \alpha S.\alpha^{t-1};$$
$$\text{VIII.}\ldots \alpha V.\alpha^{t} = \alpha^{2} S.\alpha^{t-1} = S.\alpha^{t+1}.$$

(3.) Daher ist, nach den Gesetzen von i, j, k,

$$\text{IX.}\ldots iV.i^{t} = jV.j^{t} = kV.k^{t} = S.\alpha^{t+1}.$$

(4.) Wir haben auch, nach denselben Grundsätzen und Gesetzen,

$$\text{X.}\ldots iV.j^{t} = V.k^{t};$$
$$jV.k^{t} = V.i^{t};$$
$$kV.i^{t} = V.j^{t};$$
$$\text{XI.}\ldots jV.i^{t} = -V.k^{t};$$
$$kV.j^{t} = -V.i^{t};$$
$$iV.k^{t} = -V.j^{t}.$$

(5.) Der Ausdruck 308, (10.), für einen beliebigen Vector ϱ, kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$\text{XII.}\ldots \varrho = rV.k^{2s+1} + rk^{2t}V.i^{2s}.$$

(6.) Und er kann, wie folgt, entwickelt werden:

$$\text{XIII.}\ldots \varrho = r\{(i\cos t\pi + j\sin t\pi)\sin s\pi + k\cos s\pi\}.$$

(7.) Wir werden im zweiten Kapitel dieses Theils auf einige von diesen letzten Ausdrücken zurückkommen, im Zusammenhang mit Differentialen und Ableitungen von Potenzen von Vectoren; aber für die Zwecke dieses Abschnitts ist genug gegeben.

Elfter Abschnitt.

Ueber Potenzen und Logarithmen diplanarer Quaternionen; und über einige zusätzliche Formeln.

316. Wir wollen dieses Kapitel mit einem kurzen ergänzenden Abschnitt schliessen, in dem die letzte Definition (308) einer Potenz eines Vectors, mit einem skalar Exponenten, so erweitert werden soll, dass er den allgemeinen Fall einer Potenz eines Quaternions mit einem quaternion Exponenten einschliesst, selbst wenn die beiden so in Zusammenhang gebrachten Quaternionen diplanar sind: und eine damit im Zusammenhang stehende Definition soll gegeben werden (welche in Uebereinstimmung ist mit der weniger allgemeinen von derselben Art, die im zweiten Kapitel des zweiten Theils angegeben wurde), für den Logarithmus eines Quaternions in einer beliebigen Ebne*: zusammen mit einigen wenigen zusätzlichen Formeln, welche vorher nicht so passend eingeführt werden konnten.

(1.) Wir schlagen nun vor, allgemein zu schreiben,

$$\text{I.} \ldots \varepsilon^q = 1 + \frac{q}{1} + \frac{q^2}{1.2} + \frac{q^3}{1.2.3} + \text{u. s. w.};$$

q sei irgend ein Quaternion, und ε sei die reelle und bekannte Basis des natürlichen (oder Napier'schen) Systems der Logarithmen reeller und positiver Skalare; so dass (wie üblich)

$$\text{II.} \ldots \varepsilon = \varepsilon^1 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1^2}{1.2} + \text{u. s. w.}$$
$$= 2{\cdot}71828 \ldots$$

[Vergl. 240, (1.) und (2.).]

(2.) Wir werden auch, für irgend einen Quaternion q, den folgenden Ausdruck für seinen — wie wir ihn nennen wollen — Hauptlogarithmus, oder einfach seinen Logarithmus, hinschreiben,

* Die Quaternionen, welche in dem Kapitel, auf welches Bezug genommen ist, betrachtet worden sind, waren sämmtlich in der Ebne des rechten Versors i angenommen. Siehe dagegen die zweite Anmerkung zu Seite 355.

Digitized by Google

$$\text{III.}\ldots lq = lTq + \angle q \,.\, UVq;$$

und somit erhalten wir (vergl. 243) die Gleichung.

$$\text{IV.}\ldots \varepsilon^{lq} = q.$$

(3.) Wenn q irgend ein wirklicher Quaternion (144) ist, der nicht zu einem negativen Skalar entartet (131), so giebt die Formel III. einen bestimmten Werth für den Logarithmus, lq, an; er ist von der Art (vergl. wieder 243), dass

$$\text{V.}\ldots Slq = lTq;$$
$$\text{VI.}\ldots Vlq = \angle q \,.\, UVq;$$
$$\text{VII.}\ldots UVlq = UVq;$$
$$\text{VIII.}\ldots TVlq = \angle q;$$

der skalar Theil des Logarithmus ist somit der (natürliche) Logarithmus des Tensors; und der vector Theil desselben Logarithmus lq wird durch eine Linie in der Richtung der Achse Ax. q construirt, deren Länge zu der angenommenen Längeneinheit in demselben Verhältniss steht, wie dasjenige ist, welches der Winkel $\angle q$ zu der üblichen Winkeleinheit [vergl. 241, (2.), (4.)] hat.

(4.) Wenn allein verlangt würde, es sollte der Gleichung,

$$\text{IX.}\ldots \varepsilon^{q'} = q,$$

genügt werden, in welcher q als ein gegebener und wirklicher Quaternion angenommen wird, welcher nicht gleich irgend einem negativen Skalar (3.) ist, so könnten wir das thun, indem wir schreiben (vergl. wieder 243),

$$\text{X.}\ldots q' = (\log q)_n = lq + 2n\pi UVq,$$

wo n irgend eine ganze Zahl ist, positiv oder negativ oder null; und unter diesem Gesichtspunkt ist das, was wir den Logarithmus, lq, des Quaternions q, genannt haben, nur das, was als die einfachste Lösung der exponential Gleichung IX. betrachtet werden kann, und als solche so bezeichnet werden kann:

$$\text{XI.}\ldots lq = (\log q)_0.$$

(5.) Der ausgenommene Fall (3.), wenn q ein negativer Skalar ist, wird in dem Sinne ein unbestimmter, aber kein unmöglicher Fall: denn wir haben, zum Beispiel, nach der

Definition III. den folgenden Ausdruck für den Logarithmus der negativen Einheit,

$$\text{XII.} \ldots l(-1) = \pi\sqrt{-1};$$

der in seiner Form mit älteren und wohlbekannten Resultaten übereinstimmt, aber hier so gedeutet wird, als ob er irgend einen Einheitsvector bedeute, dessen Länge zu der Längeneinheit im Verhältniss von π zu 1 (vergl. 243, VII.) steht.

(6.) Wir schlagen auch vor, allgemein, für irgend zwei Quaternionen, q und q', selbst wenn sie diplanar sind, den folgenden Ausdruck [vergl. 243, (4.)] für den — wie wir sagen wollen — Hauptwerth der Potenz, oder einfach für die Potenz, hinzuschreiben, in welchem der vorige Quaternion q die Basis ist, während der letztere Quaternion q', der Exponent ist:

$$\text{XIII.} \ldots q^{q'} = \varepsilon^{q' l q};$$

und so erhält die quaternion Potenz, im Allgemeinen, mit Hülfe der Definitionen I. und III., eine vollkommen bestimmte Bedeutung.

(7.) Wenn die Basis, q, ein Vector, ϱ, wird, so wird sein Winkel ein rechter Winkel; die Definition III. ergiebt daher, für diesen Fall,

$$\text{XIV.} \ldots l\varrho = l\,T\varrho + \frac{\pi}{2}\,U\varrho;$$

und das ist der Quaternion, welcher in dem Ausdruck,

$$\text{XV.} \ldots \varrho^{q'} = \varepsilon^{q' l \varrho},$$

mit q' multiplicirt wird.

(8.) Wenn der Exponent q', bei derselben vector Basis, ein Skalar, t, wird, so wird die letzte Formel:

$$\text{XVI.} \ldots \varrho^t = \varepsilon^{t l \varrho} = T\varrho^t \,.\, \varepsilon^{x U\varrho},$$

wenn

$$2x = t\pi;$$

und da, nach I., die Beziehung $(U\varrho)^2 = -1$, ergiebt,

$$\text{XVII.} \ldots \varepsilon^{x U\varrho} = \cos x + U\varrho \sin x,$$

oder kurz,

$$\text{XVII}'. \ldots \varepsilon^{x U\varrho} = c\,\varrho\, s\, x,$$

so sehn wir, dass die vorige Definition, 308, I., der Potenz α^t,

Digitized by Google

auf diesem Wege reproducirt wird, als eine, welche in der allgemeineren Definition XIII., der Potenz q^q, mitenthalten ist; denn wir können, nach der zuletzt erwähnten Definition, schreiben,

$$\text{XVIII.}\ldots (U\varrho)^t = \varepsilon^{xU\varrho} = c\varrho s\frac{t\pi}{2} \quad \text{(vergl. 234, VIII.)},$$

mit den letzten Werthen XVI. und XVII. für x und $\varepsilon^{xU\varrho}$.

(9.) In der jetzt vorgetragenen Theorie diplanarer Quaternionen können wir nicht erwarten, zu finden, dass die Summe der Logarithmen irgend zweier vorgeschlagenen Factoren, allgemein, gleich dem Logarithmus des Productes sein wird; doch in dem einfacheren und zuerst behandelten Falle complanarer Quaternionen, kann diese algebraische Eigenschaft als geltend angesehn werden, mit den gebührenden Modificationen in Betreff der Vielfachheit der Werthe.*

(10.) Die Definition III. setzt uns indessen in den Stand, allgemein die sehr einfache Formel (vergl. 243, II., III.) aufzustellen:

$$\text{XIX.}\ldots lq = l(Tq\,.\,Uq) = lTq + lUq;$$

in welcher [vergl. (3.)],

$$\text{XX.}\ldots\ lUq = \angle q\,.\,UVq = Vlq;$$
$$\text{XXI.}\ldots TlUq = \angle q;$$
$$\text{XXII.}\ldots UlUq = UVq.$$

(11.) Wir haben auch allgemein, nach XIII., für irgend einen skalar Exponenten, t, und irgend eine quaternion Basis, q, die Potenz,

$$\text{XXIII.}\ldots q^t = \varepsilon^{tlq} = (Tq)^t\,.\,(\cos t\angle q + UVq\,.\sin t\angle q);$$

oder kurz,

$$\text{XXIII}'\ldots q^t = Tq^t\,.\,cvst\angle q,$$

wenn

$$v = UVq;$$

hier können die Parenthesen um Tq fortgelassen werden, denn es ist

$$\text{XXIV.}\ldots T(q^t) = (Tq)^t = Tq^t \quad \text{(vergl. 237, II.)}.$$

(12.) Wenn die Basis und der Exponent einer Potenz zwei rechtwinklige Vectoren, ϱ und ϱ', sind, dann ist, wie auch

* In 243, (3.) hätte bemerkt werden können, dass jeder Werth jeden Gliedes der Formel IX., welcher dort gegeben wurde, einer der Werthe des anderen Gliedes ist; und eine ähnliche Bemerkung passt auf die Formeln I. und II. von 236.

immer ihre Länge sein mag, das Product $\varrho' l \varrho$, nach XIV., ein Vector; aber $\varepsilon^{\varepsilon}$ ist stets ein Versor,

$$\text{XXV.} \ldots \varepsilon^{\alpha} = \cos T\alpha + U\alpha \sin T\alpha,$$

wenn α irgend ein Vector ist; wir haben daher,

$$\text{XXVI.} \ldots T.\varrho^{\varepsilon'} = 1,$$

wenn

$$S.\varrho\varrho' = 0;$$

oder mit Worten, die Potenz $\varrho^{\varepsilon'}$ ist ein Versor, unter der vorigen Bedingung der Rechtwinkligkeit.

(13.) Zum Beispiel [vergl. 242, (7.)*, und die gleich folgende Formel XXVIII.),

$$\text{XXVII.} \ldots i^j = \varepsilon^{j\frac{\pi}{2}i} = -k;$$
$$j^i = \varepsilon^{i\frac{\pi}{2}j} = +k;$$

und allgemein, wenn die Basis eine Einheitslinie ist, und der Exponent eine Linie von irgend welcher Länge, aber senkrecht zur Basis, so ist die Achse der Potenz eine Linie senkrecht zu beiden; wenn auch die Richtung dieser Achse unbestimmt wird, dadurch dass sich die Potenz selbst auf einen Skalar reducirt, was in gewissen Fällen vorkommen kann.

(14.) Somit können wir schreiben, was für ein Skalar c auch sein mag,

$$\text{XXVIII.} \ldots i^{cj} = \varepsilon^{c\frac{\pi}{2}ji} = \varepsilon^{-\frac{1}{2}ck\pi}$$
$$= \cos\frac{c\pi}{2} - k\sin\frac{c\pi}{2};$$

diese Potenz ist daher ein Versor (12.), und seine Achse ist allgemein die Linie $\mp k$; aber in dem Fall, wenn c irgend eine ganze und grade Zahl ist, entartet dieser Versor zur positiven oder negativen Einheit (153), und die Achse wird unbestimmt (131).

(15.) Wenn wir wieder, für irgend welchen reellen Quaternion, q, schreiben,

$$\text{XXIX.} \ldots UVq = v,$$

und daher

* Wir fanden es in der Theorie complanarer Quaternionen angemessen, eine gewisse Vielfachheit des Werthes für eine Potenz zuzulassen, wenn der Exponent nicht eine ganze Zahl war; und daher wurde eine Bezeichnung für den Hauptwerth einer Potenz angewandt, von der uns die Uebereinkommen des gegenwärtigen Abschnitts in den Stand setzen, abzusehn.

Digitized by Google

$$\text{XXX.}\ldots vq = qv,$$

und

$$\text{XXXI.}\ldots v^2 = -1,$$

so bleibt das Verfahren von 239 gültig, wenn wir i mit v vertauschen; die Reihe, welche in I. mit ε^q bezeichnet wurde, ist daher stets zuletzt convergent*, wie gross auch immer (aber endlich) der Tensor Tq sein mag; und ebenso sind die beiden folgenden weiteren Reihen, die aus ihr abgeleitet sind, und welche darstellen [vergl. 242, (3.)], was wir, allgemein, nach Analogie mit bekannten Ausdrücken, den Cosinus und Sinus des Quaternions q nennen können, schliesslich stets convergent:

$$\text{XXXII.}\ldots \cos q = \tfrac{1}{2}(\varepsilon^{vq} + \varepsilon^{-vq})$$
$$= 1 - \frac{q^2}{1.2} + \frac{q^4}{1.2.3.4} - \text{u. s. w.};$$

$$\text{XXXIII.}\ldots \sin q = \frac{1}{2v}(\varepsilon^{vq} - \varepsilon^{-vq})$$
$$= \frac{q}{1} - \frac{q^3}{1.2.3} + \frac{q^5}{1.2.3.4.5} - \text{u. s. w.}$$

(16.) Wir werden auch als Definition aufstellen, dass die Secante, Cosecante, Tangente und Cotangente eines Quaternions, der wieder als reell angenommen wird, die Functionen sind:

$$\text{XXXIV.}\ldots \sec q = \frac{2}{\varepsilon^{vq} + \varepsilon^{-vq}}; \qquad \operatorname{cosec} q = \frac{2v}{\varepsilon^{vq} - \varepsilon^{-vq}};$$

$$\text{XXXV.}\ldots \tan q = \frac{v^{-1}(\varepsilon^{vq} - \varepsilon^{-vq})}{\varepsilon^{vq} + \varepsilon^{-vq}}; \qquad \cot q = \frac{v(\varepsilon^{vq} + \varepsilon^{-vq})}{\varepsilon^{vq} - \varepsilon^{-vq}};$$

und somit haben wir die üblichen Beziehungen, $\sec q = 1 : \cos q$, u. s. w.

(17.) Wir haben auch,

$$\text{XXXVI.}\ldots \varepsilon^{vq} = \cos q + v \sin q;$$
$$\varepsilon^{-vq} = \cos q - v \sin q;$$

und daher ist, wie in der Trigonometrie [vergl. 315, (1.)],

$$\text{XXXVII.}\ldots (\cos q)^2 + (\sin q)^2 = \varepsilon^{vq} . \varepsilon^{-vq}$$
$$= \varepsilon^0$$
$$= 1,$$

was für ein Quaternion q auch sein mag.

* In der That kann man beweisen, dass diese endliche Convergenz besteht, selbst wenn der Quaternion imaginär ist, oder wenn er durch einen Biquaternion [214, (8.)] ersetzt wird; aber wir haben hier keine Gelegenheit, irgend welche anderen, als reelle Quaternionen in Betracht zu ziehn.

Digitized by Google

(18.) Und alle die Formeln der Trigonometrie für die Cosinus und Sinus der Summen von zwei oder mehr Bogen, u. s. w., bleiben somit auch für Quaternionen gültig, vorausgesetzt, dass die so zu combinirenden Quaternionen in ein und derselben Ebne liegen; zum Beispiel,

XXXVIII. . . $\cos(q' + q) = \cos q' \cos q - \sin q' \sin q$,

wenn

$$q' \parallel q.$$

(19.) Diese Bedingung der Complanarität ist hier eine nothwendige; denn [vergl. (9.)] sie ist für die Aufstellung der exponential Beziehung zwischen Summen und Potenzen nothwendig.

(20.) Somit können wir in der That schreiben,

XXXIX. . . $\varepsilon^{q'+q} = \varepsilon^{q'} . \varepsilon^{q}$,

wenn

$$q' \parallel q;$$

aber, im Allgemeinen, ergeben die Entwicklungen dieser beiden Ausdrücke die Differenz,

XL. . . $\varepsilon^{q'+q} - \varepsilon^{q'}\varepsilon^{q} = \frac{qq' - q'q}{2}$ + Glieder dritter und höherer Ordnungen; und

XLI. . . $\frac{1}{2}(qq' - q'q) = V(Vq . Vq')$,

ein Ausdruck, welcher nicht verschwindet, wenn die Quaternionen q und q' diplanar sind.

(21.) Einige wenige ergänzende Formeln, welche mit dem gegenwärtigen Kapitel im Zusammenhang stehn, können hier angefügt werden, wie es zu Anfang des Artikels (316) erwähnt wurde. Und zuerst mag bemerkt werden, da es mit der Theorie der Potenzen von Vectoren im Zusammenhang steht, dass, wenn α, β, γ irgend drei Einheitslinien, OA, OB, OC, sind und wenn σ die Fläche des sphärischen Dreiecks ABC bezeichnet, dann die Formel 298, XX. so geschrieben werden kann:

XLII. . . $\frac{\alpha+\beta}{\beta+\gamma} . \frac{\gamma+\alpha}{\alpha+\beta} . \frac{\beta+\gamma}{\gamma+\alpha} = \alpha^{\frac{2\sigma}{\pi}}$;

der Exponent ist hier ein Skalar.

(22.) Die unmittelbar vorhergehende Formel, 298, XIX., ergiebt, für irgend drei Vectoren, die Relation:

XLIII. . . $(U\alpha\beta\gamma)^2 + (U\beta\gamma)^2 + (U\alpha\gamma)^2 + (U\alpha\beta)^2$
$+ 4U\alpha\gamma . SU\alpha\beta . SU\beta\gamma = -2$;

Digitized by Google

zum Beispiel, wenn α, β, γ gleich i, j, k gemacht werden, so wird das erste Glied dieser Gleichung, $1-1-1-1+0=-2$.

(23.) Das Folgende ist eine viel complicirtere Identität, welche nicht nur drei willkürliche Vectoren α, β, γ umfasst, sondern auch vier willkürliche Skalare, a, b, c und r; aber sie lässt gewisse geometrische Anwendungen zu, und der Leser wird finden, dass es eine gute Uebung in Transformationen ist, einem Beweise für sie selbst nachzuforschen. Um die Bezeichnung abzukürzen, werden die drei Vectoren α, β, γ, und die drei Skalare a, b, c so angesehn, als ob sie je einen Cyklus bildeten, mit Bezug auf welchen die Summen Σ, und die Producte Π gebildet werden, in einem Sinne, der so durch ein Beispiel erläutert werden kann:

$$\text{XLIV.}\ldots\ \Sigma a V\beta\gamma = aV\beta\gamma + bV\gamma\alpha + cV\alpha\beta;$$
$$\Pi a^2 = a^2b^2c^2.$$

Nachdem dies verständlich gemacht ist, gebe ich die zu beweisende Formel; sie ist die folgende:

$$\begin{aligned}\text{XLV.}\ldots\ &(S\alpha\beta\gamma)^2 + (\Sigma\alpha V\beta\gamma)^2 + r^2(\Sigma V\beta\gamma)^2\\ &- r^2[\Sigma a(\beta-\gamma)]^2 + 2\Pi(r^2 + S\beta\gamma + bc) = 2\Pi(r^2+a^2)\\ &+ 2\Pi a^2 + \Sigma(r^2+\alpha^2+a^2)\{(V\beta\gamma)^2\\ &+ 2bc(r^2+S\beta\gamma) - r^2(\beta-\gamma)^2\};\end{aligned}$$

das Summationszeichen in der letzten Linie erstreckt sich über alles, was folgt.

(24.) Zum Beispiel, wenn man die vier Skalare a, b, c, r jeden $=0$ macht, so ergiebt die Formel für irgend drei Vectoren α, β, γ, die Beziehung,

$$\text{XLVI.}\ldots\ (S\alpha\beta\gamma)^2 + 2\Pi S\beta\gamma = 2\Pi a^2 + \Sigma.a^2(V\beta\gamma)^2;$$

und sie stimmt mit der sehr nützlichen Gleichung 294, LIII. überein, denn

$$\begin{aligned}\text{XLVII.}\ldots\ \alpha^2(V\beta\gamma)^2 &= \alpha^2\{(S\beta\gamma)^2 - \beta^2\gamma^2\}\\ &= (\alpha S\beta\gamma)^2 - \Pi a^2.\end{aligned}$$

(25.) Es seien α, β, γ die Vectoren der drei Punkte A, B, C, welche ausserhalb einer gegebenen Kugel liegen, deren Radius r ist, und deren Gleichung ist,

$$\text{XLVIII.}\ldots\ \rho^2 + r^2 = 0, \quad \text{(vergl. 282, XIII.)};$$

und es mögen, a, b, c die Längen der Tangenten an diese Kugel bezeichnen, welche von diesen drei Punkten aus bezüglich gezogen sind. Wir haben dann die Beziehungen:

$$\text{XLIX.}\ldots\ \alpha^2 + a^2 = \beta^2 + b^2 = \gamma^2 + c^2 = -r^2;$$

so dass $r^2 + a^2 = -\alpha^2$, u. s. w., und das zweite Glied der Formel XLV. verschwindet; das erste Glied dieser Formel ist daher auch gleich null, bei diesen Bedeutungen der Buchstaben: und somit erhält man einen Satz, welcher sich sehr nützlich erweist, bei der Erforschung des Systems der acht (reellen oder imaginären) kleinen Kreise, welche eine gegebene Reihe von drei kleinen Kreisen auf einer Kugel berühren.

(26.) Wir können auf diese Erforschung hier nicht eingehn; aber können bemerken, dass, da der Vector ϱ des Fusspunktes P des Lothes OP, welches vom Anfangspunkt O auf die grade Linie AB gefällt ist, durch den Ausdruck,

$$\text{L.}\ldots\ \varrho = \alpha S\frac{\beta}{\beta-\alpha} + \beta S\frac{\alpha}{\alpha-\beta} = \frac{V\beta\alpha}{\alpha-\beta},$$

gegeben wird, wie auf mannigfachen Wegen bewiesen werden kann, die Bedingung der Berührung der graden Linie AB mit der Kugel XLVIII. durch die Gleichung ausgedrückt wird,

$$\text{LI.}\ldots\ TV\beta\alpha = r\,T(\alpha-\beta);$$

oder

$$\text{LII.}\ldots\ (V\beta\alpha)^2 = r^2(\alpha-\beta)^2;$$

oder durch eine andere leichte Transformation, mit Hülfe von XLIX.,

$$\text{LIII.}\ldots\ (r^2 + S\alpha\beta)^2 = (r^2+\alpha^2)(r^2+\beta^2) = a^2b^2.$$

(27.) Diese letzte Gleichung erlaubt offenbar eine Zerlegung in zwei Factoren, welche zwei abwechselnde Bedingungen darstellen, nämlich,

$$\text{LIV.}\ldots\ r^2 + S\alpha\beta - ab = 0;$$
$$\text{LV.}\ldots\ r^2 + S\alpha\beta + ab = 0;$$

und wenn wir wieder die Tangenten a und b (25.) als positiv ansehn, so ist leicht zu beweisen, auf mehrfach verschiedenen Wegen, dass der erste oder der zweite Factor ausgewählt wird, je nachdem der Punkt P, in welchem die Linie AB die Kugel berührt, zwischen die Punkte A und B fällt, oder nicht fällt; oder mit anderen Worten, je nachdem die Länge dieser Linie gleich der Summe, oder gleich der Differenz der beiden Tangenten ist.

Digitized by Google

(28.) In der That haben wir, im ersten Falle,

$$\text{LVI.} \ldots T(\beta - \alpha) = b + a,$$

oder

$$0 = (\beta - \alpha)^2 + (b + a)^2 = -2(r^2 + S\alpha\beta - ab),$$

kraft der Beziehungen XLIX.; dagegen, im zweiten Falle,

$$\text{LVII.} \ldots T(\beta - \alpha) = \pm (b - a),$$

oder

$$0 = (\beta - \alpha)^2 + (b - a)^2 = -2(r^2 + S\alpha\beta + ab);$$

und es mag bemerkt werden, dass wir auf diesem Wege hätten dahin gelangen können, das System der beiden Bedingungen (27.) zu finden, und daraus die Gleichung LIII., oder ihre Transformationen, LII. und LI.

(29.) Wir können uns einen Tangentenkegel von A aus denken, welcher der Kugel XLVIII. umschrieben ist, und welcher sie in einem kleinen Kreise berührt, dessen Ebne, oder die Polarebne des Punktes A, — wie man leicht findet — die Gleichung hat,

$$\text{LVIII.} \ldots S\alpha\varrho + r^2 = 0$$

[vergl. 294, (28.), und 215, (10.)]; und ebenso stellt die Gleichung,

$$\text{LIX.} \ldots S\beta\varrho + r^2 = 0,$$

die Polarebne des Punktes B dar, und diese Ebne schneidet die Kugel in einem zweiten kleinen Kreise: und diese beiden Kreise berühren einander, wenn eine der beiden Bedingungen (27.) erfüllt wird; solche Berührung ist eine äussere für den Fall LIV., dagegen eine innere für den Fall LV.

(30.) Die Bedingung (26.) für die Berührung der Linie und Kugel hätte auf andere Weise gefunden werden können, als die Bedingung für die Gleichheit der Wurzeln in der quadratischen Gleichung [vergl. 216, (2.)],

$$\text{LX.} \ldots 0 = (x\alpha + y\beta)^2 + (x + y)^2 r^2,$$

oder

$$\text{LXI.} \ldots 0 = x^2(r^2 + \alpha^2) + 2xy(r^2 + S\alpha\beta) + y^2(r^2 + \beta^2);$$

die Berührung wird somit hier als ein Fall des Zusammenfallens der Durchschnittspunkte angesehn.

(31.) Die Gleichung der Conjugation [vergl. 215, (13.)], welche ausdrückt, dass jeder der beiden Punkte A und B in der Polarebne des andern liegt, ist (mit den gegenwärtigen Bezeichnungen),

$$\text{LXII.} \ldots r^2 + S\alpha\beta = 0;$$

Digitized by Google

die gleichen, aber entgegengesetzten Wurzeln von LXI., welche dann statt haben, wenn die Linie die Kugel schneidet, entsprechen hier der wohlbekannten harmonischen Theilung der Secantlinie AB [vergl. 215, (16.)], und sie verbindet somit zwei conjugirte Punkte.

(32.) Ebenso erhalten wir, aus der quadratischen Gleichung 216, III., die entsprechende Gleichung,

$$\text{LXIII.} \ldots S\frac{\lambda}{\alpha} S\frac{\mu}{\alpha} - S\left(V\frac{\lambda}{\beta}.V\frac{\mu}{\beta}\right) = 1,$$

welche die Vectoren λ, μ irgend zweier Punkte L, M in Zusammenhang setzt, die conjugirt sind in Bezug auf das Ellipsoid 216, II.; und wenn wir den Punkt L auf die Oberfläche versetzen, so stellt die Gleichung LXIII. die Tangentialebne im Punkte L dar, wenn man sie als den Ort des conjugirten Punktes M ansieht; und daraus ist leicht die Normale in irgend einem Punkte des Ellipsoids abzuleiten. Aber alle Untersuchungen, welche Normalen zu Oberflächen betreffen, können besser im Zusammenhang mit der Differentialrechnung der Quaternionen durchgeführt werden, zu der wir zunächst übergehn wollen.

(33.) Es mag indessen hier hinzugefügt werden, in Betreff der Potenzen von Quaternionen mit skalar Exponenten (11.), dass das Symbol $q^t r q^{-t}$ einen Quaternion darstellt, welcher aus r gebildet wird, durch eine konische Drehung seiner Achse um diejenige von q um einen Winkel $= 2t\angle q$; und die beiden Glieder der Gleichung,

$$\text{LXIV.} \ldots (qrq^{-1})^t = qr^tq^{-1},$$

sind Symbole für ein und denselben Quaternion.

ilized by Google

Kapitel II.

Ueber Differentiale und Entwicklungen von Functionen der Quaternionen; und über einige Anwendungen der Quaternionen auf geometrische und physikalische Fragen.

Erster Abschnitt.

Ueber die Definition simultaner Differentiale.

317. In dem vorhergehenden Kapitel dieses Theils, und an verschiedenen Stellen des Theils, welcher ihm vorhergeht, haben wir in dem Maasse, als wir vorschritten, Gelegenheit genommen, eine beträchtliche Mannigfaltigkeit von Beispielen für die geometrische Verwendbarkeit der Quaternionen vorzubringen: aber sie wurden gegeben, hauptsächlich um uns zu unterstützen, dem Leser die Bedeutungen von neuen Bezeichnungen einzuprägen, oder die von neuen Combinationen von Symbolen, wenn sich solche unserer Beachtung von selbst im Fortgange darboten. In diesem Schlusskapitel wünschen wir einige wenige weitere Beispiele zu bieten, ebenfalls von geometrischer Art, aber in freierer Weise als vorher von Tangenten und Normalen an Curven und Oberflächen zu handeln; und wenigstens einige Proben für die Anwendung der Quaternionen auf physikalische Untersuchungen zu geben. Doch zuerst scheint mir nothwendig, hier einige Sätze, und einige Bezeichnungen, allgemein aufzustellen, welche Differentiale von Quaternionen, und von Functionen derselben betreffen.

318. Die gebräuchlichen Definitionen von Differentialcoefficienten und von abgeleiteten Functionen werden sich allgemein nicht anwendbar auf unsere Rechenart erweisen, in Folge der Eigenschaft der Quaternionmultiplication (168, 191),

allgemein nicht umkehrbar zu sein. Es wird daher nothwendig, zu einer neuen Definition der Differentiale unsere Zuflucht zu nehmen, welche doch so gefasst sein muss, dass sie mit den üblichen Regeln der Differentiation in Uebereinstimmung ist, und sie umschliesst: denn Skalare (131) sowohl, wie Vectoren (292), werden — wie wir gesehn haben — von dem allgemeinen Begriff der Quaternionen umfasst.

319. Indem wir nach einer solchen neuen Definition suchen, ist es natürlich, auf die ersten Grundsätze alles dessen zurückzugehn, was das Wesen der Differentiale ausmacht: und in Betracht zu ziehn, wie wohl der grosse Entdecker der Fluxionen die Frage würde behandelt haben, wenn er jenes mächtigen Hülfsmittels der gemeinen Rechnung beraubt gewesen wäre, welches durch den commutativen Charakter der algebraischen Multiplication gewährt wird; oder durch die gebräuchliche Gleichung,

$$xy = yx,$$

wenn man sie als eine allgemeine ansieht, oder als eine, welche für jedes Factorenpaar, x und y, besteht; doch sollen Grenzbetrachtungen stets erlaubt, unendlich kleine Grössen dagegen stets ausgeschlossen sein: und in der That würden die Fluxionen selbst als im Allgemeinen endlich*) angesehn werden können, nach dem, was die letzte Ansicht Newton's gewesen zu sein scheint.

320. Die Antwort auf diese Frage, welche ein Studium der Principia an die Hand zu geben scheint, ist in der folgenden Definition enthalten, welche — wie wir glauben — vollkommen allgemein ist, was den älteren Calcül betrifft, und welche wir vorschlagen, für Quaternionen zu adoptiren:

„Gleichzeitige Differentiale (oder entsprechende

---

* Vergleiche die Bemerkungen, welche dem zweiten Hülfssatz des zweiten Buchs der Principien (dritte Ausgabe, London 1726) angefügt sind; und besonders die folgende Stelle (Seite 244):

„Neque enim spectatur in hoc Lemmate magnitudo momentorum, sed prima nascentium proportio. Eodem recidit si loco momentorum usurpentur vel velocitates incrementorum ac decrementorum (quas etiam motus, mutationes et fluxiones quantitatum nominare licet) vel finitae quaevis quantitates velocitatibus hisce proportionales."

Digitized by Google

Fluxionen) sind Grenzwerthe Gleichvielfacher* von gleichzeitigen und abnehmenden Differenzen."

Und umgekehrt, wenn immer irgend welche gleichzeitigen Differenzen, irgend eines Systems von Variabeln, sämmtlich zusammen zu verschwinden streben, nach irgend einem Gesetz, oder System von Gesetzen; dann heissen diese Grenzwerthe, wenn irgend welche Gleichvielfachen dieser abnehmenden Differenzen sämmtlich zusammen irgend einem System von endlichen Grenzwerthen zustreben, gleichzeitige (simultane) Differentiale der zu einander in Beziehung stehenden Variabeln des Systems; und sie werden als solche dadurch bezeichnet, dass man den Buchstaben d, als ein charakteristisches Zeichen der Differentiation, dem Zeichen einer jeden solchen Variabeln vorsetzt.

321. Vollständiger und in Zeichen, es mögen

$$\text{I} \ldots q,\ r,\ s, \ldots$$

irgend ein System von Variabeln (quaternion oder anderen) bezeichnen, welche mit einander im Zusammenhang stehn; und es mögen

$$\text{II} \ldots \Delta q,\ \Delta r,\ \Delta s, \ldots$$

* Was den Begriff betrifft, solche Differenzen zu multipliciren, oder allgemein irgend welche Grössen, welche sämmtlich zusammen kleiner werden, zu dem Zweck, ihre schliesslichen Beziehungen ersichtlicher zu machen, so kann er durch verschiedene Stellen aus den *Principia* von Sir Isaac Newton gestützt werden; aber besonders durch den ersten Abschnitt des ersten Buchs. Man sehe zum Beispiel den siebenten Hülfssatz (p. 31), in welchem solche Ausdrücke, wie die folgenden, vorkommen: „*intelligantur semper AB et AD ad puncta longinqua b et d produci*", ... „*ideoque rectae semper finitae Ab, Ad, . . .*" Die Vorschrift, „*ad puncta longinqua produci*", wird im Zusammenhang mit dem achten und neunten Hülfssatz desselben Buchs und Abschnitts wiederholt; während wir unter dem ersteren von diesen beiden Hülfssätzen den Ausdruck antreffen, „*triangula semper finita*", welcher auf die vergrösserten Darstellungen von drei Dreiecken angewandt wird, die sämmtlich zusammen unbegrenzt abnehmen: und unter dem letzteren Hülfssatz treffen wir die Worte an, „*manente longitudine Ae*", wo Ae eine endliche und constante Linie ist, welche durch eine beständig zunehmende Vervielfachung einer beständig abnehmenden Linie AE (Seite 33 der erwähnten Ausgabe) erhalten wird.

wie üblich, ein System von Differentialen bezeichnen, welche mit ihnen in Verbindung stehn (oder simultan sind); in der Weise, dass die Summen,

$$\text{III.} \ldots q + \Delta q,\ r + \Delta r,\ s + \Delta s, \ldots$$

ein neues System von Variabeln sein sollen, welche denselben Gesetzen in Betreff des Zusammenhangs genügen, welche sie auch immer sein mögen, wie diejenigen sind, welchen durch das erste System I. genügt wird. Wenn man dann schrittweise von dem neuen System zu dem alten zurückgeht, oder schrittweise von dem alten zu dem neuen fortschreitet, so kann man die gleichzeitigen Differenzen II. (im Allgemeinen) sämmtlich dazu bringen, sich zusammen der Null zu nähern, denn es ist klar, dass sie sämmtlich zusammen verschwinden können. Wenn wir dagegen, während wir uns die Differenzen selbst in dieser Weise zusammen in unbegrenzter Weise abnehmen* denken, sie sämmtlich mit ein und derselben, aber anwachsenden Zahl, n, multiplicirt denken, so kann das System ihrer Gleichvielfachen,

$$\text{IV.} \ldots n\Delta q,\ n\Delta r,\ n\Delta s, \ldots$$

dahin streben, gleich einem gewissen bestimmten System von endlichen Grenzwerthen zu werden. Und wenn das stattfindet, wozu es in allen gewöhnlichen Fällen durch eine angemessene Anpassung des Zuwachses von n zur Abnahme von Δq, u. s. w. gebracht werden kann, so sagt man, die so erhaltenen Grenzwerthe sind die simultanen Differentiale der zu ihnen in Beziehung stehenden Variabeln, q, r, s; und sie werden als solche, durch die Symbole:

$$\text{V.} \ldots dq,\ dr,\ ds, \ldots$$

bezeichnet.

---

* Man kann sagen, ein Quaternion nimmt ab, wenn sein Tensor abnimmt; und er nehme unbegrenzt ab, wenn sein Tensor der Null zustrebt.

Digitized by Google

Zweiter Abschnitt.

Elementare Erläuterungen der Definition aus der Algebra und Geometrie.

322. Um keinen möglichen Zweifel, oder keine Unklarheit, in Betreff des Sinnes der vorhergehenden Definition zurückzulassen, wollen wir sie hier anwenden, um das Differential eines Quadrates, in der Algebra, und dasjenige eines Rechtecks, in der Geometrie, zu bestimmen; und dabei werden wir zeigen, dass, während für derartige Fälle die älteren Regeln reproducirt werden, die behandelten Differentiale nicht klein zu sein brauchen; und dass es ein Fehler und nicht eine Verbesserung der Resultate sein würde, wenn wir irgend welche weiteren Glieder in die Ausdrücke für dieselben einführen würden, zu dem Zwecke, sämmtliche Differentiale gleich den entsprechenden Differenzen zu machen: obwohl einige von ihnen so angenommen werden können, nämlich eins in dem ersten Beispiel, und in dem zweiten Beispiel zwei.

(1.) Was die Algebra betrifft, so wollen wir die Gleichung betrachten,

$$\text{I.} \ldots y = x^2;$$

sie ergiebt,

$$\text{II.} \ldots y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,$$

und daher, wie gewöhnlich,*

$$\text{III.} \ldots \Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^2;$$

oder was auf dasselbe hinauskommt,

$$\text{IV.} \ldots n\Delta y = 2xn\Delta x + n^{-1}(n\Delta x)^2,$$

wo n ein beliebiger Multiplicator ist, welcher, der Einfach-

* Wir schreiben hier, wie es gemeiniglich geschieht, Δx^2 um $(\Delta x)^2$ zu bezeichnen; während $\Delta . x^2$, nach derselben bekannten Uebereinkunft, für $\Delta(x^2)$, oder für Δy geschrieben werden würde. Ebenso werden wir dx^2, wie üblich, für $(dx)^2$ schreiben; und werden $d(x^2)$ durch $d . x^2$ bezeichnen. Vergleiche die Bezeichnungen Sq^2, $S . q^2$, und Vq^2, $V . q^2$, in 199 und 204.

heit wegen, als eine positive ganze Zahl angenommen werden kann.

(2.) Stellen wir uns jetzt vor, dass, während die Differenzen Δx und Δy abnehmen, welche stets mit einander und mit x durch die Gleichung III. verbunden bleiben, und zusammen der Null zustreben, die Zahl n anwächst, in der transformirten Gleichung IV., und der Unendlichkeit zustrebt, in einer solchen Weise, dass das Product, oder Vielfache, $n\Delta x$, einer gewissen endlichen Grenze a zustrebt; und das kann, zum Beispiel, der Fall sein, wenn wir uns die Verpflichtung auferlegen, dass Δx stets der Bedingung zu genügen habe,

$$\text{V.} \ldots \Delta x = n^{-1}a,$$

oder

$$n\Delta x = a,$$

nachdem wir vorher einen gewissen gegebenen und endlichen Werth für a ausgewählt haben.

(3.) Wir erhalten dann, mit der letzten Bedingung V., den folgenden Ausdruck nach IV. für das Gleichvielfache $n\Delta y$ der anderen Differenz Δy:

$$\begin{aligned} \text{VI.} \ldots n\Delta y &= 2xa + n^{-1}a^2 \\ &= \quad b \quad + n^{-1}a^2, \end{aligned}$$

wenn

$$b = 2xa$$

ist. Aber da a, und daher a^2, gegeben und endlich ist (2.), während die Zahl n ins Unendliche anwächst, so strebt das Glied $n^{-1}a^2$, in dem Ausdruck VI., für $n\Delta y$, ins Unbegrenzte der Null zu, und sein Grenzwerth ist in aller Strenge null. Daher sind die beiden endlichen Grössen, a und b (da x als endlich angenommen worden ist), zwei gleichzeitige Grenzwerthe, denen, unter den angenommenen Bedingungen, die beiden Gleichvielfachen, $n\Delta x$ und $n\Delta y$, zustreben*; sie sind daher, nach der

* In diesem Falle hat, in der That, das Vielfache $n\Delta x$ nach V. einen constanten Werth, nämlich a; aber es erweist sich als angemessen, den Gebrauch des Wortes, Grenzwerth, so auszudehnen, dass er den Fall von Constanten einschliesst: oder allgemein zu sagen, dass eine Constante ihr eigner Grenzwerth ist.

Digitized by Google

Definition (320), gleichzeitige Differentiale von x und y: und wir können demnach (321) schreiben,

$$\text{VII.}\ldots dx = a, \qquad dy = b = 2xa;$$

oder, wie gewöhnlich, nach Elimination von a,

$$\text{VIII.}\ldots dy = d.x^2 = 2x\,dx.$$

(4.) Und man würde den gebräuchlichen Ausdruck für das Differential des Quadrates einer Variabeln x in der Algebra nicht verbessern, sondern verschlechtern, nach der angenommenen Definition (320), wenn man zu ihm das Glied dx^2 hinzufügen würde, in Nachahmung der Formel III. für die Differenz $\Delta.x^2$. Denn dies würde darauf hinaus kommen, anzunehmen, dass für einen gegebenen und endlichen Werth, a, von dx, oder von $n\Delta x$, das Glied $n^{-1}a^2$, oder $n^{-1}dx^2$, in dem Ausdruck VI. für $n\Delta y$, aufhören könnte sich der Null zu nähern, während die Zahl, n, durch welche das Quadrat von dx dividirt wird, unbegrenzt anwächst, oder sich (wie oben) der Unendlichkeit nähert.

(5.) Als arithmetisches Beispiel mögen hier die Werthe gegeben werden,

$$\text{IX.}\ldots x = 2, \quad y = x^2 = 4, \quad dx = 1000;$$

und es wird gefordert, als Folgerung der Definition (320), den arithmetischen Werth des gleichzeitigen Differentials, dy, zu berechnen. Wir erhalten jetzt die folgenden Gleichvielfachen der gleichzeitigen Differenzen,

$$\text{X.}\ldots n\Delta x = dx = 1000;$$
$$n\Delta y = 4000 + 1000000\,n^{-1};$$

aber der Grenzwerth des n-ten Theils einer Million (oder irgend einer grösseren, aber gegebenen und endlichen Zahl) ist genau null, wenn n unbegrenzt anwächst; der gesuchte Werth von dy ist daher, in aller Strenge, in diesem Beispiel,

$$\text{XI.}\ldots dy = 4000.$$

(6.) Und wir sehn, dass die beiden gleichzeitigen Differentiale,

$$\text{XII.}\ldots dx = 1000,$$
$$dy = 4000,$$

in diesem Beispiel den beiden gleichzeitigen Differenzen,

$$\text{XIII.} \ldots \Delta x = dx = 1000,$$
$$\Delta y = 1002^2 - 2^2 = 1004000,$$

auch nicht annähernd gleich sind, den Differenzen, welche dem Werthe $n = 1$ entsprechen; wenn sie auch, ohne Zweifel, nach dem reinen Begriff der gleichzeitigen Differentiale, wie er in der Definition (320) verkörpert ist, solche gleichen Theile, welche man von ihnen zu nehmen hat, haben müssen, wie

$$\text{XIV.} \ldots n^{-1}dx \quad \text{und} \quad n^{-1}dy,$$

die, für grosse Werthe der Zahl n, einem gewissen System von gleichzeitigen und abnehmenden Differenzen,

$$\text{XV.} \ldots \Delta x \quad \text{und} \quad \Delta y,$$

nahezu gleich sind; und einem solchen System um so mehr und mehr nahezu gleich sind, selbst in der Art eines Verhältnisses, je kleiner und kleiner sie sämmtlich zusammen werden, und zusammen zu verschwinden streben.

(7.) Zum Beispiel, während die Differentiale selbst die constanten Werthe XII. beibehalten, sind ihre millionsten Theile, bezüglich,

$$\text{XVI.} \ldots n^{-1}dx = 0{\cdot}001,$$

und

$$n^{-1}dy = 0{\cdot}004,$$

wenn

$$n = 1000000;$$

und derselbe Werth der Zahl n ergiebt, nach X., die Werthe von gleicher Strenge der beiden gleichzeitigen Differenzen, wie folgt,

$$\text{XVII.} \ldots \Delta x = 0{\cdot}001,$$

und

$$\Delta y = 0{\cdot}004001;$$

so dass diese Werthe der abnehmenden Differenzen XV. schon als nahezu gleich den beiden gleichen Theilen, XIV. oder XVI., der beiden gleichzeitigen oder zusammengehörigen Differentiale, XII., angesehn werden können. Und es ist augenscheinlich, dass diese Annäherung noch besser erreicht werden würde,

wenn man grössere Werthe der Zahl, n, nähme, ohne die strengen und constanten Werthe XII., von dx und dy, dadurch überhaupt zu beeinflussen.

(8.) Es ist, indessen, auch augenscheinlich, dass wir, nach der Annahme $y = x^2$ und $x = 2$, wie in IX., auch irgend einen andern endlichen Werth für das Differential dx hätten annehmen können, anstatt des Werthes 1000; und wir würden dann einen verschiedenen (aber noch endlichen) Werth für das andere Differential, dy, haben ableiten können, und nicht den vorher abgeleiteten Werth, 4000: aber es würde stets, in diesem Beispiel, oder für diese Form der Function, y, und für diesen Werth der Variabeln, x, in aller Strenge die Beziehung zwischen den beiden gleichzeitigen Differentialen, dx und dy, bestehn,

$$\text{XVIII.} \ldots dy = 4dx;$$

sie ist unverkennbar ein Fall der Gleichung VIII., und kann durch gleiche Betrachtungen bewiesen werden.

323. Indem wir zu dem versprochenen Beispiel aus der Geometrie (322.) übergehn, werden wir wieder sehn, dass Differenzen und Differentiale im Allgemeinen nicht mit einander zu verwechseln sind, und dass die letzteren (gleichwie die ersteren) nicht klein zu sein brauchen. Aber wir werden auch sehn, dass die Differentiale (gleichwie die Differenzen), welche in der Aufstellung einer Beziehung, oder in dem Ausspruch eines Satzes vorkommen, welche Grössen betreffen, die sich zusammen ändern, irgend einem Gesetz oder irgend welchen Gesetzen gemäss, selbst nicht unter einander gleichartig zu sein brauchen: es wäre hinreichend, dass jede im Besondern mit der Variabeln gleichartig wäre, welcher sie entspricht, und deren Differential sie ist, wie eine Linie einer Linie, oder eine Fläche einer Fläche. Wir werden auch sehn, dass die Definition (320.) uns in den Stand setzt, das Differential eines Rechtecks zu construiren, als die Summe zweier anderen (endlichen) Rechtecke, ohne irgendwie auf Längeneinheiten, oder auf Flächeneinheiten Bezug zu nehmen, und ohne selbst in Gedanken irgend welche numerische Berechnung anzuwenden, von welcher Art sie auch immer sein mag.

(1.) Es sei also, wie in der nebenstehenden Figur 74, $ABCD$ irgend ein gegebnes Rechteck, und es seien BE und DG irgend beliebige, aber gegebne und endliche Zunahmen seiner Seiten, AB und AD. Man vervollständige das vergrösserte Rechteck $GAEF$, oder kurz AF, welches somit das gegebne Rechteck AC, oder CA, um die Summe der drei partiellen Rechtecke, CE, CF, CG, übertrifft; oder um den — wie wir sagen können — Gnomon*, $CBEFGDC$. Man nehme auf der Diagonale CF einen Punkt I an, so dass die Linie CI irgend ein beliebig gewählter Theil der Diagonale sein kann; und ziehe durch I, wie in der Figur, die Linien HM, KL, parallel zu den Seiten AD, AB; sie schneiden daher auf den Verlängerungen der Seiten AB, AD, gleiche Theile BH, DK der beiden gegebnen Zuwächse, BE, DG, der beiden gegebnen Seiten ab.

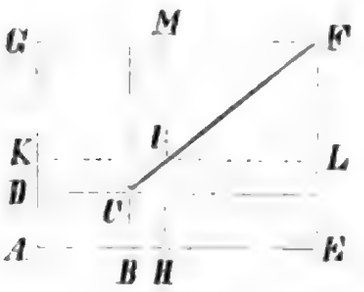


Fig. 71.

(2.) Man stelle sich jetzt vor, dass in dieser Construction der Punkt I an den Punkt C heranrücke, oder dass wir eine Reihe von neuen Punkten I auf der gegebnen Diagonale CF annehmen, näher und näher dem gegebnen Punkte C, indem wir die Linie CI, der Reihe nach, als einen kleineren und kleineren Theil der Diagonale annehmen. Dann nehmen die beiden neuen linearen Abstände, BH, DK, und der neue Gnomon, $CBHIKDC$, oder die Summe der drei neuen Theilrechtecke, CH, CI, CK, sämmtlich unbegrenzt ab, und streben zusammen zu verschwinden: sie bleiben, indessen, stets ein System dreier gleichzeitigen Differenzen (oder Zuwächse) der beiden gegebnen Seiten, AB, AD, und der gegebnen Fläche, oder des Rechtecks, AC.

(3.) Aber die gegebnen Zunahmen, BE und DG, der beiden gegebnen Seiten, sind stets (nach der Construction) Gleichvielfache der beiden ersten von den drei neuen und ab-

* Das Wort, Gnomon, wird hier mit einer ein wenig erweiterten Bedeutung gebraucht als im zweiten Buch des Euclid.

Digitized by Google

nehmenden Differenzen; sie können daher, nach der Definition (320), willkürlich angenommen werden als zwei gleichzeitige Differentiale der beiden Seiten, AB und AD, vorausgesetzt, dass wir dann den Grenzwerth des Gleichvielfachen des neuen Gnomon (2.), oder der abnehmenden Differenz zwischen den beiden Rechtecken, AC und AI, von denen das erste gegeben ist, als das entsprechende oder gleichzeitige Differential des Rechtecks AC behandeln.

(4.) Wir haben daher, zuerst, den neuen Gnomon, oder den Unterschied von AC, AI, oder der Summe (2.) der drei Theilrechtecke, CH, CI, CK, in dem Verhältniss von BE zu BH, oder von DG zu DK anwachsen zu lassen; und haben dann, zweitens, den Grenzwerth der so angewachsenen Fläche zu suchen. Denn dieser letzte Grenzwerth ist, nach der Definition (320.), genau und in aller Strenge gleich dem gesuchten Differential des Rechtecks AC; wenn die gegebnen und endlichen Zuwächse, BE und DG, als die Differentiale der Seiten. AB, AD, angenommen werden, wie es, nach (3.), erlaubt ist.

(5.) Wenn wir nun in dieser Weise jetzt die beiden neuen Theilrechtecke, CH und CK, anwachsen lassen, so erhalten wir genau die beiden vorigen Theilrechtecke, CE und CG; und sie müssen, da sie gegeben und constant sind, als ihre eigenen Grenzwerthe* angesehn werden. Wenn wir dagegen das andere neue Theilrechteck CI in demselben Verhältniss anwachsen lassen, so finden wir nicht das alte Theilrechteck CF wieder, welches ihm entspricht; sondern wir erhalten das neue Rechteck CL, oder das ihm gleiche Rechteck CM, welches nicht constant ist, sondern unbegrenzt abnimmt, in dem Maasse, als der Punkt I sich dem C nähert; und zwar in solcher Weise, dass der Grenzwerth der Fläche dieses neuen Rechtecks CL, oder CM, in aller Strenge null ist.

(6.) Wenn daher die gegebnen Zuwächse, BE, DG, wieder als die Differentiale der gegebnen Seiten AB, AD angenommen werden (eine Annahme, welche — wie wir sahn — erlaubt ist), so ist bewiesen (nicht angenommen), als eine nothwendige Folgerung der Definition (320), dass das Differential

* Vergleiche die Anmerkung auf Seite 570.

der gegebnen Fläche, oder des Rechtecks, AC, genau und in aller Strenge gleich der Summe der beiden Theilrechtecke CE und CG ist; denn das ist der Grenzwerth (5.) des Vielfachen des neuen Gnomon (2.), in der Construction.

(7.) Und wenn es irgend jemand gäbe, der annähme, er könne den bekannten Werth für das Differential eines Rechtecks dadurch verbessern, dass er zu ihm das Rechteck CF hinzufügte, als ein neues Glied oder als einen Theil von ihm, um es so dem vorigen oder gegebnen Gnomon (1.) gleich zu machen, so würde er (wenn man die Definition zugäbe) einen geometrischen Irrthum begehn, welcher damit gleichbedeutend wäre, anzunehmen, dass die beiden ähnlichen Rechtecke CI und CF zu einander im einfachen Verhältniss ihrer homologen Seiten stehn, anstatt im doppelten Verhältniss, wie es in der That der Fall ist.

Dritter Abschnitt.

Ueber einige allgemeine Folgerungen der Definition.

324. Es möge also irgend eine Gleichung von der Form vorgeschlagen werden,

$$\text{I} \ldots Q = F(q, r, \ldots);$$

und es seien dq, dr, . . . irgend welche angenommenen (aber im Allgemeinen endlichen) und gleichzeitigen Differentiale der Variabeln, q, r, . . ., mögen sie Skalare, oder Vectoren, oder Quaternionen sein, und von ihnen soll Q abhängen, nach der Gleichung I. Dann ist das entsprechende (oder gleichzeitige) Differential der Function, Q, von ihnen gleich (nach der Definition 320, vergleiche 321) dem folgenden Grenzwerth:

$$\text{II} \ldots dQ = \lim_{n=\infty} n \left\{ F(q + n^{-1}dq, r + n^{-1}dr, \ldots) - F(q, r, \ldots) \right\};$$

wo n irgend eine ganze Zahl (oder irgend ein anderer posi-

Digitized by Google

tiver* Skalar) ist, welchen man sich, wie es die Formel ausdrückt, unbegrenzt grösser und grösser werden und so zur Unendlichkeit streben denkt. Und wenn wir uns, im Besondern, die Function Q, als nur eine Variable q umfassend, vorstellen, so dass

$$\text{III.} \ldots Q = f(q) = fq,$$

dann ist

$$\text{IV.} \ldots dQ = dfq = \lim_{n=\infty} n \left\{ f(q + n^{-1}dq) - fq \right\};$$

eine Formel für das Differential einer einzelnen expliciten Function einer einzigen Variabeln, welche vollkommen mit derjenigen übereinstimmt, welche fast am Ende des ersten Theils für die Differentiale eines Vectors, und eines Skalars, gegeben wurde, wenn jeder von ihnen als eine Function (100) einer einzigen skalar Variabeln, t, angesehn wird; aber jetzt wird sie, als eine Folgerung aus der allgemeinen Definition (320), auf den Fall ausgedehnt, wenn die mit einander im Zusammenhang stehenden Variabeln, q, Q, und ihre Differentiale, dq, dQ, Quaternionen sind: mit einer analogen Anwendung der noch allgemeineren Formel für die Differentiation II. auf Functionen von mehreren Quaternionen.

(1.) Als ein Beispiel für den Gebrauch der Formel IV. wollen wir das Quadrat von q als die zu betrachtende Function von q nehmen, so dass

$$\text{V.} \ldots Q = fq = q^2.$$

Dann ist, nach der Formel,

$$\text{VI.} \ldots dQ = dfq = \lim_{n=\infty} n \left\{ (q + n^{-1}dq)^2 - q^2 \right\}$$
$$= \lim_{n=\infty} (q.dq + dq.q + n^{-1}dq^2),$$

wo dq^2 das Quadrat von dq bezeichnet**; das heisst,

$$\text{VII.} \ldots d.q^2 = q.dq + dq.q;$$

* Wenn man einige seltene Fälle von Unstetigkeit ausnimmt, welche wir für jetzt nicht in Betracht ziehn, so kann man sich eben so wohl vorstellen, dass der Skalar, n, der negativen Unendlichkeit zustrebt.

** Vergleiche die Anmerkung zu Seite 569.

oder ohne die Punkte* zwischen q und dq,

$$\text{VII}'\ldots d.q^2 = qdq + dqq;$$

und dieser Ausdruck für das Differential des Quadrates eines Quaternions lässt im Allgemeinen keine weitere Reduction zu: denn q und dq können im Allgemeinen nicht vertauscht werden, als Factoren bei der Multiplication. Wenn indessen grade statt hat, dass, wie in der Algebra, $q \,.\, dq = dq \,.\, q$ ist, nämlich, wenn die beiden Quaternionen q und dq complanar sind, dann nimmt der Ausdruck VII. augenscheinlich die übliche Form, 322, VIII., an, oder wird,

$$\text{VIII}\ldots d.q^2 = 2qdq,$$

wenn

$$dq \parallel q \qquad (123).$$

(2.) Als zweites Beispiel wollen wir annehmen, die Function sei der Reciproke,

$$\text{IX}\ldots Q = fq = q^{-1}.$$

Dann haben wir, da

$$\begin{aligned}\text{X}\ldots f(q + n^{-1}dq) - f(q) &= (q + n^{-1}dq)^{-1} - q^{-1} \\ &= (q + n^{-1}dq)^{-1}\{q - (q + n^{-1}dq)\}q^{-1} \\ &= -n^{-1}(q + n^{-1}dq)^{-1}.dq.q^{-1},\end{aligned}$$

— ein Ausdruck, dessen Grenzwerth $-q^{-1}dq.q^{-1}$ ist, wenn man ihn mit n multiplicirt — den folgenden Ausdruck für das Differential des Reciproken eines Quaternions,

$$\text{XI}\ldots d.q^{-1} = -q^{-1}.dq.q^{-1};$$

---

* Vergleiche die Anmerkung zu Seite 569.

** Der Punkt zwischen d und q^2, in dem ersten Gliede von VII. ist unerlässlich, um das Differential des Quadrates vom Quadrat des Differentials zu unterscheiden. Aber grade so, wie dies letztere Quadrat kurz durch dq^2 bezeichnet wird, so können die Producte, $q.dq$ und $dq.q$, geschrieben werden qdq und dqq; das Symbol, dq, wird somit als ein ganzes behandelt, oder als wenn es ein einziger Buchstabe wäre. Doch, um dem Ausdruck grössere Klarheit zu geben, werden wir den Punkt zwischen q und dq beibehalten, in mehreren (wenn auch nicht in allen) folgenden Formeln, indem wir es dem Leser überlassen, ihn fortzulassen, wenn es ihm beliebt.

Digitized by Google

oder ohne die Punkte* im zweiten Gliede, wenn dq (wie in VII'.) als ein ganzes Symbol behandelt wird,

$$\text{XI'}\ldots d.q^{-1} = -q^{-1}dqq^{-1};$$

ein Ausdruck, der sich im Allgemeinen nicht weiter reduciren lässt, aber, wie in der gewöhnlichen Rechnung, wird,

$$\text{XII}\ldots d.q^{-1} = -q^{-2}dq,$$

wenn

$$dq \parallel q,$$

das heisst, in dem Falle, wenn der Quaternion und sein Differential complanar sind.

325. Weitere Beispiele für die quaternion Differentiation werde ich im folgenden Abschnitt geben; aber die beiden vorhergehenden können in ausreichendem Maasse dazu dienen, die Natur dieser Operation auseinanderzusetzen, und die Aehnlichkeit zu zeigen, welche zwischen ihren Resultaten und denen der älteren Rechnungsweise besteht, und zugleich auch ein Beispiel für den Unterschied zu geben, welcher zwischen ihnen im Allgemeinen statt hat. Und hier wollen wir dazu übergehn, eine Bezeichnungsweise zu erläutern, welche (wenigstens bei der Aufstellung der hier gegebnen Theorie der Differentiale) einige Vortheile zu besitzen scheint; und welche uns in den Stand setzen wird, eine noch kürzere Definition in Zeichen, für das Differential einer Function fq, zu geben, als vorher.

(1.) Wir haben als Definition (320, 324) aufgestellt, dass wenn dq das Differential einer (quaternion oder andern) Variabeln, q, ist, dann der Grenzwerth des Vielfachen,

$$\text{I}\ldots n\{f(q+n^{-1}dq)-fq\},$$

einer unbegrenzt abnehmenden Differenz der Function fq dieser (einen) Variabeln q, wenn er in Bezug auf eine unbegrenzte Zunahme der multiplicirenden Zahl, n, genommen wird, das entsprechende oder gleichzeitige Differential dieser Function ist, und, als solcher, durch das Symbol dfq bezeichnet wird.

(2.) Aber bevor wir in dieser Weise zum Grenzwerth übergehn, in Bezug auf n, und während der Multiplicator, n,

* Vergleiche die unmittelbar vorhergehende Anmerkung.

Digitized by Google

noch als endlich in Betracht gezogen und behandelt wird, ist das Vielfache I. augenscheinlich eine Function der Zahl, n, sowohl als der beiden unabhängigen Variabeln, q und dq. Und ich schlage vor, diese neue Function der drei Variabeln,

$$\text{II.}\ldots n,\ q, \quad \text{und} \quad dq,$$

deren Form nach dem Gesetz, welches durch die Formel I. ausgedrückt wird, von der Form der gegebnen Function, f, abhängt (wenigstens für jetzt), durch das neue Symbol,

$$\text{III.}\ldots f_n(q,\ dq),$$

zu bezeichnen; so dass wir für irgend zwei Variabeln, q und q', und irgend eine Zahl, n, die Gleichung hinschreiben können,

$$\text{IV.}\ldots f_n(q,\ q') = n\left\{f(q + n^{-1}q') - fq\right\};$$

sie kann offenbar auch so geschrieben werden,

$$\text{V.}\ldots f(q + n^{-1}q') = fq + n^{-1}f_n(q,\ q').$$

und sie wird hier in aller Strenge, kraft der Definitionen, in Betracht gezogen, und ohne irgendwie irgendetwas, als klein, zu vernachlässigen.

(3.) Zum Beispiel, es erhellt aus der kleinen Berechnung in 324, (1.), dass,

$$\text{VI.}\ldots f_n(q,\ q') = qq' + q'q + n^{-1}q'^2,$$

wenn

$$fq = q^2;$$

und aus 324, (2.), dass,

$$\text{VII.}\ldots f_n(q,\ q') = -(q + n^{-1}q')^{-1}q'q^{-1},$$

wenn

$$fq = q^{-1}.$$

(4.) Und die Definition von dfq kann jetzt kurz so ausgedrückt werden:

$$\text{VIII.}\ldots dfq = f_\infty(q,\ dq);$$

oder, wenn der untere Index $_\infty$ als selbstverständlich angesehn wird, so können wir, noch einfacher, schreiben:

$$\text{IX.}\ldots dfq = f(q,\ dq);$$

dieser letzte Ausdruck, $f\ (q,\ dq)$, oder $f\ (q,\ q')$, bezeichnet so-

Digitized by Google

mit eine Function zweier unabhängigen Variabeln, q und q', deren Form aus der gegebnen oder vorgeschlagenen Form der Function fq einer einzigen Variabeln, q, nach einem Gesetz abgeleitet*, oder entwickelt wird [vergl. (2.)], dessen Studium einer der Hauptgegenstände der Differentialrechnung (wenigstens was Quaternionen betrifft) ist.

326. Eine der wichtigsten allgemeinen Eigenschaften der Functionen von dieser Art, $f(q, q')$, ist die, dass sie sämmtlich distributiv sind in Bezug auf die zweite unabhängige Variable, q', welche in dem vorhergehenden Verfahren der — wie wir es genannt haben — Ableitung** von einer gewissen gegebnen Function fq, einer einzigen Variabeln, q, eingeführt wurde: dieser Satz kann in folgender Weise bewiesen werden, mögen die beiden unabhängigen Variabeln Quaternionen sein, oder nicht.

(1.) Es möge q'' irgend eine dritte unabhängige Variable sein, und es sei n irgend eine Zahl; dann ergiebt die Formel 325, V. die drei folgenden Gleichungen, welche aus dem Gesetz der Ableitung von $f_n(q, q')$ aus fq folgen:

$$\text{I.}\ldots f(q+n^{-1}q'') = fq + n^{-1}f_n(q, q'');$$
$$\text{II.}\ldots f(q+n^{-1}q''+n^{-1}q') = f(q+n^{-1}q'')+n^{-1}f_n(q+n^{-1}q'', q');$$
$$\text{III.}\ldots f(q+n^{-1}q'+n^{-1}q'') = fq + n^{-1}f_n(q, q'+q'');$$

* Ich habe bemerkt, oder darauf hingewiesen, in 318, dass die übliche Definition einer abgeleiteten Function, nämlich diejenige, welche von Lagrange in dem calcul des fonctions gegeben ist, nicht zur Grundlage für eine Differentialrechnung der Quaternionen genommen werden kann: wenn sich auch solche abgeleiteten Functionen von Skalaren gelegentlich von selbst einstellen, in den Anwendungen einer solchen Rechnung, wie in 100, (3.) und (4.), und in einigen ähnlichen, aber allgemeineren Fällen, die ich bald anmerken werde. Das gegenwärtige Gesetz der Ableitung ist von ganz anderer Art, denn es führt, wie wir sehn, von einer gegebnen Function von einer Variabeln zu einer abgeleiteten Function von zwei Variabeln, welche im Allgemeinen von einander unabhängig sind. Die Function $f_n(q, q')$ der drei Variabeln, n, q, q', kann auch eine abgeleitete Function genannt werden, denn sie wird, nach dem fest bestimmten Gesetz IV., von derselben gegebnen Function fq hergeleitet, obwohl sie im Allgemeinen eine weniger einfache Form hat als ihr eigner Grenzwerth, $f_\infty(q, q')$, oder $f(q, q')$.

**) Vergleiche die unmittelbar vorhergehende Anmerkung.

indem wir sie vergleichen, sehn wir sofort, dass

$$\text{IV.}\ldots f_n(q, q' + q'') = f_n(q + n^{-1}q'', q') + f_n(q, q'');$$

die Form der ursprünglichen Function, fq, und die Werthe der vier Variabeln, q, q', q'' und n, bleiben hierbei sämmtlich willkürlich: wenn man ausnimmt, dass n als eine Zahl angenommen ist, oder wenigstens als ein Skalar, während q, q', q'' Quaternionen sein können (oder es nicht sein können).

(2.) Zum Beispiel, wenn wir die besondere Function $fq = q^2$ nehmen, welche die Form 325, VI. für die abgeleitete Function $f_n(q, q')$ ergiebt, so erhalten wir

$$\text{V.}\ldots f_n(q, q'') = qq'' + q''q + n^{-1}q''^2;$$
$$\text{VI.}\ldots f_n(q, q' + q'') = q(q' + q'') + (q' + q'')q + n^{-1}(q' + q'')^2;$$

und daher

$$\begin{aligned}\text{VII.}\ldots f_n(q, q' + q'') - f_n(q, q'') &= qq' + q'q + n^{-1}(q'^2 + q'q'' + q''q') \\ &= (q + n^{-1}q'')q' + q'(q + n^{-1}q'') \\ &\quad + n^{-1}q'^2 \\ &= f_n(q + n^{-1}q'', q'),\end{aligned}$$

wie es durch die Formel IV. gefordert wird.

(3.) Lässt man daher zu, dass die Formel für alle Werthe der Zahl n bewiesen ist, so brauchen wir uns nur vorzustellen, dass diese Zahl (oder dieser Skalar) der Unendlichkeit zustrebt, um die Grenzform der Gleichung abzuleiten:

$$\text{VIII.}\ldots f_x(q, q' + q'') = f_x(q, q') + f_x(q, q'');$$

oder einfach, mit der abgekürzten Bezeichnung von 325, (4.),

$$\text{IX.}\ldots f(q, q' + q'') = f(q, q') + f(q, q'');$$

und das ist der Ausdruck für die functional Eigenschaft, deren Vorhandensein wir vorher behaupteten.

(4.) Zum Beispiel, nach dem was schon gezeigt worden ist [vergl. 325, (3.) und (4.)], ist, wenn

$$\text{X.}\ldots fq = q^2,$$

dann

$$f(q, q') = qq' + q'q;$$

und wenn

$$\text{XI.}\ldots fq = q^{-1},$$

dann ist

$$f(q, q') = -q^{-1}q'q^{-1};$$

Digitized by Google

in jedem von diesen Beispielen sehn wir, dass die abgeleitete Function $f(q, q')$ distributiv in Bezug auf q' ist, obwohl sie nur in dem ersten von ihnen grade auch in Bezug auf q distributiv ist.

(5.) Aus der Formel IX. folgt sofort, dass wir allgemein* haben

$$\text{XII.} \ldots f(q, 0) = 0;$$

und es ist nicht schwierig zu beweisen, als ein Resultat, welches das vorige einschliesst, dass

$$\text{XIII.} \ldots f(q, xq') = xf(q, q'),$$

wenn x irgend ein Skalar ist.

(6.) Als eine Bestätigung dieses letzten Resultats mögen wir beachten, dass die Definition von $f(q, q')$ durch die folgende Formel (vergl. 324, IV., und 325, IX.) ausgedrückt werden kann:

$$\text{XIV.} \ldots f(q, q') = \lim_{n=\infty} . n \left\{ f(q + n^{-1}q') - fq \right\};$$

wir haben daher, wenn x irgend ein endlicher Skalar ist, und $m = x^{-1}n$,

$$\text{XV.} \ldots f(q, xq') = x \lim_{m=\infty} . m \left\{ f(q + m^{-1}q') - fq \right\};$$

eine Umformung, welche die vorige durch XIII. ausgedrückte Eigenschaft ergiebt, denn es ist augenscheinlich, dass der Buchstabe m an Stelle von n in der Definitionsformel XIV. geschrieben werden kann.

327. Nehmen wir daher den allgemeinen Ausdruck 325, IX. wieder auf, oder schreiben wir noch einmal,

$$1. \ldots dfq = f(q, dq),$$

so sehn wir (nach 326, IX.), dass die abgeleitete Function, dfq, von q und dq, stets (wie in den Beispielen 324, VII. und XI.) distributiv in Bezug auf das Differential dq ist, das man als eine unabhängige Variable anzusehn hat, von welcher Form die gegebne Function fq auch sein mag. Wir sehn auch

* Wir sehn hier von einigen Ausnahmefällen ab, wo Unstetigkeit stattfindet, u. s. w.

(nach 326, XIII.), dass, wenn das Differential dq der Variabeln, q, mit irgend einem Skalar, x, multiplicirt wird, das Differential dfq, der Function fq, zu gleicher Zeit mit demselben Skalar multiplicirt wird, oder dass

$$\text{II.}\ldots f(q, x\,dq) = x f(q, dq),$$

wenn x irgend ein Skalar ist.

Und es ist in der That augenscheinlich, allein nach dem Begriff und der Definition (320) der gleichzeitigen Differentiale, dass sich jedes System solcher Differentiale im Ganzen mit irgend einem System Gleichvielfacher derselben vertauschen lassen muss, oder mit gleichen Theilen derselben, ohne dass es aufhörte ein System gleichzeitiger Differentiale zu sein: oder allgemeiner, dass es erlaubt ist, sämmtliche Differentiale eines Systems mit ein und demselben Skalar zu multipliciren.

(1.) Es folgt daraus, dass der Quotient,

$$\text{III.}\ldots dfq : dq = f(q, dq) : dq,$$

zweier simultanen Differentiale, dfq und dq, sich nicht ändert, wenn das Differential dq so mit irgend einem Skalar multiplicirt wird; und folglich, dass der Quotient III. unabhängig von dem Tensor Tdq ist, wenn er auch nicht allgemein von dem Versor Udq unabhängig ist, wenn q und dq Quaternionen sind: ausgenommen ist der Fall, wenn wir den Versor nur mit dem zu ihm entgegengesetzten (oder negativen), oder mit $-Udq$, vertauschen; in diesem Falle bleibt er im Allgemeinen ungeändert, denn das kommt darauf hinaus, dq mit -1 zu multipliciren, und das ist ein Skalar.

(2.) Zum Beispiel, der Quotient,

$$\begin{aligned}\text{IV.}\ldots d.q^2 : dq &= q + dq\,.\,q\,.\,dq^{-1} \\ &= q + Udq\,.\,q\,.\,Udq^{-1},\end{aligned}$$

in dem dq^{-1} und Udq^{-1} die Reciproken von dq und Udq bezeichnen, ist ganz und gar nicht unabhängig von dq, oder auch nur von Udq; denn er stellt, wie wir sehn, die Summe des gegebnen Quaternions q und eines gewissen anderen Quaternions dar, und dieser letztere kann, seiner geometrischen Bedeutung [vergl. 191, (5.)] nach, so angesehn werden, als ob er von q durch eine konische Drehung der Achse von q,

Digitized by Google

Ax. q, um Ax. dq um einen Winkel $= 2 \angle dq$ abgeleitet worden wäre: so dass beide, die Achse und die Grösse der Drehung, vom Versor Udq abhängen, und mit dem Versor sich ändern.

(3.) Im Allgemeinen können wir, wenn wir wollen, sagen, dass der Quotient III. ein Differentialquotient ist; aber wir sollten ihn nicht einen differential Coefficienten (vergl. 318) nennen, denn dfq lässt sich allgemein nicht in zwei Factoren zerlegen, von denen der eine das Differential dq ist, und der andere eine Function von q allein.

(4.) Und aus demselben Grunde sollten wir diesen Quotienten nicht eine abgeleitete Function (vergl. wieder 318) nennen, wenn wir nicht, indem wir ihn so nennen, darunter eine Function von zwei* unabhängigen Variabeln verstehn, nämlich von q und Udq, wie vorher.

(5.) Wenn, indessen, ein Quaternion, q, als eine Function einer skalar Variabeln, t, angesehn wird, so dass wir eine Gleichung von der Form,

$$\mathrm{V}\ldots q = ft,$$

haben, wo t einen Skalar bezeichnet, so ist es erlaubt [vergl. 100, (3.) und (4.)], zu schreiben,

$$\begin{aligned}\mathrm{VI}\ldots dq : dt &= dft : dt \\ &= \lim_{n=\infty} \frac{n}{dt} \left| f\left(t + \frac{dt}{n}\right) - f(t) \right| \\ &= \lim_{h=0} h^{-1} \left| f(t+h) - f(t) \right| \\ &= f't = D_t ft = D_t q;\end{aligned}$$

und diesen Grenzwerth, wie gewöhnlich, eine abgeleitete Function von t, zu nennen, denn er ist (in Wirklichkeit) eine Function der skalar Variabeln, t, allein, und ist von dem skalar Differential, dt, unabhängig.

(6.) Wir können, unter diesen Umständen, auch die Differentialgleichung hinschreiben,

* Vergleiche die Anmerkung zu 325, (4.).

Digitized by Google

$$\text{VII.}\ldots dq = D_t q \,.\, dt,$$

oder

$$\text{VIII.}\ldots dfq = f't \,.\, dt,$$

und können den abgeleiteten Quaternion, $D_t q$, oder $f't$, wie gewöhnlich, einen Differentialcoefficienten in dieser Formel nennen, denn das skalar Differential, dt, wird (in der That) durch ihn multiplicirt, in dem Ausdruck, welchen wir so für das quaternion Differential, dq oder dft, fanden.

(7.) Aber was den Sinn der vorliegenden Frage [vergl. wieder 100, (3.)] betrifft, so ist es von Wichtigkeit daran zu erinnern, dass wir die abgeleitete Function, oder den differential Coefficienten,

$$\text{IX.}\ldots f't, \text{ oder } D_t ft, \text{ oder } D_t q,$$

als einen wirklichen Quotienten VI. ansehn, welcher dadurch erhalten wird, dass man einen wirklichen Quaternion,

$$\text{X.}\ldots dft, \text{ oder } dq,$$

durch einen wirklichen Skalar, dt, dividirt, dessen Werth vollkommen beliebig ist, und der (wenn wir es so wollen) als gross (vergl. 322) angenommen werden kann, während der dividend Quaternion X., seinem Werthe nach, von den Werthen der beiden unabhängigen Skalare, t und dt, und von der Form der Function ft, nach dem Gesetz abhängt, welches ausgedrückt wird durch die allgemeine Formel 324, IV., für die Differentiation explicirter Functionen einer einzigen Variabeln.

328. Man kann sich nun leicht vorstellen, dass ähnliche Bemerkungen auf quaternion Functionen von mehr als einer Variabeln anwendbar sind; und dass, wenn das Differential einer solchen Function unter der Form ausgedrückt wird (vergl. 324, II.),

$$\begin{aligned}\text{I.}\ldots dQ &= dF(q, r, s, \ldots) \\ &= F(q, r, s, \ldots dq, dr, ds, \ldots),\end{aligned}$$

die neue Function F stets distributiv ist in Bezug auf jedes der Differentiale, dq, dr, ds, .. im Besondern; sie ist auch homogen von der ersten Dimension (vergl. 327) in Bezug auf alle diese Differentiale, wenn man sie als ein System auffasst; und zwar in der Art, dass, was auch immer die Form der

Digitized by Google

gegebnen quaternion Function, Q oder F, sein mag, die abgeleitete* Function F, oder das dritte Glied der Formel I., die allgemeine functional Eigenschaft (vergl. 326, XIII., und 327, II.) besitzen muss,

$$\text{II.}\ldots F(q, r, s, \ldots x dq, x dr, x ds, \ldots) = x F(q, r, s, \ldots dq, dr, ds, \ldots),$$

wo x irgend ein Skalar sein kann: so dass Producte, so wie Quadrate, der Differentiale dq, dr, u. s. w., von q, r, u. s. w., welche man als eben so viele Variabeln anzusehn hat, von denen Q abhängt, aus dem erweiterten Ausdruck für das Differential dQ der Function Q ausgeschlossen sind.

(1.) Zum Beispiel, wenn die zu differenzirende Function ein Product zweier Quaternionen ist,

$$\text{III.}\ldots Q = F(q, r) = qr,$$

so findet man nach der allgemeinen Formel 324, II. leicht, dass (da der Grenzwerth von $n^{-1} . dq . dr$ null ist, wenn die Zahl n unbegrenzt anwächst) das Differential der Function ist,

$$\text{IV.}\ldots dQ = d.qr = dF(q, r) = F(q, r, dq, dr) = q.dr + dq.r;$$

und ähnliche Resultate ergeben sich für Differentiale der Producte von mehr als zwei Quaternionen.

(2.) Ferner, wenn wir die folgende Function nehmen,

$$\text{V.}\ldots Q = F(q, r) = q^{-1}r,$$

so finden wir, wenn wir dieselbe allgemeine Formel 324, II. anwenden, und beachten, dass wir, für alle Werthe der Zahl (oder anders, des Skalars), n, und der vier Quaternionen, q, r, q', r', die identischen, verwandelten Formen [vergl. 324, (2.)] haben,

$$\text{VI.}\ldots n\left\{(q + n^{-1}q')^{-1}(r + n^{-1}r') - q^{-1}r\right\} = q^{-1}r' - (q + n^{-1}q')^{-1}q'q^{-1}(r + n^{-1}r'),$$

als den gesuchten Grenzwerth, wenn n der Unendlichkeit zustrebt, das folgende Differential der Function:

---

* Vergleiche die Anmerkung, auf die ich zuletzt Bezug nahm.

$$\text{VII.}\ldots dQ = d.q^{-1}r = dF(q, r)$$
$$= F(q, r, dq, dr) = q^{-1}.dr - q^{-1}.dq.q^{-1}r;$$

und das ist wieder, ebenso wie der Ausdruck IV., distributiv in Bezug auf jedes der Differentiale dq, dr, der Variabeln q, r, und enthält nicht das Product der beiden Differentiale: obwohl die beiden differential Ausdrücke, IV. und VII., beide völlig streng sind, und nicht auf irgend eine Weise irgendwie von der Annahme abhängen, dass die Tensoren von dq und dr klein (vergl. wieder 322) sind.

329. Indem wir in dieser Weise eine Function von mehr als einer Variabeln differenziren, gelangen wir dazu, in Betracht zu ziehn, was wir theilweise (partielle) Differentiale von Functionen von zwei oder mehr Quaternionen nennen können; sie können so bezeichnet werden,

$$\text{I.}\ldots d_q Q,\quad d_r Q,\quad d_s Q, \ldots$$

wenn Q, wie vorher, eine Function von q, r, s, ... ist, welche man sich hier in Bezug auf jede Variable im Besondern differenzirt denken muss, während die andern dabei als constant anzusehn sind. Und dann haben wir, wenn dQ, wie vorher, das — wie wir, im Gegensatz zum vorigen, sagen können — Gesammtdifferential (totale Differential) der Function Q bezeichnet, die allgemeine Formel,

$$\text{II.}\ldots dQ = d_q Q + d_r Q + d_s Q + \ldots;$$

oder, kurz und symbolisch,

$$\text{III.}\ldots d = d_q + d_r + d_s + \ldots;$$

wenn q, r, s, ... die quaternion Variabeln bezeichnen, von denen die quaternion Function abhängt, deren Gesammtdifferential genommen wird; mögen nun diese Variabeln sämmtlich unabhängig sein, oder mit einander in Verbindung stehn, durch irgend eine Beziehung zwischen ihnen, oder auch durch mehrere Beziehungen.

(1.) Zum Beispiel [vergl. 328, (1.)], wenn

$$\text{IV.}\ldots Q = qr,$$

dann ist

$$d_q Q = dq.r,$$

und

$$d_r Q = q^{-1}.dr;$$

Digitized by Google

und die Summe dieser beiden partiellen Differentiale von Q macht sein Gesammtdifferential, dQ, aus, wie wir es vorher auf anderem Wege gefunden haben.

(2.) Ferner ist [vergl. 328, (2.)], wenn

$$\text{V.} \ldots Q = q^{-1}r,$$

dann

$$d_q Q = -q^{-1}dq \,.\, q^{-1}r;$$
$$d_r Q = q^{-1}dr;$$

und es ist $d_q Q + d_r Q =$ demselben dQ, wie dasjenige war, welches wir vorher auf andere Weise gefunden hatten, für diese Form der Function Q.

(3.) Um die Möglichkeit durch ein Beispiel zu erläutern, dass eine Beziehung zwischen den Variabeln q und r besteht, wollen wir jetzt annehmen, dass diese Variabeln in V. einander gleich seien; dann haben wir $Q = 1$, $dQ = 0$; und demgemäss erhalten wir hier

$$d_q Q = -q^{-1}dq = -d_r Q.$$

(4.) Es sei ferner, in IV.,

$$qr = c = \text{irgend einem constanten Quaternion;}$$

wir haben dann wieder

$$0 = dQ = d_q Q + d_r Q;$$

und wir können daher schliessen, dass

$$\text{VI.} \ldots dr = -q^{-1}.dq.r,$$

wenn

$$qr = c = \text{const.};$$

und das Resultat stimmt augenscheinlich mit dem Ausdruck 324, XI. überein, für das Differential eines Reciproken, und schliesst ihn ein.

(5.) Ein Quaternion, q, kann wohl auch als eine Function von zwei oder von mehr skalar Variabeln, t, u, ... ausgedrückt werden; und dann hat er, als solche, nach dem gegenwärtigen Artikel, seine partiellen Differentiale, $d_t q$, $d_u q$, u. s. w. Aber da wir, nach 327, VII., in diesem Falle schreiben können,

$$\text{VII.} \ldots d_t q = D_t q \,.\, dt, \qquad d_u q = D_u q \,.\, du, \ldots$$

wo die Coefficienten von den Differentialen unabhängig sind

(wie in der gewöhnlichen Rechnung), so erhalten wir (nach II.) für das Gesammtdifferential, dq, einen Ausdruck von der Form,

$$\text{VIII.}\ldots dq = d_t q + d_u q + \ldots = D_t q \,.\, dt + D_u q \,.\, du + \ldots;$$

und wir können nach Belieben sagen, unter den hier angenommenen Bedingungen, dass die abgeleiteten Quaternionen,

$$\text{IX.}\ldots D_t q, \qquad D_u q, \ldots$$

entweder partielle Ableitungen sind, oder die partiellen Differentialcoefficienten der quaternion Function,

$$\text{X.}\ldots q = F(t, u, \ldots);$$

und ähnliche Bemerkungen können wir für den Fall machen, wenn der Quaternion, q, zu einem Vector, ϱ, degenerirt (vergl. 289).

330. Im Allgemeinen kann es, nach der Definition in 320, als augenscheinlich angesehn werden, dass das Differential einer Constanten null ist; so dass, wenn Q mit irgend einem constanten Quaternion, c, vertauscht wird in der Gleichung 324, I., dann dQ durch 0 zu ersetzen ist in der differentiirten Gleichung, 324, II. Und wenn daher irgend ein System von Gleichungen gegeben wird, welches die quaternion Variabeln, $q, r, s, \ldots$ mit einander verbindet, so können wir das entsprechende System der differentiirten Gleichungen so behandeln, als ob es auch für das System der gleichzeitigen Differentiale, $dq, dr, ds, \ldots$ statt hat; und wir können daher, der Theorie nach mit vollem Recht, irgend eine oder mehrere von diesen Differentialen eliminiren, zwischen den Gleichungen des Systems, wenn immer es sich in der praktischen Rechnung als möglich erweisen sollte.

(1.) Zum Beispiel, es seien die beiden Gleichungen,

$$\text{I.}\ldots qr = c,$$

und

$$\text{II.}\ldots s = r^2,$$

wo c einen constanten Quaternion bezeichnet. Dann haben wir [vergl. 328, (1.), und 324, (1.)] die beiden entsprechenden differentiirten Gleichungen,

$$\text{III.}\ldots q \,.\, dr + dq \,.\, r = 0;$$
$$\text{IV.}\ldots \quad ds = r \,.\, dr + dr \,.\, r;$$

Digitized by Google

und in ihnen können die Punkte* fortgelassen werden. Die erstere ergiebt,

$$\text{V.}\ldots dr = -q^{-1}dq\,.\,r,$$

wie in 329, VI.; und wenn wir diesen Werth in die letztere einsetzen, so eliminiren wir dadurch das Differential dr, und erhalten die neue differential Gleichung,

$$\text{VI.}\ldots ds = -rq^{-1}\,.\,dq\,.\,r - q^{-1}\,.\,dq\,.\,r^2.$$

(2.) Die Gleichung I. ergiebt auch den Ausdruck,

$$\text{VII.}\ldots r = q^{-1}c;$$

die Gleichung II. ergiebt daher den weiteren Ausdruck,

$$\text{VIII.}\ldots s = (q^{-1}c)^2 = q^{-1}cq^{-1}c,$$

durch Elimination vor der Differentiation. Und wenn wir, in der Formel VI., die Ausdrücke VII. und VIII. für r und s einsetzen, so bekommen wir die weitere differential Gleichung,

$$\text{IX.}\ldots d\,.\,(q^{-1}c)^2 = -q^{-1}cq^{-1}\,.\,dq\,.\,q^{-1}c - q^{-1}\,.\,dq\,.\,q^{-1}cq^{-1}c;$$

sie hätte auch auf andere Weise [vergl. wieder 324, (1.) und (2.)] erhalten werden können, unter der Form,

$$\text{X.}\ldots d\,.\,(q^{-1}c)^2 = q^{-1}c\,.\,d(q^{-1}c) + d(q^{-1}c)\,.\,q^{-1}c.$$

331. Für die Differentiation der Functionen von Functionen von Quaternionen sind keine besonderen Regeln erforderlich; aber es kann lehrreich sein, kurz zu zeigen, wie die Betrachtung einer solchen Differentiation (vergl. 326) zu einer allgemeinen Eigenschaft der Functionen von der Klasse $f(q, q')$ führt; und wie diese Eigenschaft auf andere Weise klar gestellt werden kann.

(1.) Es mögen f, φ, und ψ irgend welche Functionsoperationszeichen bezeichnen, von der Art, dass

$$\text{I.}\ldots \psi q = \varphi(fq);$$

schreibt man dann

$$\text{II.}\ldots\ r = fq,$$

und

$$\text{III.}\ldots\ s = \varphi r,$$

so erhalten wir

$$\text{IV.}\ldots\ s = \psi q;$$

* Vergleiche die zweite Anmerkung zu 324, (1.).

und daher ist

$$\text{V.} \ldots ds = d\psi q = d\varphi r.$$

Das heisst, wir können (wie gewöhnlich) die zusammengesetzte Function, $\varphi\,(fq)$, differentiiren, als wenn fq eine unabhängige Variable, r, wäre; und können dann, in dem so gefundenen Ausdruck, das Differential dfq durch seinen Werth ersetzen, wie er durch Differentiation der einfachen Function, fq, erhalten wird. Aber das kommt der Sache nach darauf hinaus, das Differential dr, oder das Symbol dfq, auf einem Wege zu eliminiren, der — wie wir gesehn haben — erlaubt ist (330).

(2.) Aber, aus den Definitionen von dfq und $f_n\,(q, q')$, ersahn wir (325, VIII. IX.), dass das Differential dfq allgemein hätte bezeichnet werden können, durch $f_\infty\,(q, dq)$, oder kurz durch $f\,(q, dq)$; und danach kann auch $d\varphi r$ und $d\psi q$, nach einer Erweiterung derselben Bezeichnungsweise, durch die ähnlichen Symbole, $\varphi_\infty\,(r, dr)$ und $\psi_\infty\,(q, dq)$ dargestellt werden, oder einfach durch $\varphi\,(r, dr)$ und $\psi\,(q, dq)$.

(3.) Wir sollten daher finden, dass

$$\text{VI.} \ldots \psi_\infty\,(q, dq) = \varphi_\infty\,[fq, f_\infty\,(q, dq)],$$

wenn

$$\psi q = \varphi\,(fq);$$

oder kurz, dass

$$\text{VII.} \ldots \psi\,(q, q') = \varphi\,[fq, f(q, q')],$$

wenn

$$\psi q = \varphi fq,$$

für irgend zwei Quaternionen, q, q', und für irgend zwei Functionen, f, φ; vorausgesetzt, dass die Functionen $f_n\,(q, q')$, $\varphi_n\,(q, q')$, $\psi_n\,(q, q')$ aus den Functionen fq, φq, ψq nach dem Gesetz hergeleitet (oder abgeleitet) werden, welches durch die Formel 325, IV. ausgedrückt wird; und dass daher die Grenzwerthe, denen die abgeleiteten Functionen $f_n\,(q, q')$, u. s. w. zustreben, wenn sich die Zahl n der Unendlichkeit nähert, durch die weiteren Functionszeichen, $f\,(q, q')$, u. s. w. bezeichnet werden.

(4.) Um dies auf andere Weise zu beweisen, oder die allgemeine Eigenschaft VII., der Functionen von der Klasse $f\,(q, q')$, festzustellen, ohne irgendwie Differentiale zu gebrauchen,

Digitized by Google

mögen wir beachten, dass die allgemeine und streng gültige Transformation 325, V., der Formel 325, IV., durch welche die Functionen $f_n(q, q')$ definirt werden, für sämmtliche Werthe von n die Gleichung ergiebt:

$$\text{VIII.}\ldots\ q f(q + n^{-1}q') = \varphi[fq + n^{-1}f_n(q, q')] = \varphi fq + n^{-1}\varphi_n[fq, f_n(q, q')];$$

aber, nach derselben allgemeinen Transformation, ist auch

$$\text{IX.}\ldots\ \psi(q + n^{-1}q') = \psi q + n^{-1}\psi_n(q, q');$$

folglich können wir allgemein, sowohl für sämmtliche Werthe der Zahl n, als auch für sämmtliche Werthe der beiden unabhängigen Quaternionen, q, q', und für alle Formen der beiden Functionen, f, φ, schreiben,

$$\text{X.}\ldots\ \psi_n(q, q') = \varphi_n[fq, f_n(q, q')],$$

wenn

$$\psi q = \varphi fq;$$

eine Gleichung, deren Grenzform, für $n = \infty$ (bei der gebrauchten Bezeichnungsweise), die Gleichung VII. ist, was zu beweisen war.

(5.) Es ist kaum der Mühe werth, die allgemeine Formel X. durch irgend ein besonderes Beispiel zu bewahrheiten: doch mag, rein als ein Uebungsbeispiel, bemerkt werden, dass, wenn wir die Formen annehmen,

$$\text{XI.}\ldots fq = q^2,\quad \varphi q = q^2,\quad \psi q = q^4,$$

von denen die beiden ersten, nach 325, VI., die gemeinsame abgeleitete Form ergeben,

$$\text{XII.}\ldots f_n(q, q') = \varphi_n(q, q') = qq' + q'q + n^{-1}q'^2,$$

dann die Formel X. wird,

$$\begin{aligned}\text{XIII.}\ldots\ \psi_n(q, q') &= \varphi_n(q^2, qq' + q'q + n^{-1}q'^2)\\ &= q^2(qq' + q'q + n^{-1}q'^2)\\ &\quad + (qq' + q'q + n^{-1}q'^2)q^2\\ &\quad + n^{-1}(qq' + q'q + n^{-1}q'^2)^2;\end{aligned}$$

sie stimmt mit dem Werthe überein, welcher unmittelbar von der Function ψq oder q^4 hergeleitet wird, nach der Definition 325, IV., nämlich,

$$\text{XIV.}\ldots \psi_n(q, q') = n[(q + n^{-1}q')^4 - q^4]$$
$$= n\{[q^2 + n^{-1}(qq' + q'q + n^{-1}q'^2)]^2 - (q^2)^2\}.$$

(6.) Im Allgemeinen kann der Satz, oder die Regel, für die Differentiation, wie in (1.), einer Function von einer Function eines Quaternions oder einer andern Variabeln, kurz und symbolisch durch die Formel ausgedrückt werden,

$$\text{XV.}\ldots d(\varphi f)q = d\varphi(fq);$$

und wenn wir ihn nicht schon anderweitig kennen würden, so wäre ein Beweis für seine Richtigkeit durch den letzten Beweis für die Gültigkeit der mit ihm gleichbedeutenden Formel VII. erbracht.

Vierter Abschnitt.

Beispiele für quaternion Differentiation.

332. Es wird jetzt leicht und nützlich sein, eine kurze Zusammenstellung von Beispielen für die Differentiation von quaternion Functionen und Gleichungen zu geben, im Zusatz zu denjenigen, welche uns schon zufällig begegnet sind, während wir die Grundsätze unseres Gegenstandes behandelten, und mit Einschluss derselben.

(1.) Wenn c irgend ein constanter Quaternion ist, wie in 330, dann ist

$$\text{I.}\ldots dc = 0;$$
$$\text{II.}\ldots d(fq + c) = dfq;$$
$$\text{III.}\ldots d.cfq = cdfq;$$
$$\text{IV.}\ldots d(fq.c) = dfq.c.$$

(2.) Im Allgemeinen ist,

$$\text{V.}\ldots d(fq + \varphi q + \ldots) = dfq + d\varphi q + \ldots;$$

oder kurz,

$$\text{VI.}\ldots d\Sigma = \Sigma d,$$

wenn Σ als Zeichen für Summation benutzt wird.

Digitized by Google

(3.) Es ist auch,

$$\text{VII.}\ldots d(fq.\varphi q) = dfq.\varphi q + fq.d\varphi q;$$

und ähnliches gilt für ein Product von mehr als zwei Functionen: die Regel ist einfach, man differenzire jeden Factor besonders, an seiner Stelle, oder ohne die Anordnung der Factoren zu stören (vergl. 318, 319); und addire dann die so theilweise erlangten Resultate (vergl. 329).

(4.) Im Besonderen ist, wenn m irgend eine positive ganze Zahl ist,

$$\text{VIII.}\ldots d.q^m = q^{m-1}dq + q^{m-2}dq.q\ldots + qdq.q^{m-2} + dq.q^{m-1};$$

und da wir gesehn haben [324, (2.)], dass

$$\text{IX.}\ldots d.q^{-1} = -q^{-1}.dq.q^{-1},$$

so erhalten wir den analogen Ausdruck für das Differential einer Potenz eines Quaternions, mit einem negativen aber ganzen Exponenten,

$$\text{X.}\ldots d.q^{-m} = -q^{-m}d.q^m.q^{-m} = -q^{-1}dq.q^{-m} - q^{-2}dq.q^{1-m} - \ldots - q^{1-m}dq.q^{-2} - q^{-m}dq.q^{-1}.$$

(5.) Um eine Quadratwurzel zu differentiiren, haben wir die lineare Gleichung* aufzulösen,

$$\text{XI.}\ldots q^{\frac{1}{2}}.d.q^{\frac{1}{2}} + d.q^{\frac{1}{2}}.q^{\frac{1}{2}} = dq;$$

oder

$$\text{XI}'\ldots rr' + r'r = q',$$

wenn wir, der Abkürzung wegen, schreiben,

$$\text{XII.}\ldots\quad r = q^{\frac{1}{2}},\quad q' = dq,\quad r' = d.q^{\frac{1}{2}} = dr.$$

* Obwohl eine solche Lösung einer linearen Gleichung, oder einer Gleichung vom ersten Grade, in Quaternionen im gegenwärtigen Beispiel sich leicht genug ausführen lässt, so bietet das Problem doch im Allgemeinen Schwierigkeiten dar, welche wir einer besonderen Betrachtung unterziehn müssen, wenn die Theorie der Differentiation nicht entwickelter (impliciter) Functionen von Quaternionen nicht ganz unvollständig sein soll. Aber eine allgemeine Methode, alle derartigen Gleichungen zu lösen, werde ich in einem folgenden Abschnitt aufnehmen.

(6.) Schreibt man auch, zu diesem Zweck,

$$\text{XIII.}\ldots s = Kr = K.q^{\frac{1}{2}},$$

so folgt (nach 190, 196) daraus, dass

$$\text{XIV.}\ldots rs = Nr = Tr^2 = Tq,$$

und

$$\text{XV.}\ldots r + s = 2Sr = 2S.q^{\frac{1}{2}},$$

und da das Product und die Summe der beiden conjugirten Quaternionen, r und s, somit Skalare (140, 145) sind, so erhalten wir, nach XI′.,

$$\text{XVI.}\ldots r^{-1}q's = r's + sr';$$

und danach, durch Addition,

$$\text{XVII.}\ldots q' + r^{-1}q's = (r+s)r' + r'(r+s) = 2r'(r+s);$$

und endlich,

$$\text{XVIII.}\ldots r' = \frac{q' + r^{-1}q's}{2(r+s)},$$

oder

$$\text{XIX.}\ldots d.q^{\frac{1}{2}} = \frac{dq + q^{-\frac{1}{2}}\,dq.K.q^{\frac{1}{2}}}{4S.q^{\frac{1}{2}}},$$

ein Ausdruck für das Differential der Quadratwurzel eines Quaternions, der — wie wir finden werden — sich vielfach transformiren lässt; aber es ist nicht nothwendig, das hier in Betracht zu ziehn.

(7.) In den drei letzten Nebenartikeln, wie in den drei welche ihnen vorhergehn, habe ich angenommen, der Allgemeinheit wegen, dass q und dq zwei diplanare Quaternionen sein sollen; wenn sie aber in irgend einer Anwendung, im Gegentheil, grade complanar sind, so werden die Ausdrücke vereinfacht, und nehmen übliche, oder algebraische, Formen an, wie folgt:

$$\text{XX.}\ldots d.q^m = mq^{m-1}dq;$$

$$\text{XXI.}\ldots d.q^{-m} = -mq^{-m-1}dq;$$

und

$$\text{XXII.}\ldots d.q^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}q^{-\frac{1}{2}}dq,$$

Digitized by Google

wenn

$$\text{XXIII.} \ldots dq \parallel\!\!\mid q \quad (123);$$

denn wenn q' complanar mit q ist, und daher mit $q^{\frac{1}{2}}$, oder mit r, in dem Ausdruck XVIII., so kann für den Nenner dieses Ausdrucks geschrieben werden $r^{-1}q'\ (r+s)$.

(8.) Allgemeiner, wenn x irgend ein skalar Exponent ist, so können wir schreiben, wie in der gewöhnlichen Rechnung, aber wieder mit der Bedingung der Complanarität XXIII.,

$$\text{XXIV.} \ldots d.q^x = xq^{x-1}dq;$$

oder

$$\text{XXV.} \ldots qd.q^x = xq^x dx.$$

333. Die Functionen von Quaternionen, welche wir zuletzt differentiirt haben, kann man solche von algebraischer Form nennen; im Folgenden gebe ich einige wenige Beispiele von Differentialen, von — wie wir im Gegensatz dazu sagen können — transcendenten Functionen von Quaternionen: die Bedingung der Complanarität ($dq \parallel\!\!\mid q$) soll indessen hier — wie wir annehmen werden — erfüllt sein, damit die Ausdrücke nicht zu complicirt werden. In der That werden wir, bei dieser Vereinfachung, finden, dass sie, zum grössten Theil, die bekannten und gebräuchlichen Formen der gewöhnlichen Differentialrechnung annehmen.

(1.) Lässt man die Definitionen in 316 zu, und nimmt durchgehends an, dass $dq \parallel\!\!\mid q$, so erhält man die gebräuchlichen Ausdrücke für die Differentiale von ε^q und lq, nämlich,

$$\text{I.} \ldots d.\varepsilon^q = \varepsilon^q dq;$$
$$\text{II.} \ldots d.lq = q^{-1}dq.$$

(2.) Wir haben auch, in Folge desselben Systems von Definitionen (316),

$$\text{III.} \ldots d\sin q = \cos q\, dq;$$
$$\text{IV.} \ldots d\cos q = -\sin q\, dq;$$

u. s. w.

(3.) Auch ist, wenn r und dr complanar mit q und dq sind, nach 316, dann

$$\text{IV}'\ldots d.q^r = d.\varepsilon^{rlq} = q^r d.rlq = q^r(lq\,dr + q^{-1}r\,dq);$$

oder, wenn wir die Bezeichnung für partielle Differentiale (329) benutzen,

$$\text{V.}\ldots d_q.q^r = rq^{r-1}dq,$$

und

$$\text{VI.}\ldots d_r.q^r = q^r lq\,dr.$$

(4.) In dem besonderen Falle, wenn die Basis q ein gegebner oder constanter Vector, α, ist, und wenn der Exponent r ein variabler Skalar, t, ist, wird die vorige Formel IV. (in Folge des Werthes 316, XIV. von $l\varrho$),

$$\text{VII.}\ldots d.\alpha^t = (lT\alpha + \tfrac{\pi}{2}U\alpha)\alpha^t dt.$$

(5.) Wenn daher die Basis α eine gegebne Einheitslinie ist, so dass $lT\alpha = 0$, und $U\alpha = \alpha$, so können wir einfach schreiben,

$$\text{VIII.}\ldots d.\alpha^t = \tfrac{\pi}{2}\alpha^{t+1}dt,$$

wenn

$$d\alpha = 0,$$

und

$$T\alpha = 1.$$

(6.) Diese nützliche Formel für das Differential einer Potenz einer constanten Einheitslinie, mit einem variablen skalar Exponenten, kann rascher aus der Gleichung 308, VII. erhalten werden; sie ergiebt,

$$\text{IX.}\ldots \alpha^t = \cos\tfrac{t\pi}{2} + \alpha\sin\tfrac{t\pi}{2},$$

wenn

$$T\alpha = 1;$$

denn es ist augenscheinlich, dass das Differential dieses Ausdrucks gleich dem Ausdruck selbst ist, multiplicirt mit $\frac{1}{2}\alpha\pi dt$, denn es ist $\alpha^2 = -1$.

(7.) Die Formel VIII. gestattet auch eine einfache geometrische Deutung, wenn sie mit der Drehung um t rechte Winkel, in einer Ebne senkrecht zu α, in Verbindung gebracht wird; die Potenz α^t, oder der Versor $U\alpha^t$, ist hierbei als das

Digitized by Google

Mittel*, oder als das Wirksame, oder als Operator (vergl. 293) dieser Drehung, oder Version, anzusehn (308).

334. Ausser den algebraischen und transcendenten Formen giebt es andere Resultate der Operation an einem Quaternion, q, oder an einer Function desselben, welche man so ansehn kann, als ob sie eine neue Klasse (oder eine neue Art) von Functionen bilden, welche aus den Grundsätzen und nach den Regeln der quaternion Rechnung selbst entstehn: nämlich diejenigen, welche wir in früheren Kapiteln durch die Symbole bezeichnet haben,

$$\text{I.}\ldots Kq,\ Sq,\ Vq,\ Nq,\ Tq,\ Uq,$$

oder durch diejenigen Symbole, welche durch Combinationen derselben Operationszeichen gebildet wurden, wie zum Beispiel,

$$\text{II.}\ldots SUq,\ VUq,\ UVq, \text{ u. s. w.}$$

Und es ist für uns wesentlich, zu wissen, wie Ausdrücke von diesen Formen zu differentiiren sind; und das kann in der folgenden Weise geschehn, mit Hülfe der Sätze dieses und des vorigen Kapitels, und ohne jetzt die Complanarität, $dq \parallel\parallel q$, anzunehmen.

(1.) Im Allgemeinen möge f, für einen Augenblick, irgend ein distributives Symbol darstellen, so dass wir für irgend zwei Quaternionen, q und q', die Gleichung haben,

$$\text{III.}\ldots f(q+q') = fq + fq';$$

und daher auch** [vergl. 326, (5.)],

$$\text{IV.}\ldots f(xq) = xfq,$$

wenn x irgend ein Skalar ist.

(2.) Wir haben dann, nach der Bezeichnung 325, IV.,

$$\text{V.}\ldots f_n(q, q') = n\left\{ f(q + n^{-1}q') - fq \right\}$$
$$= fq';$$

* Vergleiche die erste Anmerkung zu S. 172.

** In Quaternionen ist die Gleichung III. nicht eine nothwendige Folge von IV., wenn auch die letztere aus der ersteren folgt; zum Beispiel, die Gleichung IV., aber nicht die Gleichung III., wird befriedigt, wenn wir annehmen $fq = qcq^{-1}c'q$, wo c und c' irgend zwei constante Quaternionen sind, welche nicht zu Skalaren entarten.

und daher haben wir, nach 325, VIII., für irgend eine Function fq von der Art, den differential Ausdruck,

$$\text{VI.} \ldots df q = f dq.$$

(3.) Aber wir haben gesehn, dass S, V, K distributive Symbole (197, 207) sind; wir können daraus sofort schliessen, dass

$$\text{VII.} \ldots dKq = Kdq;$$
$$\text{VIII.} \ldots dSq = Sdq;$$
$$\text{IX.} \ldots dVq = Vdq;$$

oder mit Worten, dass die Differentiale des Conjugirten, des Skalars und des Vectors eines Quaternions, bezüglich, der Conjugirte, der Skalar und der Vector des Differentials dieses Quaternions sind.

(4.) Um das Differential der Norm, Nq, zu finden, oder um einen Ausdruck für dNq abzuleiten, haben wir (nach VII. und 145) die Gleichung,

$$\text{X.} \ldots dNq = d.qKq = dq.Kq + qKdq;$$

aber

$$qKq' = K.q'Kq,$$

nach 145, und 192, II.; und

$$(1 + K).q'Kq = 2S.q'Kq = 2S(Kq.q'),$$

nach 196, II., und 198, I.; und daher ist

$$\text{XI.} \ldots dNq = 2S(Kq.dq).$$

(5.) Oder wir hätten den Ausdruck XI. für dNq, unmittelbarer, ableiten können durch die allgemeine Formel 324, IV., aus dem früheren Ausdruck 200, VII., oder 210, XX., für die Norm einer Summe, unter der Form,

$$\begin{aligned} \text{XI}' \ldots dNq &= \lim_{n=\infty}. n \left\{ N(q + n^{-1}dq) - Nq \right\} \\ &= \lim_{n=\infty}. \left\{ 2S(Kq.dq) + n^{-1}Ndq \right\} \\ &= 2S(Kq.dq), \end{aligned}$$

wie vorher.

(6.) Der Tensor, Tq, ist die Quadratwurzel (190) der Norm, Nq; und da Tq und Nq Skalare sind, so kann die

Digitized by Google

Formel 332, XXII. angewendet werden; sie ergiebt, für das Differential des Tensors eines Quaternions, den Ausdruck (vergl. 158),

$$\text{XII.}\ldots dTq = \frac{dNq}{2\,Tq} = S(KUq\,.\,dq) = S\frac{dq}{Uq},$$

ein Resultat, dessen man sich leichter erinnert, unter der Form,

$$\text{XIII.}\ldots \frac{dTq}{Tq} = S\frac{dq}{q}.$$

(7.) Der Versor Uq ist (nach 188) gleich dem Quotienten, $q : Tq$, des Quaternions q dividirt durch seinen Tensor Tq; daher ist das Differential des Versors,

$$\text{XIV.}\ldots dUq = d\frac{q}{Tq} = \left(\frac{dq}{q} - S\frac{dq}{q}\right)\frac{q}{Tq} = V\frac{dq}{q}\,.\,Uq;$$

und daraus folgt sofort die Formel, welche XIII. entspricht, und sich ebenso wie jene leicht dem Gedächtniss einprägt,

$$\text{XV.}\ldots \frac{dUq}{Uq} = V\frac{dq}{q}.$$

(8.) Wir hätten auch bemerken können, dass wir, da wir (nach 188) allgemein haben $q = Tq\,.\,Uq$, deshalb [nach 332, (3.)] auch haben,

$$\text{XVI.}\ldots dq = dTq\,.\,Uq + Tq\,.\,dUq,$$

und

$$\text{XVII.}\ldots \frac{dq}{q} = \frac{dTq}{Tq} + \frac{dUq}{Uq};$$

wenn wir daher die Gleichung XIII. aufgestellt haben, so können wir XV. unmittelbar ableiten; und umgekehrt, die erstere Gleichung würde sofort aus der letzteren folgen.

(9.) Es kann als bemerkenswerth in Betracht gezogen werden, dass wir somit allgemein, oder für irgend zwei Quaternionen, q und dq, die Formel* haben würden:

* Wenn der Zusammenhang der Theorie der Normalen zu Oberflächen mit der differential Rechnung der Quaternionen in einem folgenden Abschnitt, wenn auch kurz, erläutert sein wird, so wird der Leser vielleicht in der Lage sein, in dieser Formel XVIII., wenn auch nicht so ganz unmittelbar, den geometrischen Satz wiederzuerkennen, dass die Radien einer Kugel ihre Normalen sind.

Digitized by Google

$$\text{XVIII}\ldots\ S(dUq : Uq) = 0;$$

oder

$$\text{XVIII}'\ldots\ dUq : Uq = S^{-1}0;$$

aber der vector Charakter des Quotienten $dUq : Uq$ kann leicht in folgender Weise bestätigt werden. Man nehme den Conjugirten dieses Quotienten, und wir erhalten, nach VII. (vergl. 192, II.; 158; und 324, XI.),

$$\text{XIX}\ldots\ K(dUq\,.\,Uq^{-1}) = KUq^{-1}\,.\,dKUq$$
$$= Uq\,.\,d(Uq^{-1}) = -dUq\,.\,Uq^{-1};$$

und danach ist

$$\text{XX}\ldots\ (1+K)\,(dUq\,.\,Uq^{-1}) = 0;$$

was, nach 196, II., mit XVIII. übereinstimmt.

(10.) Der skalar Charakter des Tensors, Tq, setzt uns in den Stand, wie in der gewöhnlichen Rechnung, zu schreiben,

$$\text{XXI}\ldots\ dlTq = dTq : Tq;$$

aber es ist $lTq = Slq$, nach 316, V.; die vorige Formel XIII. kann daher nach VIII. auch so geschrieben werden,

$$\text{XXII}\ldots\ Sdlq = dSlq = dTq : dq = S(dq : q);$$

oder

$$\text{XXII}'\ldots\ dlq - q^{-1}dq = S^{-1}0.$$

(11.) Wenn $dq \parallel q$, so verschwindet die letzte Differenz, nach 333, II.; und die Gleichung XV. nimmt die Form an,

$$\text{XXIII}\ldots\ dlUq = Vdlq = dVlq.$$

Und wir haben in der That allgemein, $lUq = Vlq$, nach 316, XX., obwohl die Differentiale dieser beiden gleichen Ausdrücke im Besondern nicht mit den Gliedern der vorigen Formel XV. zusammenfallen, wenn q und dq diplanar sind. Wir können indessen allgemein (vergl. XXII.) schreiben,

$$\text{XXIV}\ldots\ dlUq - dUq : Uq = V(dlq - dq : q)$$
$$= dlq - dq : q.$$

335. Wir haben jetzt die sechs einfachen Functionen, 334, I. differentiirt, welche durch die Operationen der sechs charakteristischen Zeichen,

$$K,\ S,\ V,\ N,\ T,\ U,$$

entstehn; und was die Differentiation der zusammengesetzten Functionen 334, II. betrifft, welche durch Combinationen der vorigen Operationen entstehn, so lassen sie sich leicht nach denselben Sätzen ausführen, wie man aus den wenigen folgenden Beispielen ersehn kann.

(1.) Die Axe $\mathbf{Ax}.q$ eines Quaternions lässt sich, wie wir gesehn haben (291), durch die Combination UVq darstellen; das Differential der Achse kann daher, nach 334, IX. und XIV., in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\text{I.}\ldots d(\mathbf{Ax}.q) = dUVq = V(Vdq : Vq).UVq;$$

und danach ist,

$$\text{II.}\ldots \frac{d(\mathbf{Ax}.q)}{\mathbf{Ax}.q} = \frac{dUVq}{UVq} = V\frac{Vdq}{Vq}.$$

Das Differential der Achse ist daher, allgemein, eine Linie senkrecht zur Achse, oder eine Linie, welche in der Ebne des Quaternions liegt; aber sie verschwindet, wenn die Ebne (und daher die Axe) des Quaternions constant ist; oder wenn der Quaternion und sein Differential complanar sind.

(2.) Daher ist,

$$\text{III.}\ldots dUVq = 0,$$

wenn

$$\text{IV.}\ldots dq \parallel\parallel q;$$

und umgekehrt die Complanarität IV. kann durch die Gleichung III. ausgedrückt werden.

(3.) Es ist, nach ähnlichen Sätzen, leicht zu beweisen, dass

$$\begin{aligned}\text{V.}\ldots dVUq &= VdUq \\ &= V\left(V\frac{dq}{q}.Uq\right);\end{aligned}$$

und dass

$$\begin{aligned}\text{VI.}\ldots dSUq &= SdUq \\ &= S\left(V\frac{dq}{q}.Uq\right);\end{aligned}$$

(4.) Aber im Allgemeinen haben wir für irgend zwei Quaternionen, q und q', die Transformationen [vergl. 223, (5.)],

$$\begin{aligned}\text{VII.}\ldots S(Vq'.q) &= S(Vq'.Vq) \\ &= S.q'Vq;\end{aligned}$$

Digitized by Google

und wenn wir somit das charakteristische Zeichen V vor $dq:q$ in dem letzten Ausdruck VI. unter dem Zeichen S unterdrücken, und es vor Uq einfügen, so können wir den neuen Factor VUq durch $TVUq \cdot UVUq$ (188) ersetzen, oder durch $TVUq \cdot UVq$ (274, XIII.), oder durch $-TVUq : UVq$ (204, V.), wo der skalar Factor $TVUq$ aussen vorgeschrieben werden kann (nach 196, VIII.); wir können auch für $q^{-1} : UVq$ setzen $1 : (UVq \cdot q)$, oder $1 : qUVq$, denn es ist $UVq \parallel q$; die Formel VI. kann daher in folgender Weise geschrieben werden,

$$\text{VIII.} \ldots dSUq = -S \frac{dq}{qUVq} \cdot TVUq.$$

(5.) Wir können jetzt daran erinnern, dass uns früher, als wir den Zusammenhang der Quaternionen mit der Trigonometrie besprachen, die folgenden Formeln (196, XVI., und 204, XIX.) begegneten,

$$\text{IX.} \ldots SUq = \cos \angle q, \qquad TVUq = \sin \angle q;$$

wir hatten auch, in 316, für den Winkel eines Quaternions die Ausdrücke,

$$\text{X.} \ldots \angle q = TVlq = TlUq;$$

wir können daher den folgenden Ausdruck für das Differential des Winkels eines Quaternions aufstellen,

$$\text{XI.} \ldots d\angle q = dTVlq = dTlUq$$
$$= S \frac{dq}{qUVq}.$$

(6.) Im Folgenden gebe ich einen andern Weg, zu demselben Resultat zu gelangen, durch die Differentiation des Sinus anstatt des Cosinus des Winkels, oder durch die Berechnung von $dTVUq$, anstatt von $dSUq$. Für diesen Zweck ist nur nöthig zu bemerken, dass wir, nach 334, XII. XIV., und vermittelst einiger leichten Umformungen von der letzlich in (4.) angewandten Art, die Formel erhalten,

$$\text{XII.} \ldots dTVUq = S \frac{VdUq}{UVUq} = S \frac{dUq}{UVq}$$
$$= S\left(V \frac{dq}{q} \cdot \frac{Uq}{UVq}\right) = S \frac{dq}{qUVq} \cdot SUq;$$

Digitized by Google

wenn man sie durch SUq dividirt, und auf IX. und X. achtet, so kommt man wieder auf den Ausdruck XI. für das Differential des Winkels eines Quaternions.

(7.) Eliminirt man $S(dq:qUVq)$ aus VIII. und XII., so erhält man die differential Gleichung,

$$\text{XIII.}\ldots\ SUq\,.\,dSUq + TVUq\,.\,dTVUq = 0;$$

mit Rücksicht auf den skalar Charakter der differentiirten Variabeln ist das Integral augenscheinlich von der Form,

$$\text{XIV.}\ldots\ (SUq)^2 + (TVUq)^2 = \text{const.};$$

und in Uebereinstimmung damit haben wir, in 204, XX., gesehn, dass die Summe im ersten Gliede dieser Gleichung beständig gleich der positiven Einheit ist.

(8.) Die Formel XI. kann auch so geschrieben werden,

$$\text{XV.}\ldots\ d\angle q = S[V(dq:q):UVq];$$

und es lässt sich verificiren, dass, wenn wir annehmen, dass $dq:q$, wie in IV., und daher $dUVq = 0$, nach III., der Ausdruck unter dem Zeichen S das Differential des Quotienten, $Vlq:UVq$, wird, und daher, nach 316, VI., des Winkels $\angle q$ selbst.

336. Eine wichtige Anwendung der vorhergehenden Sätze und Regeln besteht in der Differentiation der skalar Functionen von Vectoren, wenn diese Functionen den Gesetzen und Bezeichnungen der Quaternionen gemäss definirt und ausgedrückt werden. Wir werden, in der That, finden, dass solche Differentiationen einen sehr ausgedehnten Theil in den Anwendungen der Quaternionen auf die Geometrie einnehmen; aber, für den Augenblick, werden wir sie hier nur als reine Uebungsbeispiele für die Berechnung behandeln. Das Folgende giebt einige wenige Beispiele.

(1.) Es möge ϱ, in den folgenden Nebenartikeln, einen variabeln Vector bezeichnen; und es werde die folgende Gleichung vorgeschlagen,

$$\text{I.}\ldots\ r^2 + \varrho^2 = 0,$$

in welcher

$$Vr = 0,$$

so dass r ein (im allgemeinen variabler) Skalar ist. Differentiirt man, und beachtet, dass, nach 279, III., $\varrho\varrho' + \varrho'\varrho = 2\,S\varrho\varrho'$, wenn ϱ' irgend ein zweiter Vector ist, so wie wir $d\varrho$ annehmen, so erhalten wir, nach 322, VIII., und nach 324, VII., die Gleichung,

$$\text{II.} \ldots r\,dr + S\varrho\,d\varrho = 0;$$

oder

$$\text{III.} \ldots dr = -\,r^{-1}S\varrho\,dr = r\,S\varrho^{-1}d\varrho.$$

In der That ist r hier, wenn es positiv angenommen wird, nach 282, II., der Tensor von ϱ; so dass der letzte Ausdruck III. für dr in der allgemeinen Formel, 334, XIII. mitenthalten ist.

(2.) Wenn der Tensor, r, constant ist, so wird die differential Gleichung II. einfach,

$$\text{IV.} \ldots S\varrho\,d\varrho = 0,$$

wenn

$$-\,\varrho^2 = \text{const.},$$

oder wenn

$$d\,T\varrho = 0.$$

(3.) Es möge ferner die gegebne Gleichung sein (vergl. 282, XIX.),

$$\text{V.} \ldots r^2 = T(\iota\varrho + \varrho\varkappa),$$

nebst

$$d\iota = 0, \qquad d\varkappa = 0,$$

so dass ι und $\varkappa$ hier zwei constante Vectoren sind. Quadrirt und differentiirt man, so erhalten wir daher (nach 334, XI., da $K\iota\varrho = \varrho\iota$, u. s. w.),

$$\text{VI.} \ldots 2r^3dr = \tfrac{1}{2}\,dN(\iota\varrho + \varrho\varkappa) = S(\varrho\iota + \varkappa\varrho)\,(\iota\,d\varrho + d\varrho\,\varkappa)$$
$$= (\iota^2 + \varkappa^2)\,S\varrho\,d\varrho + 2\,S\varkappa\varrho\iota\,d\varrho;$$

oder kürzer,

$$\text{VII.} \ldots 2r^{-1}dr = S\nu\,d\varrho,$$

wenn ν ein Hülfsvector ist, welcher durch die Gleichung bestimmt wird,

$$\text{VIII.} \ldots r^4\nu = (\iota^2 + \varkappa^2)\,\varrho + 2\,V\varkappa\varrho\iota;$$

sie lässt sich auf mehrfache Weise transformiren.

Digitized by Google

(4.) So können wir zum Beispiel, nach 295, VII., schreiben:

$$\text{IX.}\ldots r^4 v = (\iota^2 + \varkappa^2)\varrho + \varkappa\varrho\iota + \iota\varrho\varkappa$$
$$= \iota(\iota\varrho + \varrho\varkappa) + \varkappa(\varrho\iota + \varkappa\varrho);$$

oder, nach 294, III., und 282, XII.,

$$\text{X.}\ldots r^4 v = (\iota^2 + \varkappa^2)\varrho + 2(\varkappa S\iota\varrho - \varrho S\iota\varkappa + \iota S\varkappa\varrho)$$
$$= (\iota - \varkappa)^2\varrho + 2(\iota S\varkappa\varrho + \varkappa S\iota\varrho);$$

u. s. w.

(5.) Die Gleichung V. ergiebt (vergl. 190, V.), wenn sie quadrirt wird ohne differentiirt zu werden,

$$\text{XI.}\ldots r^4 = N(\iota\varrho + \varrho\varkappa) = (\iota\varrho + \varrho\varkappa)(\varrho\iota + \varkappa\varrho)$$
$$= (\iota^2 + \varkappa^2)\varrho^2 + \iota\varrho\varkappa\varrho + \varrho\varkappa\varrho\iota$$
$$= (\iota^2 + \varkappa^2)\varrho^2 + 2S\iota\varrho\varkappa\varrho$$
$$= (\iota - \varkappa)^2\varrho^2 + 4S\iota\varrho S\varkappa\varrho = \text{u. s. w.},$$

durch Transformationen von derselben Art, wie vorher; wir haben daher, in Folge der vorigen Ausdrücke für $r^4 v$, die folgende bemerkenswerth einfache Beziehung zwischen den beiden variabeln Vectoren, ϱ und v,

$$\text{XII.}\ldots S v\varrho = 1;$$

oder

$$\text{XII}'\ldots S\varrho v = 1.$$

(6.) Wenn der Skalar, r, constant ist, so erhalten wir, nach VII., die differential Gleichung,

$$\text{XIII.}\ldots S v d\varrho = 0;$$

und danach auch

$$\text{XIV.}\ldots S\varrho dv = 0,$$

nach XII.; es besteht somit eine Beziehung von Reciprocität zwischen den beiden Vectoren ϱ und v, deren geometrische Bedeutung wir bald sehn werden.

(7.) Mittlerweile sehn wir, wenn wir r wieder als variirend annehmen, dass der letzte Ausdruck VI. für $2r^3 dr$ auf andere Weise erhalten werden kann, indem wir die Hälfte des Differentials eines jeden der beiden zuletzt entwickelten Ausdrücke XI. für r^4 nehmen; es ist, bei all diesen kleinen Rechnungen, daran zu denken, dass cyklische Permutation der Factoren

Digitized by Google

unter dem Zeichen S erlaubt ist [223, (10.)], selbst wenn die Factoren Quaternionen sind, und was auch immer ihre Anzahl sein mag; und dass, wenn sie Vectoren sind, und wenn ihre Anzahl ungrade ist, dann erlaubt ist, ihre Reihenfolge unter dem Zeichen V umzukehren [295, (9.)], und so zum Beispiel in der Formel VIII. zu schreiben $V\iota\varrho\varkappa$ an Stelle von $V\varkappa\varrho\iota$.

(8.) Als ein weiteres Beispiel einer skalar Function eines Vectors möge p die Nähe (oder Verwandtschaft) eines variabeln Punktes P zum Anfangspunkt O bezeichnen; so dass

$$\text{XV.} \ldots p = (-\varrho^2)^{-\frac{1}{2}} = T\varrho^{-1},$$

oder

$$\text{XV}' \ldots p^{-2} + \varrho^2 = 0.$$

Daher ist,

$$\text{XVI.} \ldots dp = S\nu d\varrho,$$

wenn

$$\text{XVII.} \ldots \nu = p^3\varrho = p^2 U\varrho;$$

ν ist hier ein neuer Hülfsvector, welcher von dem zuletzt betrachteten (VIII.) verschieden ist, und der — wie wir sehn — denselben Versor (oder dieselbe Richtung) hat, wie der Vector ϱ selbst, dessen Tensor aber gleich dem Quadrat der Nähe von P zu O ist; oder gleich dem umgekehrten Quadrat der Entfernung des einen dieser beiden Punkte vom andern ist.

337. Andrerseits haben wir oft Gelegenheit, in den Anwendungen Vectoren als Functionen von Skalaren in Betracht zu ziehn, wie in 99, jetzt aber mit dem Gebrauch von Formen, welche aus Operationen an Quaternionen entspringen, und die daher im ersten Theil nicht in Betracht gezogen worden sind. Und wenn immer wir somit einen Ausdruck wie einen der beiden folgenden haben,

$$\text{I.} \ldots \varrho = \varphi(t),$$

oder

$$\text{II.} \ldots \varrho = \varphi(s, t),$$

für den variabeln Vector einer Curve, oder einer Oberfläche (vergl. wieder 99), wo s und t zwei variable Skalare sind, und $\varphi(t)$ und $\varphi(s, t)$ irgend welche Functionen von vector Form

Digitized by Google

bezeichnen, von denen die letztere hier als völlig unabhängig* von der ersteren angenommen ist, so können wir [vergl. 100, (4.) und (9.), und die neueren Nebenartikel, 327, (5.), (6.), und 329, (5.)] die Bezeichnungen für Ableitungen anwenden für totale, oder Gesammt-Ableitungen, und für partielle, oder Theil-Ableitungen; und wir können daher die folgenden als die differentiirten Gleichungen hinschreiben, welche bezüglich aus den Formen I. und II. hervorgehn:

$$\begin{aligned} &\text{III.}\ldots d\varrho = \varphi' t \,.\, dt = \varrho' dt = D_t \varrho \,.\, dt; \\ &\text{IV.}\ldots d\varrho = d_s \varrho + d_t \varrho \\ &\qquad\qquad = D_s \varrho \,.\, ds + D_t \varrho \,.\, dt; \end{aligned}$$

die geometrischen Bedeutungen derselben haben wir schon theilweise gesehn, in den Nebenartikeln zu 100, und sie werden bald vollständiger entwickelt werden.

(1.) So haben wir für den kreisförmigen Ort, 314, (1.), für welchen

$$\text{V.}\ldots \varrho = \alpha^t \beta, \qquad T\alpha = 1, \qquad S\alpha\beta = 0,$$

nach 333, VIII., den folgenden abgeleiteten Vector,

$$\text{VI.}\ldots \varrho' = D_t \varrho = \tfrac{\pi}{2} \alpha^{t+1} \beta = \tfrac{\pi}{2} \alpha \varrho.$$

(2.) Und für den elliptischen Ort, 314, (2.), für welchen

$$\text{VII.}\ldots \varrho = V.\alpha^t \beta, \qquad T\alpha = 1,$$

aber nicht

$$S\alpha\beta = 0,$$

erhalten wir, ebenso, den weiteren abgeleiteten Vector,

$$\text{VIII.}\ldots \varrho' = D_t \varrho = \tfrac{\pi}{2} V.\alpha^{t+1} \beta.$$

(3.) Als ein Beispiel für eine vector Function von mehr als einem Skalar wollen wir den Ausdruck (308, XVIII.) wiederaufnehmen,

$$\text{IX.}\ldots \varrho = r k^t j^s k j^{-s} k^{-t};$$

---

* Wir werden daher hier nicht die für den Augenblick benutzte Bezeichnung in einigen der letzten Artikel anwenden, nach welcher wir gehabt haben würden, $d\varphi q = \varphi(q, dq)$.

in dem wir den Tensor r jetzt als gegeben annehmen wollen, so dass ϱ der variable Vector eines Punktes auf einer gegebnen Kugeloberfläche ist, deren Radius r ist, und deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist; während s und t zwei unabhängige skalar Variable sind, in Bezug auf welche die beiden partiellen Ableitungen zu bestimmen sind.

(4.) Die Ableitung nach t ist leicht; denn, da ijk Einheitsvectoren (295) sind, und da wir, nach 333, VIII., allgemein haben,

$$\text{X.}\ldots d.\alpha^x = \frac{\pi}{2}\alpha^{x+1}dx,$$

und daher

$$\text{XI.}\ldots D_t.\alpha^x = \frac{\pi}{2}\alpha^{x+1}D_t x,$$

wenn $T\alpha = 1$, und wenn x irgend eine skalar Function von t ist, so können wir sofort, nach 279, IV., schreiben,

$$\text{XII.}\ldots D_t\varrho = \frac{\pi}{2}(k\varrho - \varrho k) = \pi Vk\varrho;$$

und wir sehn, dass

$$\text{XIII.}\ldots S\varrho D_t\varrho = 0,$$

ein Resultat, welches zu erwarten war, wegen der Gleichung,

$$\text{XIV.}\ldots \varrho^2 + r^2 = 0,$$

welche, nach 308, XXIV., aus dem vorigen Ausdruck IX. für ϱ folgt.

(5.) Um einen Ausdruck von ungefähr demselben Grad von Einfachheit für die andere partielle Ableitung von ϱ zu bilden, mögen wir beachten, dass $j^{s+1}kj^{-s}$ gleich seinem eignen vector Theil ist (da sein Skalar verschwindet); folglich ist

$$\text{XV.}\ldots D_s\varrho = \pi k^t jk^{-t}\varrho;$$

oder

$$\text{XVI.}\ldots D_s\varrho = \pi k^{2t}j\varrho = \pi jk^{-2t}\varrho,$$

in Folge der Transformationen 308, (11.). Und da der Skalar von $k^t jk^{-t}$ null ist, so haben wir die Gleichung,

$$\text{XVII.}\ldots S\varrho D_s\varrho = 0,$$

Digitized by Google

die der Gleichung XIII. entspricht; sie hätte auf andere Weise erhalten werden können, wenn man die Ableitung von XIV. genommen hätte, in Bezug auf den variablen Skalar s.

(6.) Die partielle Ableitung $D_s\varrho$ muss ein Vector sein; denn, nach XV. oder XVI., muss ϱ senkrecht zum Vector $k^t j k^{-t}$ sein, oder zu $k^{2t} j$, oder zu $j k^{-2t}$; ein Resultat, welches unter der letzten Form leicht durch den Ausdruck 315, XII. für ϱ bestätigt wird. In der That ergiebt dieser Ausdruck, nach 315, (3.) und (4.), und nach den letzten Werthen XII., XVI., die weiteren Formen für die beiden partiellen Ableitungen von ϱ, welche wir vorher in Betracht gezogen hatten:

$$\text{XVIII.} \ldots D_t\varrho = \pi r k^{2t} V.j^{2s};$$
$$\text{XIX.} \ldots D_s\varrho = \pi r (k^{2t} V.i^{2s+1} - V.k^{2s});$$

sie hätten unmittelbar durch partielle Ableitungen aus dem Ausdruck 315, XII. selbst abgeleitet werdenkönnen, von dem beide Vector-Formen sind.

(7.) Und in Folge dessen, oder indem wir von dem entwickelten Ausdruck 315, XIII. unmittelbar die Ableitung nehmen, erhalten wir die neuen Formen für die partiellen Ableitungen von ϱ:

$$\text{XX.} \ldots D_t\varrho = \pi r (j \cos t\pi - i \sin t\pi) \sin s\pi;$$
$$\text{XXI.} \ldots D_s\varrho = \pi r \{(i \cos t\pi + j \sin t\pi) \cos s\pi - k \sin s\pi)\}.$$

(8.) Wir können hinzufügen, dass nicht nur der variable Vector ϱ senkrecht zu jedem der beiden abgeleiteten Vectoren, $D_s\varrho$ und $D_t\varrho$, ist, sondern dass sie auch zu einander senkrecht sind; denn wir können, nach XII. und XVI., schreiben,

$$\text{XXII.} \ldots S(D_s\varrho \,.\, D_t\varrho) = -\pi^2 S.k^{2t} j \varrho^2 k$$
$$= \pi^2 r^2 S.k^{2t} i$$
$$= 0;$$

und derselbe Schluss kann auch aus den Ausdrücken XX. und XXI. gezogen werden.

(9.) Ein Vector kann als eine Function von drei unabhängigen skalar Variabeln, wie r, s, t es sind, angesehn werden; oder besser er muss als eine solche angesehn werden, wenn er der Vector eines beliebigen Punktes im Raume sein

Digitized by Google

soll: und er wird daher ein Gesammtdifferential (329) von der dreigliedrigen Form haben,

$$\text{XXIII.}\ldots\ d\varrho = d_r\varrho + d_s\varrho + d_t\varrho = D_r\varrho\,.\,dr + D_s\varrho\,.\,ds + D_t\varrho\,.\,dt;$$

und wir werden somit drei* partielle Ableitungen haben.

(10.) Zum Beispiel, wenn ϱ den Ausdruck IX. annimmt, so erhalten wir als dritte partielle Ableitung,

$$\text{XXIV.}\ldots\ D_r\varrho = r^{-1}\varrho = U\varrho,$$

welche auch vollständiger in folgender Weise geschrieben werden kann (vergl. wieder 315, XIII.),

$$\text{XXV.}\ldots\ D_r\varrho = k^t j^s k j^{-s} k^{-t} = (i\cos t\pi + j\sin t\pi)\sin s\pi + k\cos s\pi;$$

und wir sehn, dass die drei abgeleiteten Vectoren,

$$\text{XXVI.}\ldots\ D_r\varrho,\quad D_s\varrho,\quad D_t\varrho,$$

hier ein rechtwinkliges System bilden.

Fünfter Abschnitt.

Ueber successive Differentiale und Entwicklungen von Functionen von Quaternionen.

338. Es findet sich jetzt keine Schwierigkeit mehr bei der mehrfachen Differentiation, entweder der Gesammt- oder Theil-Differentiation, von Functionen von einer oder von mehreren Quaternionen; und solche Differentiation wird sich als nützlich erweisen, wie in der gewöhnlichen Rechnungsweise, im Zusammenhang mit Entwicklungen von Functionen: und ausserdem ist sie für viele von den geometrischen und physi-

* Das heisst, drei von der ersten Ordnung; denn wir werden bald Gelegenheit haben, mehrfache oder successive Differentiale in Betracht zu ziehn, von Functionen von einer oder von mehreren Variabeln, und werden so zur Betrachtung von Ordnungen von Differentialen und von Ableitungen gelangen, welche höher als die erste sind.

Digitized by Google

kalischen Anwendungen der Differentiale von Quaternionen nothwendig, auf welche wir bisher noch nicht eingegangen sind. Einige wenige Beispiele der mehrfachen Differentiation mögen dazu dienen, leichter, als irgend welche allgemeine Vorschriften, die Natur und die Wirkungen dieser Operation zu zeigen; und wir wollen, der Einfachheit wegen, mit entwickelten (expliciten) Functionen einer quaternion Variabeln beginnen.

(1.) Man nehme das Quadrat, q^2, eines Quaternions, als eine Function fq, welche zweimal differentiirt werden soll. Wir sahn, in 324, VII., dass eine erste Differentiation die Gleichung ergab,

$$\text{I.} \ldots dfq = d.q^2 = q.dq + dq.q;$$

wir wollen jetzt aber wieder differentiiren, um das zweite Differential d^2fq der Function q^2 zu bilden, indem wir das Differential der Variabeln q wieder als gleich dq behandeln, und im Allgemeinen schreiben werden $ddq = d^2q$, wo d^2q ein neuer willkürlicher Quaternion ist, dessen Tensor, Td^2q, nicht klein (vergl. 322) zu sein braucht. Und wir bekommen somit, im Allgemeinen, den zweimal differentiirten Ausdruck, oder das Differential von der zweiten Ordnung,

$$\text{II.} \ldots d^2fq = d^2.q^2 = q.d^2q + 2dq^2 + d^2q.q.$$

(2.) Das zweite Differential des Reciproken eines Quaternions ist allgemein (vergl. 324, XI.),

$$\text{III.} \ldots d^2.q^{-1} = 2(q^{-1}dq)^2q^{-1} - q^{-1}d^2q.q^{-1}.$$

(3.) Wenn ϱ ein variabler Vector ist, dann haben wir [vergl. 336, (1.)], für das erste und zweite Differential seines Quadrates die Ausdrücke:

$$\text{IV.} \ldots d.\varrho^2 = 2S\varrho d\varrho;$$
$$\text{V.} \ldots d^2.\varrho^2 = 2S\varrho d^2\varrho + 2d\varrho^2.$$

(4.) Wenn $f\varrho$ irgend eine andere skalar Function eines variablen Vectors ϱ ist, und wenn (vergl. wieder die Nebenartikel zu 336) sein erstes Differential auf die Form gebracht wird,

$$\text{VI.} \ldots df\varrho = 2Sv d\varrho,$$

wenn v ein anderer variabler Vector ist, dann kann das zweite Differential derselben Function, wie folgt, ausgedrückt werden:

$$\text{VII.} \ldots d^2 f\varrho = 2Sv d^2\varrho + 2Sdv d\varrho;$$

hier habe ich, kurz, $Sdv d\varrho$ anstatt $S(dv.d\varrho)$ geschrieben.

(5.) Die folgende sehr einfache Gleichung werden wir, bei der Theorie der Bewegungen, welche unter dem Einfluss von Centralkräften entstehn, von Nutzen finden:

$$\text{VIII.} \ldots dV\varrho d\varrho = V\varrho d^2\varrho;$$

denn es ist

$$V.d\varrho^2 = 0.$$

(6.) Als ein Beispiel für das zweite Differential eines Quaternions, welcher als eine Function einer skalar Variabeln anzusehn ist [vergl. 333, VIII., und 337, (1.)], mag das folgende gegeben werden, in welchem α eine gegebne Einheitslinie bezeichnet, so dass $\alpha^2 = -1$ ist, $d\alpha = 0$, dagegen x ein variabler Skalar ist:

$$\text{IX.} \ldots d^2.\alpha^x = d\left(\frac{\pi}{2}\alpha^{x+1}dx\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\alpha^{x+1}d^2x - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \alpha^x dx^2.$$

(7.) Das zweite Differential des Productes irgend zweier Functionen eines Quaternions q kann, wie folgt (vergl. II.) ausgedrückt werden:

$$\text{X.} \ldots d^2(fq.\varphi q) = d^2fq.\varphi q + 2dfq.d\varphi q + fq.d^2\varphi q.$$

339. Das zweite Differential, d^2q, des variablen Quaternions q, geht allgemein (wie wir gesehn haben) in den Ausdruck für das zweite Differential d^2fq, der Function fq, als ein neuer und willkürlicher Quaternion ein: aber, grade aus diesem Grunde, ist es erlaubt, und erweist sich häufig als angemessen, dies zweite Differential d^2q gleich null anzunehmen: oder, was auf dasselbe hinauskommt, anzunehmen, dass das erste Differential dq constant ist. Und wenn wir diese neue Annahme machen,

Digitized by Google

$$\text{I.}\ldots dq = \text{einer Constanten},$$

oder

$$\text{I}'.\ldots d^2q = 0,$$

werden die Ausdrücke für d^2fq folglich einfacher, wie in den folgenden Beispielen.

(1.) Mit der letzten Annahme, I. oder I'., erhalten wir die folgenden zweiten Differentiale des Quadrates und des Reciproken eines Quaternions:

$$\text{II.}\ldots d^2.q^2 = 2dq^2;$$
$$\text{III.}\ldots d^2.q^{-1} = 2(q^{-1}dq)^2q^{-1} = 2q^{-1}(dq.q^{-1})^2.$$

(2.) Wenn wir ferner annehmen, dass c_0, c_1, c_2 irgend welche drei constanten Quaternionen sind, und die Function,

$$\text{IV.}\ldots fq = c_0qc_1qc_2,$$

nehmen, so finden wir, unter derselben Bedingung I. oder I'., dass ihr erstes und zweites Differential sind,

$$\text{V.}\ldots dfq = c_0dq.c_1qc_2 + c_0qc_1dq.c_2;$$
$$\text{VI.}\ldots d^2fq = 2c_0dq.c_1dq.c_2;$$

wenn man sie niederschreibt, so kann man die Punkte* fortlassen.

(3.) Wenn das erste Differential, dq, noch ganz willkürlich [vergl. 322, (8.), und 325, (2.)] bleibt, so dass nicht die Annahme gemacht wird, dass sein Tensor Tdq klein ist, wenn wir auch jetzt das Differential dq als constant (I.) annehmen, so haben wir in aller Strenge,

$$\text{VII.}\ldots (q+dq)^2 = q^2 + d.q^2 + \tfrac{1}{2}d^2.q^2;$$

diese Gleichung kann auch so geschrieben werden,

$$\text{VIII.}\ldots (q+dq)^2 = (1 + d + \tfrac{1}{2}d^2).q^2.$$

(4.) Und ebenso haben wir, allgemeiner, unter derselben Bedingung der Constanz von dq, die Gleichung,

$$\text{IX.}\ldots f(q+dq) = (1 + d + \tfrac{1}{2}d^2)fq,$$

wenn die Function fq die Summe irgend einer Anzahl von

* Vergleiche die zweite Anmerkung auf Seite 578.

Monomen ist, von denen jedes im Besonderen von der Form IV. ist, und daher jedes rational, ganz, und homogen von der zweiten Dimension in Bezug auf den variabeln Quaternion, q; oder wenn sie die Summe solcher Monome ist, und anderer von der ersten Dimension und constanter Glieder: das heisst, wenn $a_0, b_0, b_1, b'_0, b'_1, \cdots$ und $c_0, c_1, c_2, c'_0, c'_1, c'_2, \cdots$ irgend welche constanten Quaternionen sind, und wenn

$$\text{X.} \ldots fq = a_0 + \Sigma b_0 q b_1 + \Sigma c_0 q c_1 q c_2.$$

340. Es ist leicht, Differentiationen von der dritten und höheren Ordnung zu bewerkstelligen; man braucht sich nur zu denken, dass, wenn wir auf einer früheren Stufe die ersten Differentiale von $q, dq, \cdots$ mit $dq, d^2q, \cdots$ bezeichnet haben, wir nun fortfahren werden, sie so zu bezeichnen, auf jeder folgenden Stufe der mehrfachen Differentiation: und wenn wir es angemessen finden, irgend ein Differential als constant zu behandeln, wir dann alle seine mehrfachen Differentiale als verschwindend behandeln müssen. Einige wenige Beispiele mögen gegeben werden, hauptsächlich in der Absicht, die vorige Formel 339, IX., für die Function $f(q+dq)$ einer Summe von irgend zwei Quaternionen, q und dq, auf vielgliedrige Formen von höherer als der zweiten Dimension auszudehnen.

(1.) Das dritte Differential eines Quadrates ist allgemein (vergl. 338, II.),

$$\text{I.} \ldots d^3.q^2 = q.d^3q + d^3q.q + 3(dq.d^2q + d^2q.dq).$$

(2.) Allgemeiner kann das dritte Differential eines Productes von zwei quaternion Functionen (vergl. 338, X.) in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$\text{II.} \ldots d^3(fq.\varphi q) = d^3fq.\varphi q + 3d^2fq.d\varphi' q + 3dfq.d^2\varphi q + fq.d^3\varphi q.$$

(3.) Noch allgemeiner ist das n-te Differential eines Productes, wie in der gewöhnlichen Rechnung,

$$\text{III.} \ldots d^n(fq.\varphi q) = d^nfq.\varphi q + nd^{n-1}fq.d\varphi q + n_2 d^{n-2}fq.d^2\varphi q + \ldots + fq.d^n\varphi q,$$

wenn

$$n_2 = \frac{n(n-1)}{2}, \qquad n_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}, \text{ u. s. w.;}$$

Digitized by Google

das einzige, was den Quaternionen eigenthümlich ist, ist, dass wir (im Allgemeinen) gezwungen sind, die Anordnung der Factoren beizubehalten, in jedem Gliede des Ausdrucks III.

(4.) Danach ist, im Besonderen, wenn man die Function fq kurz durch r bezeichnet, und φq mit q vertauscht,

$$\text{IV.} \ldots d^n . rq = d^n r . q + n d^{n-1} r . dq,$$

wenn

$$d^2 q = 0.$$

(5.) Daher haben wir auch, unter der Bedingung, dass dq constant ist, wenn c irgend ein anderer constanter Quaternion ist, die Transformation,

$$\text{V.} \ldots (1 + d + \tfrac{1}{2} d^2 + \tfrac{1}{2.3} d^3 + \ldots + \tfrac{1}{2.3 \ldots n} d^n) . rqc$$

$$= (1 + d + \tfrac{1}{2} d^2 + \tfrac{1}{2.3} d^3 q + \ldots + \tfrac{1}{2.3 \ldots (n-1)} d^{n-1}) r .$$

$$(q + dq) c,$$

wenn

$$d^n r = 0,$$

ist.

(6.) Danach ist nun, nach 339, (4.), leicht zu schliessen, dass, wenn wir das Symbol ε^d deuten durch die Gleichung (vergl. 316, I.),

$$\text{VI.} \ldots \varepsilon^d = 1 + d + \tfrac{1}{2} d^2 + \tfrac{1}{2.3} d^3 + \text{u. s. w.},$$

und wenn wir das weitere Symbol $\varepsilon^d fq$ so deuten, als ob es kurz die Reihe bezeichnet, welche aus fq dadurch gebildet wird, dass man an ihr mit dieser symbolischen Entwicklung operirt; und wenn die Function fq, an der man so operirt hat, irgend ein endliches Polynom ist, welches (ebenso wie der Ausdruck 339, X.) keine gebrochnen oder negativen Exponenten enthält, wir dann, als eine Erweiterung einer früheren Gleichung (339, IX.), die Formel hinschreiben können:

$$\text{VII.} \ldots \varepsilon^d fq = f(q + dq),$$

wenn

$$d^2 q = 0$$

ist; sie gilt hier in aller Strenge, da sämmtliche Glieder dieser

Entwicklung für eine Function einer Summe zweier Quaternionen, q und dq, einzeln gleich null werden, sobald der symbolische Exponent von d grösser als die Dimension des Polynoms wird.

(7.) Wir werden bald sehn, dass es einen Sinn giebt, in welchem man diese exponential Transformation VII. auf andere functional Formen ausdehnen kann, welche nicht wie die vorige zusammengesetzt sind: und dass somit ein dem Taylor'schen Satz entsprechendes Theorem für Quaternionen aufgestellt werden kann. Mittlerweile möge man beachten, dass, wenn man dq mit Δq in der endlichen Entwicklung vertauscht, welche wir vorher erhalten haben, wir die folgende Formel hinschreiben können:

$$\text{VIII.} \ldots \varepsilon^d fq = f(q + \Delta q) = (1 + \Delta) fq,$$

oder kurz,

$$\text{IX.} \ldots \varepsilon^d = 1 + \Delta;$$

mit dieser letzteren symbolischen Gleichung kann man operiren, und sie transformiren, wie in der gebräuchlichen Rechnung mit Differenzen und Differentialen. Zum Beispiel, ist man damit einverstanden, $\Delta^2 q$ sowohl, wie $d^2 q$, als verschwindend zu behandeln, so hat man (für irgend einen positiven und ganzen Exponenten m) die beiden folgenden Transformationen von IX.,

$$\text{X.} \ldots \Delta^m = (\varepsilon^d - 1)^m,$$

und

$$\text{XI.} \ldots d^m = [\log(1 + \Delta)]^m;$$

wenn man mit den so gleichgesetzten Symbolen an irgend einer polynomen Function fq, von der vorher beschriebenen Art operirt, so ergeben sich stets endliche Entwicklungen, welche einander in aller Strenge gleich sind.

341. Es mögen Fx und φx irgend zwei Functionen einer skalar Variabeln sein, welche beide mit dieser Variabeln zugleich verschwinden; so dass sie den beiden Bedingungen genügen,

$$\text{I.} \ldots F0 = 0, \qquad \varphi 0 = 0.$$

Dann sind die drei zusammengehörigen Werthe,

$$\text{II.} \ldots x, \qquad Fx, \qquad \varphi x,$$

Digitized by Google

der Variabeln, und der beiden Functionen, zu gleicher Zeit (vergl. 320, 321) drei zusammengehörige (simultane) Differenzen, im Vergleich mit dem andern Werthsystem der drei zusammengehörigen Werthe,

$$\text{III.} \ldots 0, \qquad Fo, \qquad \varphi 0.$$

Wenn man daher irgend welche Gleichvielfachen,

$$\text{IV.} \ldots nx, \qquad nFx, \qquad n\varphi x,$$

der drei Werthe II. durch irgend eine passende Zunahme der Zahl, n, in Verbindung mit einer Abnahme der Variabeln x dahin bringen kann, zusammen irgend einem System von Grenzwerthen zuzustreben, so müssen sich diese Grenzwerthe (nach der Definition in 320, vergl. ferner 321) als ein System zusammengehöriger Differentiale,

$$\text{V.} \ldots dx, \qquad dFx, \qquad d\varphi x,$$

betrachten lassen, welche dem System von Anfangswerthen III. entsprechen; und sie müssen den letzten Werthen des mit jenem in Verbindung stehenden Systems von Ableitungen,

$$\text{VI.} \ldots 1, \qquad F'x, \qquad \varphi' x,$$

proportional sein, wenn x der Null zustrebt. Wir können daher, als Ausdrücke für diese schliesslichen Werthe der beiden letzten abgeleiteten Functionen schreiben,

$$\text{VII.} \ldots F'0 = \lim_{n=\infty} nF\frac{1}{n}, \qquad \varphi' 0 = \lim_{n=\infty} n\varphi\ \frac{1}{n},$$

wenn

$$Fo = \varphi 0 = 0.$$

Und selbst wenn diese letzten Werthe verschwinden, oder wenn die beiden neuen Bedingungen,

$$\text{VIII.} \ldots F'0 = 0, \qquad \varphi' 0 = 0,$$

erfüllt sind, so dass x, $F'x$, und $\varphi' x$, jetzt (vergl. II.) ein neues System von zusammengehörigen Differenzen bilden, so können wir wieder die folgende Grenzgleichung für Quotienten aufstellen, welche von den letzten Bedingungen VIII. unabhängig ist,

$$\text{IX.} \ldots \lim_{x=0} (Fx : \varphi x) = \lim_{x=0} (F'x : \varphi' x),$$

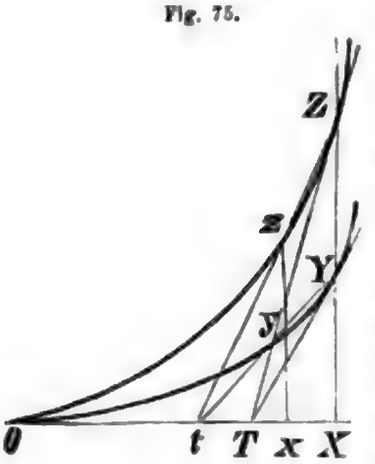
wenn

$$F0 = \varphi 0 = 0;$$

darunter ist auch zu verstehn, dass, in gewissen Fällen, diese beiden Quotienten beide mit x verschwinden können; oder dass sie zusammen der Unendlichkeit zustreben können, wenn x, wie vorher, der Null zustrebt.

(1.) Dieser Satz ist so wichtig, dass es nicht unnütz sein wird, ihn durch eine geometrische Erläuterung zu bestätigen, welche zu gleicher Zeit als ein geometrischer Beweis desselben dienen kann; wenigstens für den ausgedehnten Fall, wenn die beiden Functionen fx und φx skalar Formen haben, und folglich durch die entsprechenden Ordinaten, XY und XZ, zweier Curven OyY und OzZ (oder durch Ordinaten, welche zu ein und derselben Abscisse OX gehören) dargestellt, oder construirt werden können; derjenigen beiden Curven, welche in einer Ebne liegen, und in ein und demselben Anfangspunkt O beginnen (oder durch ihn hindurchgehn), wie in der beigefügten Figur 75. Wir werden später sehn, dass das so erhaltene Resultat auf quaternion Functionen ausgedehnt werden kann.

Fig. 75.



(2.) Man nehme daher erstens an, dass die Ordinaten dieser beiden Curven proportional seien, oder dass sie zu einander in einem festbestimmten und constanten Verhältniss stehn; so dass die Gleichung,

$$\mathrm{X}\ldots XY : XZ = xy : xz,$$

für jedes Abscissenpaar, OX und Ox, befriedigt wird, wie gross oder wie klein auch die entsprechenden Ordinaten sein mögen. Verlängert man daher (wenn nöthig) die Sehne Yy der ersten Curve, so dass sie die Abscissenachse in einem gewissen Punkte t trifft, und bestimmt so eine Subsecante tX, so sehn wir sofort, aus den ähnlichen Dreiecken, dass die entsprechende Sehne Zz der zweiten Curve dieselbe Achse in demselben Punkte t treffen wird; und dass sie daher, in aller Strenge, dieselbe Subsecante, tX, bestimmen wird.

Digitized by Google

(3.) Wenn man sich daher vorstellt, dass sich der Punkt x dem X nähert, so dass die Secante Yyt der ersten Curve mit der Tangente YT zur Curve in dem Punkte Y zusammenzufallen strebt, so muss die Secante Zzt der zweiten Curve mit der Linie ZT zusammenzufallen streben, und diese Linie muss daher die Tangente zur zweiten Curve werden: oder, mit anderen Worten, wenn man die Bedingung X. annimmt, dass eine constante Proportionalität zwischen den Ordinaten bestehn soll, so fallen entsprechende Subtangenten zusammen und sind folglich gleich.

(4.) Nehmen wir zunächst an, dass entsprechende Ordinaten nur dahin streben, ein gegebnes oder constantes Verhältniss zu einander zu haben; oder dass ihr (jetzt) variables Verhältniss einem gegebnen oder festbestimmten Grenzwerth zustrebt, wenn die gemeinsame Abscisse unendlich verringert wird, oder wenn der Punkt X dem O zustrebt; und es sei T wieder der variable Punkt, in welchem die Tangente zur ersten Curve an Y die Achse trifft, so dass die Linie TX wieder die erste Subtangente ist. Dann geht die entsprechende Tangente zur zweiten Curve an Z im Allgemeinen nicht durch den Punkt T, sondern sie wird die Achse in einem gewissen, von ihm verschiedenen Punkte U treffen. Aber das Verhältniss der beiden entsprechenden Subtangenten, TX und UX, ein Verhältniss, welches das der Gleichheit gewesen war, als die Bedingung der Proportionalität X. streng erfüllt war, wird jetzt wenigstens einem solchen Verhältniss zustreben; so dass wir, unter dieser neuen Bedingung des Hinstrebens zur Proportionalität der Ordinaten, die Grenzgleichung haben werden,

$$\text{XI.} \ldots \lim.(TX : UX) = 1;$$

und daraus resultirt die Gleichung IX., unter der geometrischen Form,

$$\text{XII.} \ldots \lim.(\tan XTY : \tan XUZ) = \lim.(XY : XZ).$$

(5.) Wir hätten auch beachten können, dass, wenn die Proportion X. streng erfüllt ist, entsprechende Flächen* (wie

* Vergleiche den vierten Lehnsatz des ersten Buchs der Principia; und siehe besonders seinen Zusatz, in welchem die Betrachtung dieses Nebenartikels dem Wesen nach vorweggenommen ist.

zum Beispiel $xXYy$ und $xXZz$) der beiden Curven genau in dem gegebnen Verhältniss der Ordinaten stehn; so dass die weitere Gleichung, oder Proportion,

$$\text{XIII.}\ldots OXYyO : OXZzO = XY : XZ,$$

dann ebenfalls streng gültig ist. Wenn wir daher nur annehmen, wie in (4.), dass die Ordinaten einem gewissen festbestimmten Grenzverhältniss zustreben, so müssen die Flächen ihm ebenfalls zustreben; so dass, wenn das zweite Glied der Gleichung IX. irgend einen bestimmten Werth als Grenzwerth hat, das erste Glied denselben Grenzwerth haben muss: während der vorige Beweis, durch Subtangenten, besser dazu diente, zu zeigen, dass wenn der erste (oder linker Hand stehende) Grenzwerth in IX. existirte, dann auch der zweite Grenzwerth in jener Gleichung existirte, und dem ersten gleich war.

(6.) Wenn die Function Fx ein Quaternion ist, so können wir sie (nach 221), wie folgt, ausdrücken,

$$\text{XIV.}\ldots Fx = W + iX + jY + kZ,$$

wo W, X, Y, Z vier skalar Functionen von x sind, von denen jede im Besondern als die Ordinate einer ebenen Curve construirt werden kann; die vorige geometrische* Ueberlegung

* Anstatt der Gleichung IX. ist es, in neueren Werken über differential Rechnung, üblich geworden, eine Gleichung von folgender Form zu geben, welche aus den Sätzen von Lagrange hergeleitet ist,

$$\frac{F(x)}{\varphi(x)} = \frac{F'(\theta x)}{\varphi'(\theta x)},$$

wenn

$$F0 = \varphi 0 = 0;$$

θ bezeichnet irgend einen echten Bruch, oder eine Grösse zwischen 0 und 1. Und eine geometrische Erläuterung, die auch ein geometrischer Beweis ist, wenn die Functionen Fx und φx construirt werden können (oder wenn man sie sich construirt denken kann) als die Ordinaten zweier ebnen Curven, wird bisweilen aus dem Grundsatz (oder aus der geometrischen Anschauung) abgeleitet, dass die Sehne irgend eines endlichen und ebnen Bogens parallel zu der Tangente sein muss, welche an einen gewissen Punkt des endlichen Bogens gezogen wird. Dagegen besteht dieser Parallelismus, im Allgemeinen, nicht länger, wenn die Curve von doppelter Krümmung ist; und demgemäss ist die Gleichung in dieser Anmerkung nicht allgemein gültig, wenn die Functionen Quaternionen sind; oder selbst nicht, wenn eine von ihnen ein Quaternion, oder ein Vector ist.

Digitized by Google

passt somit auf jede von ihnen, und daher auch auf ihre lineare Combination Fx: diese quaternion Function reducirt sich selbst auf eine vector Function von x, wenn $W = 0$ ist.

(7.) Und wenn ψx eine andere quaternion oder vector Function wäre, so könnten wir sie zuerst an Stelle von Fx setzen, und könnten dann die skalar Function φx eliminiren; und es liesse sich so beweisen, dass eine Grenzgleichung von der Form IX. statt hat, wenn die beiden verglichenen Functionen Vectoren, oder Quaternionen sind, Functionen, von denen wir wieder annehmen, dass sie mit x verschwinden.

(8.) Indessen erscheinen die allgemeinen Betrachtungen, durch welche die Gleichung IX. kürzlich begründet wurde, einfacher und directer; und es ist augenscheinlich, dass sie, in gleicher Weise, die weitere aber analoge Gleichung ergeben, in welcher $F''x$ und $\varphi''x$ zweite Ableitungen sind, und bei welchen jetzt angenommen ist, dass die Bedingungen VIII. erfüllt werden:

$$\text{XV.} \ldots \lim_{x=0} (Fx : \varphi' x) = \lim_{x=0} (F'' x : \varphi'' x),$$

wenn

$$F'0 = 0, \qquad \varphi' 0 = 0.$$

Und so könnten wir weitergehn, so lange, als successive Ableitungen von höheren Ordnungen fortfahren, zusammen zu verschwinden.

(9.) Daher können wir, im Besondern, wenn wir die skalar Form nehmen,

$$\text{XVI.} \ldots \varphi x = \frac{x^m}{2 \cdot 3 \ldots m},$$

welche augenscheinlich die Werthe ergiebt,

$$\text{XVII.} \ldots \varphi 0 = 0, \quad \varphi' 0 = 0,$$
$$\varphi'' 0 = 0, \ldots \varphi^{(m-1)} 0 = 0, \quad \varphi^{(m)} 0 = 1,$$

und wenn wir annehmen, dass die Function Fx von der Art ist, dass

$$\text{XVIII.} \ldots F0 = 0, \qquad F'0 = 0,$$
$$F''0 = 0, \ldots F^{(m-1)} 0 = 0,$$

während $F^{(m)}0$ irgend welchen endlichen Werth hat, dann die Grenzgleichung aufstellen:

$$\text{XIX.}\ldots \lim_{x=0}.(F.r:\varphi x) = F^{(m)}0;$$

in welcher die Function Fx, und der Werth $F^{(m)}0$, hier allgemein als Quaternionen angenommen sind; obwohl sie sich zufällig, in besonderen Fällen, von selbst (292) auf Vectoren, oder auf Skalare reduciren können.

342. Es ist jetzt leicht, die exponential Transformation 340, VII. zu erweitern; und zu zeigen, dass es einen Sinn hat, in welchem die überaus wichtige Formel,

$$\text{I.}\ldots \varepsilon^{d}fq = f(q + dq),$$

wenn

$$d^{2}q = 0,$$

welche, in der That, eine bekannte* Art des Ausdrucks der Taylor'schen Reihe, oder des Satzes von Taylor ist, allgemein für quaternion Functionen statt hat, und nicht allein für Functionen derselben von endlicher und vielgliedriger Form, mit ganzen und positiven Exponenten, für welche sie kürzlich, in 340, (6.), abgeleitet wurde. Denn es mögen fq und $f(q + dq)$ irgend zwei Zustände, oder Werthe irgend einer Function eines Quaternions bezeichnen, von denen keiner unendlich ist; und in Betreff der m ersten Differentiale,

$$\text{II.}\ldots dfq, \qquad d^{2}fq, \ldots d^{m}fq,$$

in welchen

$$dq = \text{const.},$$

möge angenommen werden, dass nicht eines unendlich sei, und dass das letzte von ihnen von null verschieden sein soll; während alle, die ihr vorhergehn, und die Functionen fq und $f(q + dq)$ selbst, zufällig verschwinden können, oder nicht

---

* Lacroix giebt, zum Beispiel, auf Seite 168 des ersten Bandes in seinem grösseren Werke über differential und integral Rechnung (Paris, 1810) den Satz von Taylor in der Form,

$$u' = u + \frac{du}{1} + \frac{d^{2}u}{1.2} + \frac{d^{3}u}{1.2.3} + \frac{d^{4}u}{1.2.3.4} + \text{u. s. w.};$$

wo u' den Werth bezeichnet, welchen die Function u annimmt, wenn die Variable x den beliebigen Zuwachs dx (l'accroissement quelconque dx) erfährt.

verschwinden können. Es mögen die ersten m Glieder der exponential Entwicklung des Symbols $(\varepsilon^d - 1)fq$ kurz durch $q_1, q_2, \ldots q_m$ bezeichnet werden; und es möge r_m — wie wir sagen können — den Rest der Reihe bezeichnen, oder die Correction, welche man der Summe der m Glieder hinzugefügt denken muss, um den genauen Werth der Differenz,

$$\text{III.} \ldots \Delta fq = f(q + \Delta q) - fq = f(q + dq) - fq,$$

zu erhalten; so dass wir in aller Strenge, nach den angewandten Bezeichnungen, die Gleichung haben,

$$\text{IV.} \ldots f(q + dq) = fq + q_1 + q_2 + \ldots + q_m + r_m,$$

wo

$$q_m = \frac{d^m fq}{2.3 \ldots m},$$

ist; das Glied q_m ist von null verschieden, aber nicht eins von den Gliedern ist unendlich, nach dem, was vorher angenommen worden ist. Denn wir werden den Satz beweisen, dass

$$\text{V.} \ldots \lim. (Tr_m : Tq_m) = 0,$$

wenn

$$\lim. Tdq = 0,$$

ist; oder in Worten, dass wir den Tensor des Restes in ein so kleines Verhältniss, wie wir wollen, zum Tensor des letzten übrigbleibenden Gliedes bringen können, dadurch dass wir den Tensor des Differentials (oder der Differenz) dq verringern, ohne seinen Versor zu ändern. Und dies sehr allgemeine Resultat, das sich — wie wir bald sehn werden — auf Functionen von mehreren Quaternionen ausdehnen lässt, entspricht in unserer Rechnung dem Taylor'schen Satze, auf den wir kürzlich [in 340, (7.)] hingewiesen haben; und er kann, wenn man auf ihn Bezug nehmen will, „Taylor's Satz für Quaternionen" genannt werden.

(1.) Schreibt man,

$$\text{VI.} \ldots Fx = f(q + xdq) - fq - xdfq - \frac{x^2}{2} d^2 fq$$

$$- \ldots - \frac{x^{m-1}}{2.3 \ldots (m-1)} d^{m-1} fq,$$

so hat man die folgenden höheren Ableitungen in Bezug auf x,

$$\text{VII.}\ldots\begin{cases} Fx = df(q+xdq) - dfq - xd^2fq - \ldots - \frac{x^{m-2}}{2.3\ldots(m-2)}\,d^{m-1}fq; \\ F'x = d^2f(q+xdq) - d^2fq - \ldots - \frac{x^{m-3}}{2.3\ldots(m-3)}\,d^{m-1}fq; \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ F^{(m-1)}x = d^{m-1}f(q+xdq) - d^{m-1}fq; \\ \text{und endlich,} \\ F^{(m)}x = d^m f(q+xdq); \end{cases}$$

denn, nach 327, VI., und 324, IV., ist

$$\text{VIII.}\ldots Df(q+xdq) = \lim_{n=\infty} n\,\{f(q+xdq+n^{-1}dq) - f(q+xdq)\} = df(q+xdq),$$

und ebenso ist,

$$\text{IX.}\ldots D^2f(q+xdq) = d^2f(q+xdq),$$

u. s. w.; das Zeichen für die Ableitung D bezieht sich auf die skalar Variable x, während d nur an q operirt, und hier nicht an x, noch an dq.

(2.) Wir haben daher, nach VI. und VII., die Werthe,

$$\text{XI.}\ldots \lim_{x=0}\left(Fx : \frac{x^m}{2.3\ldots m}\right) = d^m fq;$$

oder

$$\text{XII.}\ldots \lim_{x=0}(Fx : \psi x) = 1,$$

wenn

$$\psi x = \left(\frac{x^m d^m fq}{2.3\ldots m}\right).$$

(3.) Dagegen werden die beiden Functionen, Fx und ψx, dadurch, nach IV., aus $q_m + r_m$ und aus q_m gebildet, dass man dq mit xdq vertauscht; und anstatt somit dq durch einen abnehmenden Skalar, x, zu multipliciren, können wir seinen Tensor Tdq verringern, ohne seinen Versor Udq zu verändern. Wir können daher sagen, dass der Quotient $(q_m + r_m) : q_m$ der Einheit zustrebt, wenn dies geschieht, oder dass der andere Quotient $r_m : q_m$ der Null zustrebt, als ihren

Digitized by

Grenzwerthen; oder mit anderen Worten, die Grenzgleichung V. bleibt gültig.

(4.) Zum Beispiel, es möge die Function fq der Reciproke, q^{-1}, sein; dann ist (vergl. 339, III.) ihr m-tes Differential, wenn $dq = \text{const.}$,

$$\text{XIII.}\ldots d^m fq = d^m . q^{-1} = 2 . 3 \ldots m . q^{-1}(-r^m),$$

wenn

$$r = dq . q^{-1};$$

und es ist leicht, ohne Differentiale, zu beweisen, dass

$$\text{XIV.}\ldots (q + rq)^{-1} = q^{-1}(1 + r)^{-1}$$
$$= q^{-1}\{1 - r + r^2 - \ldots + (-r)^m + (-r)^{m+1}(1 + r)^{-1}\};$$

wir haben daher hier,

$$\text{XV.}\ldots q_m = q^{-1}(-r)^m, \quad r_m = -q_m r(1 + r)^{-1},$$
$$T(r_m : q_m) = Tr . T(1 + r)^{-1};$$

und dieser letzte Tensor nimmt in's Unendliche, zusammen mit Tdq, ab, während vom Quaternion q angenommen wird, dass er einen gewissen gegebnen Werth habe, der verschieden von null ist.

(5.) Im Allgemeinen kann das Resultat, welches in der Grenzgleichung XI. enthalten ist, wenn wir die folgende Gleichung aufstellen,

$$\text{XVI.}\ldots f(q + n^{-1}dq) = fq + n^{-1}dfq + \frac{n-2}{2} d^2 fq + \ldots$$
$$+ \frac{n^{1-m}}{2 . 3 \ldots (m-1)} d^{m-1} fq + \frac{n-m}{2 . 3 \ldots m} f_n^{(m)}(q, dq),$$

als eine Ausdehnung der Gleichung 325, V., durch Definition, und wenn wir annehmen, dass weder die Function fq selbst, noch irgend eines ihrer Differentiale bis zum Differential $d^{m-1}fq$ unendlich sein soll, dann durch die Formel ausgedrückt werden,

$$\text{XVII.}\ldots f_\infty^{(m)}(q, dq) = d^m fq;$$

sie fällt für den besonderen Werth $m = 1$ mit der Form 325, VIII. der Definition dfx zusammen, wenn wir den oberen Index fortlassen; dagegen spricht sie für höhere Werthe von m einen Satz aus: nämlich, wenn wir annehmen, dass $d^m fq$ weder verschwindet, noch unendlich wird, Taylor's Satz für Quaternionen.

343. Dieser überaus wichtige Satz kann auf Fälle angewendet werden, in denen ein Quaternion [wie in 327, (5.)], oder ein Vector (wie in 337), als Function eines Skalars ausgedrückt ist; auch auf transcendente Formen (333), wenn immer die Differentiationen bewirkt werden können; und auf diejenigen neuen Formen (334), welche aus den besonderen Operationen unserer Rechenart selbst hervorgehn. Einige wenige derartige Anwendungen mögen hier gegeben werden.

(1.) Nimmt man zuerst die transcendente und quaternion Function eines variablen Skalars,

$$\text{I.} \ldots q = ft = \alpha^t,$$

wo

$$T\alpha = 1, \qquad d\alpha = 0, \qquad dt = \text{const.},$$

so haben wir, nach 333, VIII., das allgemeine Glied,

$$\text{II.} \ldots q^m = \frac{d^m . \alpha^t}{2.3 \ldots m} = \frac{\alpha^t}{2.3 \ldots m} \left(\frac{\pi \alpha dt}{2}\right)^m = \frac{\alpha^t (x\alpha)^m}{2.3 \ldots m},$$

wenn

$$2x = \pi dt;$$

dividirt man daher $\varepsilon^d . \alpha^t$ durch α^t, so erhält man eine unendliche Reihe, welche sich als streng gültig und convergent erweist; nämlich [vergl. 308, (4.)],

$$\text{III.} \ldots \alpha^{dt} = 1 + x\alpha + \frac{(x\alpha)^2}{2} + \ldots + \frac{(x\alpha)^m}{2.3 \ldots m} + \ldots = \varepsilon^{x\alpha}$$

$$= \cos \frac{\pi dt}{2} + \alpha \sin \frac{\pi dt}{2}.$$

(2.) Streng gültige und endliche Entwicklungen erhält man für $S(q+dq)$, $V(q+dq)$, $K(q+dq)$ und $N(q+dq)$, wenn man mit ε^d an Sq, Vq, Kq und Nq operirt; zum Beispiel, wenn dq wieder constant ist, verschwinden die dritten und höheren Differentiale von Nq nach 334, XI., und wir haben,

$$\text{IV.} \ldots \varepsilon^d Nq = (1 + d + \tfrac{1}{2}d^2) Nq = Nq + 2S(Kq.dq) + Ndq$$
$$= N(q+dq);$$

ein Ausdruck für die Norm einer Summe, welcher mit 210, XX., und mit 200, VII. übereinstimmt.

Digitized by Google

(3.) Um den Tensor und Versor einer Summe nach gleichen Grundsätzen zu entwickeln, wollen wir wieder r für $dq:q$ schreiben, und die skalar und vector Theile dieses Quotienten mit s und v bezeichnen; so dass, nach 334, XIII. und XIV.,

$$\text{V.}\ldots s = Sr = S\frac{dq}{q} = \frac{d\,Tq}{Tq};$$

$$\text{VI.}\ldots v = Vr = V\frac{dq}{q} = \frac{d\,Uq}{Uq}.$$

(4.) Schreibt man daher, zur Abkürzung, wie bei einer bekannten Bezeichnungsweise von Factoriellen,

$$\text{VII.}\ldots [-1]^{\underline{m}} = (-1).(-2).(-3)\ldots.(-m),$$

so hat man, nach 342, XIII., wenn dq wieder als constant behandelt wird, die Gleichung,

$$\text{VIII.}\ldots d^m(s+v) = d^m r = [-1]^{\underline{m}} r^{m+1} = [-1]^{\underline{m}}(s+v)^{m+1},$$

deren skalar und vector Theile leicht zu sondern sind; zum Beispiel,

$$\text{IX.}\ldots ds = -S.(s+v)^2 = -(s^2+v^2);$$
$$dv = -V.(s+v)^2 = -2sv.$$

(5.) Wir haben auch, nach V. und VI.,

$$\text{X.}\ldots \frac{d^m Tq}{Tq} = (s+d)\frac{d^{m-1}Tq}{Tq} = \ldots = (s+d)^m 1;$$

$$\text{XI.}\ldots \frac{d^m Uq}{Uq} = (v+d)\frac{d^{m-1}Uq}{Uq} = \ldots = (v+d)^m 1;$$

die Bezeichnung ist von der Art, dass wir zum Beispiel, nach IX., haben

$$\text{XII.}\ldots (s+d)1 = s; \quad (s+d)^2 1 = (s+d)s = s^2 + ds = -v^2;$$

$$\text{XIII.}\ldots (v+d)1 = v; \quad (v+d)^2 1 = (v+d)v = v^2 + dv = v^2 - 2sv.$$

(6.) Die exponential Formel 342, I. ergiebt daher,

$$\text{XIV.}\ldots T(q+dq) = \varepsilon^d Tq = \varepsilon^{s+d}1 \,.\, Tq;$$
$$\text{XV.}\ldots U(q+dq) = \varepsilon^d Uq = \varepsilon^{v+d}1 \,.\, Uq;$$

oder, wenn man dividirt und einsetzt,

Digitized by Google

$$\text{XVI.}\ldots\ T(1+s+v) = \varepsilon^{s+d}1;$$
$$\text{XVII.}\ldots\ U(1+s+v) = \varepsilon^{v+d}1;$$

s und v sind hier ein Skalar und ein Vector, die ganz unabhängig von einander sind; deren Tensoren aber, in den Anwendungen, nicht zu gross genommen werden müssen, so dass die Reihen convergiren können.

(7.) Die symbolischen Ausdrücke, XVI. und XVII., für diese beiden Reihen können nach (4.) und (5.) entwickelt werden; so haben wir, wenn wir nur diejenigen Glieder niederschreiben, welche die zweite Dimension, in Bezug auf s und v, nicht übersteigen, nach XII. und XIII. die Entwicklung,

$$\text{XVIII.}\ldots\ T(1+s+v) = 1+s-\tfrac{1}{2}v^2+\ldots,$$
$$\text{XIX.}\ldots\ U(1+s+v) = 1+v+(\tfrac{1}{2}v^2-sv)+\ldots;$$

ihr Product ist demnach, bei demselben Grade von Annäherung, $1+s+v$.

(8.) Eine Function einer Summe zweier Quaternionen kann bisweilen ohne Differentiale entwickelt werden, durch Verfahren, welche einen mehr algebraischen Charakter haben; und wenn das der Fall ist, können wir das Resultat mit der Form vergleichen, welche durch Taylor's Reihe, wie sie in 342 den Quaternionen angepasst worden ist, gegeben wird, und können so die Werthe der aufeinanderfolgenden Differentiale der Function ableiten; zum Beispiel, wir können auf den Ausdruck 342, XIII. für $d^m.q^{-1}$ aus der Reihe 342, XIV. schliessen, für den Reciproken einer Summe.

(9.) Und wir können die letzten Entwicklungen, XVIII. und XIX., nicht nur dadurch verificiren, dass wir sie mit den mehr algebraischen Formen,

$$\text{XX.}\ldots\ T(1+s+v) = (1+s+v)^{\frac{1}{2}}\,(1+s-v)^{\frac{1}{2}},$$
$$\text{XXI.}\ldots\ U(1+s+v) = (1+s+v)^{\frac{1}{2}}\,(1+s-v)^{-\frac{1}{2}},$$

vergleichen, sondern wir können auch, wenn uns zum Beispiel die erste von ihnen gegeben wäre, wie sie nach gewöhnlichen Verfahren entwickelt sein mag, welche in diesem Falle anwendbar sind, ohne Differentiale,

$$\text{XXII.}\ldots\ T(q+q') = (1+s-\tfrac{1}{2}v^2..)\,Tq,$$

wo

$$s = Sq'q^{-1},$$

und

$$v = Vq'q^{-1},$$

dann auf die Werthe des ersten und zweiten Differentials des Tensors eines Quaternions schliessen, wie folgt:

$$\text{XXIII.}\ldots d\,Tq = S\frac{dq}{q}\,.\,Tq; \qquad d^2\,Tq = -\left(V\frac{dq}{q}\right)^2 Tq;$$

von denen der erste mit 334, XII. oder XIII. übereinstimmt, und der zweite aus ihm in der Form,

$$\text{XXIV.}\ldots d^2\,Tq = d\left(S\frac{dq}{q}\,.\,Tq\right) = \left[\left(S\frac{dq}{q}\right)^2 - S.\left(\frac{dq}{q}\right)^2\right] Tq,$$

abgeleitet werden kann.

(10.) Wenn wir eine Function $f(q+q')$ nur bis auf das Glied, oder bis auf die Glieder von der ersten Dimension in Bezug auf q' entwickeln können, so erhalten wir stets einen Ausdruck für das erste Differential dfq, wenn wir nur dq an Stelle von q' schreiben. Aber ich habe es nicht vorgezogen [vergl. 100, (14.)], diese Eigenschaft des Differentials einer Function als eine fundamentale zu betrachten, oder sie als die Definition von dfq anzunehmen; denn ich wollte die allgemeine Möglichkeit solcher Entwicklungen von Functionen von quaternion Summen nicht als eine Forderung voraussetzen, da es in vielen Fällen in der That schwierig ist, ihre Gesetze zu entdecken, oder auch nur ihr Vorhandensein nachzuweisen, ausser in einem gewissen Falle, wie ich ihn vorher auseinandergesetzt habe.

(11.) Diese Gelegenheit wollen wir wahrnehmen, zu bemerken, dass wir, nach VIII., und mit den letztgebrauchten Bezeichnungen, den symbolischen Ausdruck haben,

$$\text{XXV.}\ldots \varepsilon^{s+v+d}1 = 1 + s + v;$$

oder

$$\text{XXVI.}\ldots \varepsilon^{r+d}1 = 1 + r.$$

344. Mehrfache Differentiale stehn auch mit mehrfachen Differenzen durch Gesetze im Zusammenhang, die leicht aufzufinden sind, und über die ich hier nur einige wenige Worte zu sagen brauche.

Digitized by Google

(1.) Es lässt sich leicht, aus der Definition 324, IV. von dfq, beweisen, dass wenn dq constant ist,

$$\text{I.} \ldots d^2fq = \lim_{n=\infty} n^2 \{f(q + 2n^{-1}dq) - 2f(q + n^{-1}dq) + fq\};$$

und entsprechende Ausdrücke ergeben sich für Differentiale von höheren Ordnungen.

(2.) Wir können daher sagen (vergl. 340, X.), dass die aufeinanderfolgenden Differentiale,

$$\text{II.} \ldots dfq, \quad d^2fq, \quad d^3fq, \ldots \text{ wenn } d^2q = 0,$$

Grenzwerthe sind, denen die folgenden Vielfachen von aufeinanderfolgenden Differenzen,

$$\text{III.} \ldots n\Delta fq, \quad n^2\Delta^2fq, \quad n^3\Delta^3fq, \ldots$$

wenn

$$\Delta^2q = 0,$$

sämmtlich zu gleicher Zeit zustreben, wenn das Vielfache $n\Delta q$ entweder dem dq beständig gleich ist, oder wenigstens ihm gleich zu werden strebt, wenn die Zahl n unbegrenzt abnimmt.

(3.) Und danach könnten wir auf einem neuen Wege beweisen, dass wenn die Function $f(q + dq)$ in eine Reihe entwickelt werden kann, welche nach aufsteigenden und ganzen Dimensionen in Bezug auf dq fortschreitet, die Theile dieser Reihe, welche von diesen aufeinanderfolgenden Dimensionen sind, das Gesetz befolgen müssen, welches durch Taylor's Satz* ausgedrückt wird, wie er den Quaternionen angepasst ist (342).

345. Man kann sich leicht denken, dass die vorhergehenden Resultate sich auf mehrfache Differentiationen von Functionen von mehreren Quaternionen ausdehnen lassen (vergl. 338); und dass somit daraus, in jedem solchen Falle, ein System von mehrfachen Differentialen, totalen und partiellen, entsteht: und auch ein System von partiellen Ableitungen von höheren Ordnungen als der ersten, wenn ein Quaternion, oder ein Vector,

* Einige Bemerkungen über die Anpassung und den Beweis dieses wichtigen Satzes finden sich in den Vorlesungen, Seite 589, u. s. w.

Digitized by Google

als eine Function von mehreren Skalaren angesehn wird (vergl. 337).

(1.) Der allgemeine Ausdruck für das zweite Gesammtdifferential,

$$\text{I.} \ldots d^2 Q = d^2 F(q, r, \ldots),$$

umfasst $d^2 q$, $d^2 r, \ldots$; aber es ist oft angemessen anzunehmen, dass alle diese zweiten Differentiale verschwinden, oder dass die ersten Differentiale dq, $dr, \ldots$ constant sind; und dann wird $d^m Q$, oder $d^m F(q, r, \ldots)$ eine rationale, ganze und homogene Function der ersten Differentiale dq, $dr, \ldots$, von der m-ten Dimension, die (vergl. 329, III.) so bezeichnet werden kann,

$$\text{II.} \ldots d^m Q = (d_q + d_r + \ldots)^m Q;$$

oder kurz,

$$\text{III.} \ldots d^m = (d_q + d_r + \ldots)^m;$$

und bei der Entwicklung dieser symbolischen Potenz kann der Satz der Algebra für Polynome angewandt werden: denn wir haben allgemein für Quaternionen, wie in der gewöhnlichen Rechnung,

$$\text{IV.} \ldots d_r d_q = d_q d_r.$$

(2.) Zum Beispiel, wenn wir dq und dr durch q' und r' bezeichnen, und annehmen, dass

$$\text{V.} \ldots Q = rqr,$$

so ist

$$\text{VI.} \ldots d_q Q = rq'r;$$
$$\text{VII.} \ldots d_r Q = r'qr + rqr';$$

und

$$\text{VIII.} \ldots d_r d_q Q = d_q d_r Q = r'q'r + rq'r'.$$

Und im Allgemeinen ergiebt jedes der beiden gleichgesetzten Symbole IV., dadurch dass man mit ihm an $F(q, r)$ operirt, den Grenzwerth der anderen Function, oder des Productes (vergl. 344, I.),

$$\text{IX.} \ldots nn' \{F(q + n^{-1} dq, r + n'^{-1} dr) - F(q, r + n'^{-1} dr) - F(q + n^{-1} dq, r) + F(q, r)\},$$

in dem angenommen ist, dass die Zahlen n und n' der Unendlichkeit zustreben.

(3.) Wir können auch, für Functionen von mehreren Quaternionen, schreiben:

$$\text{X.}\ldots\ Q + \Delta Q = F(q + dq,\ r + dr, \ldots) = \varepsilon^{d_q + d_r + \ldots} F(q, r);$$

oder kurz,

$$\text{XI.}\ldots\ 1 + \Delta = \varepsilon^{d_q + d_r + \ldots} = \varepsilon^{d};$$

mit Deutungen und Transformationen, welche denjenigen entsprechen, denen wir schon für Functionen eines einzigen Quaternions begegnet sind.

(4.) Wenn wir endlich, als Beispiel der mehrfachen und partiellen Ableitung, den vector Ausdruck 308, XVIII. wiederaufnehmen (vergl. 315, XII. und XIII.), nämlich den Ausdruck,

$$\text{XII.}\ldots\ \varrho = r k^t j^s k j^{-s} k^{-t},$$

von dem wir sahn, dass er den Vector irgend eines Punktes im Raume darstellt, so können wir bemerken, dass er, ohne Trigonometrie, nach dem in 308, (11.) erwähnten Satze, und nach den Nebenartikeln zu 315, nicht nur die Form ergiebt,

$$\text{XIII.}\ldots\ \varrho = r k^t j^{2s} k^{1-t},$$

wie in 308, XIX., sondern auch, wenn α irgend ein Einheitsvector ist,

$$\text{XIV.}\ldots\ \varrho = r k^{t+1} j^{-2s} k^{-t} = r k^t (k\,S.\alpha^{2s} + i\,S.\alpha^{2s-1}).k^{-t};$$

und danach ist,

$$\text{XV.}\ldots\ \varrho = r\,V.k^{2s+1} + r k^{2t}\,V.i^{2s},$$

wie in 315, XII.

(5.) Wir haben daher die folgenden neuen Ausdrücke (vergleiche die Nebenartikel zu 337) für die beiden partiellen Ableitungen erster Ordnung des variablen Vectors ϱ, genommen mit Bezug auf s und t:

$$\text{XVI.}\ldots\ D_s \varrho = \pi r k^t j^s i j^{-s} k^{-t} = -\pi \varrho k^t j k^{-t},$$

und es lässt sich verificiren, dass

$$\text{XVII.}\ldots\ \varrho D_s \varrho = \pi r^2 . k^t j^s k j^{-s} k^{-t} . k^t j^s i j^{-s} k^{-t} = \pi r^2 k^t j k^{-t};$$

und

Digitized by Google

$$\text{XVIII.}\ldots D_t\varrho = \pi r k^{2t} V.j^{2s} = \pi r k^{2t} j\, S.\alpha^{2s-1} = r^{-1}\varrho D_s\varrho\,.\,S\alpha^{2s-1};$$

und danach ist

$$\text{XIX.}\ldots \varrho D_t\varrho = -\,r D_s\varrho\,.\,S.\alpha^{2s-1},$$

und

$$\text{XX.}\ldots D_s\varrho\,.\,D_t\varrho = \pi^2 r\varrho\, S.\alpha^{2s-1};$$

während

$$\text{XXI.}\ldots D_r\varrho = r^{-1}\varrho = k^t j^s k j^{-s} k^{-t},$$

wie in 337, XXV.; so dass wir das folgende ternäre Product der abgeleiteten Vectoren erster Ordnung erhalten,

$$\text{XXII.}\ldots D_r\varrho\,.\,D_s\varrho\,.\,D_t\varrho = \pi^2\varrho^2 S.\alpha^{2s-1} = \pi\varrho^2 D_s S.\alpha^{2s};$$

der skalar Charakter dieses Productes hängt [vergl. 299, (9.)] von dem Umstande ab, dass die in dieser Weise mit einander multiplicirten Vectoren ein rechtwinkliges System bilden [337, (10.)].

(6.) Es ist danach leicht, für die sechs partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von ϱ, genommen in Bezug auf dieselben drei skalar Variabeln r, s, t, die Ausdrücke zu folgern:

$$\text{XXIII.}\ldots D_r^2\varrho = 0;\quad D_r D_s\varrho = D_s D_r\varrho = r^{-1} D_s\varrho;\quad D_r D_t\varrho = D_t D_r\varrho = r^{-1} D_t\varrho;$$

$$\text{XXIV.}\ldots D_s^2\varrho = -\,\pi^2\varrho;\quad D_s D_t\varrho = D_t D_s\varrho = \pi^2 r k^{2t} V.j^{2s+1};\quad D_t^2\varrho = -\,\pi^2 r k^{2t} V.i^{2s}.$$

(7.) Die drei partiellen Differentiale erster Ordnung, desselben variabeln Vectors ϱ, sind die folgenden:

$$\text{XXV.}\ldots d_r\varrho = r^{-1}\varrho\, dr;\quad d_s\varrho = D_s\varrho\,.\,ds;\quad d_t\varrho = D_t\varrho\,.\,dt;$$

und wir erhalten die Producte,

$$\text{XXVI.}\ldots d_s\varrho\,.\,d_t\varrho = -\,\pi r\varrho\, dS.\alpha^{2s}.dt;$$

$$\text{XXVII.}\ldots d_r\varrho\,.\,d_s\varrho\,.\,d_t\varrho = \pi r^2 dr\,.\,dS.\alpha^{2s}.dt.$$

(8.) Diese differential Vectoren, $d_r\varrho$, $d_s\varrho$, $d_t\varrho$, sind in unserer Theorie im Allgemeinen endlich; $d_r\varrho$, ebenso wie $D_r\varrho$, ist eine Linie in der Richtung von ϱ, oder in der Richtung des Radius der Kugel um den Anfangspunkt, wenigstens wenn dr, wie r, positiv ist; während $d_s\varrho$, ebenso wie $D_s\varrho$, eine Tangente zu dem Meridian der Kugeloberfläche ist, für welche r und t constant sind [vergl. 100, (9.)]; aber $d_t\varrho$, wie $D_t\varrho$, ist dagegen eine Tangente an den kleinen Kreis auf derselben Kugel, für welche r und s constant sind, oder eine Parallele zu ihr.

(9.) Behandelt man nur den Radius r als constant, und schreibt man $\varrho = OP$, so wird die Sehne PQ, wenn man vom Punkte P, oder (s, t), zu einem anderen Punkte Q, oder $(s + \Delta s, t)$ auf demselben Meridian übergeht, durch die endliche Differenz, $\Delta_s\varrho$, dargestellt; und ebenso wird die neue Sehne PR, wenn wir von P zu einem Punkte R übergehn, oder zu $(s, t + \Delta t)$ auf demselben Parallel, durch die andere partielle und endliche Differenz, $\Delta_t\varrho$, dargestellt; während der Punkt $(s + \Delta s, t + \Delta t)$ durch S bezeichnet werden kann.

(10.) Wenn man sich jetzt die beiden Punkte Q und R dem P genähert denkt, und wenn man sie ihm sehr nahe kommen lässt, so fallen die Sehnen PQ und PR sehr nahe mit den beiden entsprechenden Bogen des Meridians und des Parallels zusammen; oder mit den Tangenten zu denselben beiden Kreisen in P, welche so gezeichnet werden, dass sie dieselbe Längen haben, wie diese beiden Bogen: oder fallen endlich mit den tangentialen differential Vectoren, $d_s\varrho$ und $d_t\varrho$, zusammen, wenn wir voraussetzen, wie wir es können (vergl. 322), dass die beiden willkürlichen und skalar Differentiale, ds und dt, so angenommen werden, dass sie beständig gleich den beiden Differenzen, Δs und Δt, sind und folglich mit ihnen abnehmen.

(11.) Mögen die Differentiale ds und dt gross oder klein sein, das Product $d_s\varrho \,.\, d_t\varrho$, wie das Product $D_s\varrho \,.\, D_t\varrho$, stellt in aller Strenge einen normalen Vector dar, wie in XXVI. und in XX.; dessen Länge zur Längeneinheit (vergl. 281) in demselben Verhältniss steht, in welchem das Rechteck aus den beiden senkrechten Tangenten, $d_s\varrho$ und $d_t\varrho$, der Kugel

Digitized by Google

zur Flächeneinheit steht. Daher können wir, bei den letzten Annahmen (10.), das Product $d_s\varrho \,.\, d_t\varrho$ so auffassen, als ob es, mit beständig und unbegrenzt zunehmender Genauigkeit, gleichfalls nach Art eines Verhältnisses das darstellt, was wir das Element der Kugeloberfläche mit Richtung, $PQRS$ nennen können, welches wir somit durch eine Normale in P, dargestellt, oder construirt, denken; und der Tensor desselben Productes, nämlich, nach XXVI.,

$$\text{XXVIII.}\ldots\ T(d_s\varrho \,.\, d_t\varrho) = -\pi r^2 dS \,.\, \alpha^{2s} \,.\, dt,$$

in dem das negative Vorzeichen beibehalten ist, da $S.\alpha^{2s}$ von $+1$ bis -1 abnimmt, während s von 0 bis 1 anwächst, ist in demselben Sinne ein Ausdruck für das Element der Kugeloberfläche ohne Richtung, wie wir es im Gegensatz zum Vorigen nennen können, oder für das Element, rein in Bezug auf seine Grösse in Betracht gezogen, und nicht mit Bezug auf seine Richtung.

(12.) Integrirt man daher den letzten differential Ausdruck XXVIII., von $t=0$ bis $t=2$, und von $s=s_0$ bis $s=s_1$, das heisst, nimmt man den Grenzwerth der Summe aller der Elemente $PQRS$ zwischen diesen Grenzwerthen, so findet man die folgende Gleichung:

$$\text{XXIX.}\ldots\ \text{Fläche der Kugelzone} = 2\pi r^2 S(\alpha^{2s_0} - \alpha^{2s_1});$$

und daher

$$\text{XXX.}\ldots\ \text{Fläche der Kugelcalotte}\ (s) = 2\pi r^2(1 - S.\alpha^{2s}) = 4\pi r^2 (TV.\alpha^s)^2;$$

und endlich,

$$\text{XXXI.}\ldots\ \text{Fläche der Kugel} = 4\pi r^2,$$

wie gewöhnlich.

(13.) In derselben Weise stellt der Ausdruck XXVII., wenn sein Vorzeichen verändert wird, wegen der Abnahme von $S.\alpha^{2s}$, wie in (11.), das Volumenelement dar; und somit erhalten wir, wenn man von $r=r_0$ bis $r=r_1$ integrirt, und von $s=0$ bis $s=1$, und von $t=0$ bis $t=2$, von Neuem die bekannten Werthe:

$$\text{XXXII.}\ldots\ \text{Volumen der Kugelschale} = \tfrac{4}{3}\pi(r_1^3 - r_0^3);$$

und

$$\text{XXXIII. . Volumen der Kugel } (r) = \frac{4\pi r^3}{3},$$

wie gewöhnlich.

(14.) Das sind indessen nur Beispiele der — wie wir sie nennen können — skalar Integration, wenn auch in Verbindung mit quaternion Formen; es ist aber charakteristischer für unsere Rechnungsart, wenn wir sie kurz anwenden, das vector Integral zu bilden, oder den Grenzwerth der vector Summe der Elemente (11.) eines Theils einer Kugeloberfläche mit Richtung: ein Problem, welches der Aufgabe der Hydrostatik entspricht, die Resultante der Druckkräfte auf jene Oberfläche zu berechnen, wenn jeder Druck die Richtung der Normale hat, und eine Grösse, welche dem Flächenelement proportional ist.

(15.) Zu diesem Zweck können wir den Ausdruck XXVI. anwenden, nachdem sein Vorzeichen geändert ist, um eine nach innen gerichtete Normale zu bezeichnen, oder einen Druck, der von aussen wirkt; und wenn wir daher für ϱ seinen Werth XV. einsetzen, und beachten dass

$$\text{XXXIV. . . } \int_0^2 k^{2t} dt = 0,$$

da

$$k^2 = -1,$$

und daran denken, dass

$$V.k^{2s+1} = kS.\alpha^{2s},$$

so leiten sich leicht die Ausdrücke ab:

XXXV. . . Summe der Elemente der elementar Zone mit Richtung

$$= \pi r^2 k d.(S.\alpha^{2s})^2;$$

XXXVI. . . Summe der Elemente der Kugelkalotte (s) mit Richtung

$$= -\pi r^2 k[1-(S.\alpha^{2s})^2] = \pi r^2 k(V.\alpha^{2s})^2$$
$$= \pi^{-1} k(D_t\varrho)^2 = \pi k(Vk\varrho)^2.$$

(16.) Aber der Radius der ebnen und kreisförmigen Basis des entsprechenden sphärischen Segments ist $TVk\varrho$, so dass seine Fläche an Grösse $= -\pi(Vk\varrho)^2$ ist; und die gemeinsame Richtung aller nach innen gerichteten Normalen ist diejenige von $+k$; wenn wir daher wieder die Elemente mit Richtung

Digitized by Google

durch Normalen darstellen, welche folglich nach innen zu ziehn sind, so haben wir den neuen Ausdruck:

XXXVII. . . Summe der Elemente der sphärischen Basis mit Richtung $= -\pi h(Vk\varrho)^2$;

vergleicht man ihn mit XXXVI., so gelangt man zur Formel,

XXXVIII. . . Summe der Elemente des sphärischen Abschnitts mit Richtung = Null;

und dies Resultat kann allgemein erweitert werden, und entspricht augenscheinlich einem bekannten Satze über Gleichgewicht in der Hydrostatik.

(17.) Diese wenigen Beispiele mögen dazu dienen, schon jetzt zu zeigen, dass Differentiale von Quaternionen (oder von Vectoren) auf mannigfache geometrische und physikalische Fragen angewandt werden können; und dass es, wenn man sie so anwendet, erlaubt ist, sie als klein zu behandeln, wenn irgend ein Vortheil dadurch gewonnen wird, wie es bei Fällen mit Integration stets statt hat. Aber wir müssen jetzt zu einer wichtigen Untersuchung anderer Art übergehn, mit der Differentiale — wie sich zeigen wird — nur eine Art mittelbaren Zusammenhangs haben, aber auf die sie hinführen.

Sechster Abschnitt.

Ueber die Differentiation unentwickelter Functionen von Quaternionen; und über die allgemeine Umkehrung einer linearen Function eines Vectors, oder eines Quaternions: und einige damit im Zusammenhang stehende Untersuchungen.

346. Wir sahn, als wir die Quadratwurzel eines Quaternions differentiirten [332, (5.) und (6.)], dass es zu diesem Zweck nöthig war, eine lineare Gleichung* aufzulösen, oder eine Gleichung vom ersten Grade; nämlich die Gleichung,

$$\text{I.} \ldots r r' + r' r = q',$$

* Vergleiche die Anmerkung zu Seite 595.

in der r und q' zwei gegebne Quaternionen, $q^{\frac{1}{2}}$ und dq, darstellten, während r' einen gesuchten Quaternion darstellte, nämlich dr oder $d.q^{\frac{1}{2}}$. Und allgemein sehn wir, aus der linearen oder distributiven Form (327) des quaternion Differentials

$$\text{II.}\ldots dQ = dfq = f(q, dq),$$

irgend einer gegebnen und entwickelten Function fq, wenn man sie als abhängig vom Differential dq der quaternion Variabeln q ansieht, dass die Rückkehr vom ersteren Differential zum letzteren, das heisst von dQ nach dq, oder die Differentiation der umgekehrten oder impliciten Function $f^{-1}Q$, zu ihrer Ausführung die Auflösung einer Gleichung vom ersten Grade erfordert: oder — wie wir sagen können — die Umkehrung einer linearen Function eines Quaternions. Wir werden daher hier darauf hingeführt, das allgemeine Problem in Betracht zu ziehn; und ihm werden wir demgemäss, und Forschungen, die mit ihm im Zusammenhang stehn, diesen Abschnitt widmen, wobei wir indessen jetzt die besondere Betrachtung von Differentialen, die wir vorher erwähnten, ausser Acht lassen werden, oder sie nur als Quaternionen behandeln werden, welche gesucht oder gegeben sind, und deren Beziehungen zu einander studirt werden sollen.

347. Wie auch immer die besondere Form der gegebnen linearen oder distributiven Function, fq, sein mag, wir können sie stets zerlegen, wie folgt:

$$\begin{aligned}\text{I.}\ldots fq &= f(Sq + Vq) = fSq + fVq \\ &= Sq.f1 + fVq;\end{aligned}$$

nimmt man dann Skalare und Vectoren besonders, und operirt mit S und V an der vorgeschlagenen linearen Gleichung,

$$\text{II.}\ldots fq = r,$$

in der r ein gegebener Quaternion ist, und q ein gesuchter, so kann man im Allgemeinen Sq eliminiren, und somit die Aufgabe auf die Auflösung einer linearen und vector Gleichung zurückführen, von der Form,

$$\text{III.}\ldots \varphi\varrho = \sigma;$$

Digitized by Google

hier ist σ ein gegebner Vector, dagegen $\varrho\,(=V\!q)$ ein gesuchter, und φ wird gebraucht, als das charakteristische Zeichen für eine gegebne lineare und vector Function eines Vectors, eine Function, welche wir durchweg als eine reelle annehmen wollen, oder als eine, welche keine imaginären Constanten in ihrer Zusammensetzung umfasst. Aber jeder solcher Function $\varphi\varrho$ entspricht dabei stets eine, wie wir sie nennen wollen, conjugirte lineare und vector Functon $\varphi'\varrho$, welche mit ihr durch die folgende Gleichung der Conjugation verbunden ist,

$$\text{IV.}\ldots\ S\lambda\varphi\varrho = S\varrho\varphi'\lambda;$$

wo λ und ϱ irgend zwei Vectoren sind. Nimmt man daher an, wie wir es können, dass μ und ν zwei Hülfsvectoren sind, welche so gewählt sein, dass sie der Gleichung genügen,

$$\text{V.}\ldots\ V\mu\nu = \sigma,$$

und daher auch den Gleichungen,

$$\text{VI.}\ldots\ \begin{aligned} S\lambda\sigma &= S\lambda\mu\nu,\\ S\mu\sigma &= 0,\\ S\nu\sigma &= 0, \end{aligned}$$

in denen λ ein dritter beliebiger Hülfsvector ist, so können wir (vergl. 312) die eine vector Gleichung III. durch die drei skalar Gleichungen ersetzen,

$$\text{VII.}\ldots\ \begin{aligned} S\varrho\varphi'\lambda &= S\lambda\mu\nu,\\ S\varrho\varphi'\mu &= 0,\\ S\varrho\varphi'\nu &= 0. \end{aligned}$$

Und sie ergeben, nach Sätzen, von denen ich annehmen darf, dass sie dem Leser schon vertraut* sind, den Ausdruck,

$$\text{VIII.}\ldots\ m\varrho = \psi\sigma,$$

oder

$$\text{IX.}\ldots\ \varrho = \varphi^{-1}\sigma = m^{-1}\psi\sigma,$$

wenn m eine vector Constante ist, und ψ eine lineare und

---

* Der Leser möchte es, an dieser Stelle, vielleicht von Nutzen finden, den sechsten Abschnitt des vorhergehenden Kapitels wieder zu lesen; oder wenigstens die vorigen Nebenartikel zu Art. 294, deren vertraute Kenntniss in diesem Abschnitt angenommen ist.

vector Hülfsfunction, deren Werth und Form durch die beiden folgenden Gleichungen bestimmt werden:

$$\text{X.}\ldots m S\lambda\mu\nu = S(\varphi'\lambda.\varphi'\mu.\varphi'\nu);$$
$$\text{XI.}\ldots \psi(V\mu\nu) = V(\varphi'\mu.\varphi'\nu);$$

oder kurz,

$$\text{X}'\ldots m S\lambda\mu\nu = S.\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu,$$

und

$$\text{XI}'\ldots \psi V\mu\nu = V.\varphi'\mu\varphi'\nu.$$

Und somit kann das vorgeschlagene Problem der Umkehrung der linearen und vector Function φ als in seiner ganzen Allgemeinheit gelöst angesehn werden; denn es ist stets möglich, die zweiten Glieder der Gleichungen X. und XI. so zu gestalten, dass sie die in den ersten Gliedern dieser Gleichungen angezeigten Formen annehmen.

(1.) Zum Beispiel, wenn wir irgend drei diplanare Vectoren, α, α', α'', annehmen, und aus ihnen drei weitere Vectoren β_0, β'_0, β''_0, durch die Gleichungen ableiten,

$$\text{XII.}\ldots \beta_0 S\alpha\alpha'\alpha'' = V\alpha'\alpha'',$$
$$\beta'_0 S\alpha\alpha'\alpha'' = V\alpha''\alpha,$$
$$\beta''_0 S\alpha\alpha'\alpha'' = V\alpha\alpha',$$

so kann irgend ein Vector ρ, nach 294, XV., wie folgt, ausgedrückt werden,

$$\text{XIII.}\ldots \rho = \beta_0 S\alpha\rho + \beta'_0 S\alpha'\rho + \beta''_0 S\alpha''\rho;$$

wenn wir daher schreiben,

$$\text{XIV.}\ldots \beta = \varphi\beta_0,$$
$$\beta' = \varphi\beta'_0,$$
$$\beta'' = \varphi\beta''_0,$$

so erhalten wir den folgenden allgemeinen Ausdruck, oder die dreigliedrige Grundform, für eine lineare und vector Function eines Vectors,

$$\text{XV.}\ldots \varphi\rho = \beta S\alpha\rho + \beta' S\alpha'\rho + \beta'' S\alpha''\rho;$$

er enthält, wie wir sehn, drei vector Constanten, β, β', β'', oder neun skalar Constanten, wie

$$\text{XVI.}\ldots S\alpha\beta,\quad S\alpha'\beta,\quad S\alpha''\beta;$$
$$S\alpha\beta',\quad S\alpha'\beta',\quad S\alpha''\beta';$$
$$S\alpha\beta'',\quad S\alpha'\beta'',\quad S\alpha''\beta'';$$

Digitized by Google

sie können, und werden im Allgemeinen, sämmtlich variiren, wenn man von einer linearen und vector Function $\varphi\varrho$ zu einer andern derartigen Function übergeht; aber sie werden sämmtlich als reell, und gegeben, für jede besondere Form dieser Function angenommen.

(2.) Geht man zu der, wie wir sie genannt haben, conjugirten linearen Function $\varphi'\varrho$ über, so ergiebt die Form XV., nach IV., den Ausdruck,

$$\text{XVII.}\ldots\ \varphi'\varrho = \alpha S\beta\varrho + \alpha' S\beta'\varrho + \alpha'' S\beta''\varrho;$$

aber

$$\begin{aligned} V.(\alpha S\beta\mu + \alpha' S\beta'\mu)\,(\alpha S\beta\nu + \alpha' S\beta'\nu) \\ = V\alpha\alpha' S.\beta'(\nu S\beta\mu - \mu S\beta\nu) \\ = V\alpha\alpha' S.\beta' V.\beta V\mu\nu \\ = V\alpha\alpha' S.\beta'\beta V\mu\nu; \end{aligned}$$

daher folgt die Transformation XI. daraus, und ergiebt,

$$\begin{aligned} \text{XVIII.}\ldots\ \psi\varrho = {} & V\alpha'\alpha'' S\beta''\beta'\varrho + V\alpha''\alpha S\beta\beta''\varrho \\ & + V\alpha\alpha' S\beta'\beta\varrho, \end{aligned}$$

als Ausdruck für die Hülfsfunction ψ; die Conjugirte zu ihr kann so geschrieben werden,

$$\begin{aligned} \text{XIX.}\ldots\ \psi'\varrho = {} & V\beta'\beta'' S\alpha''\alpha'\varrho + V\beta''\beta S\alpha\alpha''\varrho \\ & + V\beta\beta' S\alpha'\alpha\varrho; \end{aligned}$$

so dass ψ mit ψ' vertauscht wird, wenn φ mit φ' vertauscht wird, dadurch dass man jedes der drei Alphas mit dem entsprechenden Beta austauscht.

(3.) Wenn man schreibt, wie wir es in dieser ganzen Untersuchung vorschlagen zu thun,

$$\begin{aligned} \text{XX.}\ldots\ \lambda' &= V\mu\nu, \\ \mu' &= V\nu\lambda, \\ \nu' &= V\lambda\mu, \end{aligned}$$

so werden die Formeln XI. und X.,

$$\text{XXI.}\ldots\ \psi\lambda' = V.\varphi'\mu\varphi'\nu,$$

und

$$\text{XXII.}\ldots\ mS\lambda\lambda' = S.\varphi'\lambda\psi\lambda',$$

wobei ich dieselbe Art abkürzender Bezeichnung gebrauche,

wie in XI′.; und da der Coefficient von $S\alpha\alpha'\alpha''$ in diesem letzten Ausdruck XXII., nach XVII., XVIII., ist,

$$S\beta\lambda S\beta''\beta'\lambda' + S\beta'\lambda S\beta\beta''\lambda' + S\beta''\lambda S\beta'\beta\lambda' = S\beta''\beta'\beta S\lambda\lambda',$$

so glückt die Division durch $S\lambda\lambda'$, oder durch $S\lambda\mu\nu$, und wir finden den Ausdruck,

$$\text{XXIII.} \ldots m = S\alpha\alpha'\alpha'' S\beta''\beta'\beta;$$

er kann auch so geschrieben werden,

$$\text{XXIII′.} \ldots m = S\beta\beta'\beta'' S\alpha''\alpha'\alpha,$$

so dass sich m nicht ändert, wenn wir von φ zu φ' übergehn, und deshalb können wir auch schreiben,

$$\text{XXIV.} \ldots m S\lambda\lambda' = S.\varphi\lambda\psi'\lambda',$$

oder

$$\text{XXIV′.} \ldots m S\lambda\mu\nu = S.\varphi\lambda\varphi\mu\varphi\nu;$$

denn, nach (2.), können wir aus XI. den conjugirten Ausdruck ableiten,

$$\text{XXV.} \ldots \psi'\lambda' = V.\varphi\mu\varphi\nu.$$

(4.) Wir sollten daher finden, dass die lineare Gleichung,

$$\text{XXVI.} \ldots \sigma = \varphi\varrho = \beta S\alpha\varrho + \beta' S\alpha'\varrho + \beta'' S\alpha''\varrho,$$

eine Lösung hat, welche durch die Formel ausgedrückt wird (vergl. VIII.),

$$\text{XXVII.} \ldots \varrho S\alpha\alpha'\alpha'' S\beta''\beta'\beta = V\alpha'\alpha'' S\beta''\beta'\sigma + V\alpha''\alpha S\beta\beta''\sigma + V\alpha\alpha' S\beta'\beta\sigma;$$

und demgemäss erhalten wir, wenn wir an dem Ausdruck XXVI. für σ mit den drei Symbolen,

$$\text{XXVIII.} \ldots S.\beta''\beta', \quad S.\beta\beta'', \quad S.\beta'\beta,$$

operiren, die drei skalar Gleichungen,

$$\text{XXIX.} \ldots S\beta''\beta'\sigma = S\beta''\beta'\beta S\alpha\varrho, \text{ u. s. w.,}$$

aus denen die Gleichung XXVII. unmittelbar folgt, ohne die Hülfsvectoren λ, μ, ν irgendwie einzuführen, wenn sie auch in der allgemeinen Theorie von Nutzen sind.

(5.) Umgekehrt, wenn die Gleichung XXVII. gegeben

Digitized by Google

wäre, und der Werth von σ gesucht, könnten wir mit den drei Symbolen,

$$\text{XXX.}\ldots\ S.\alpha,\quad S.\beta,\quad S.\gamma,$$

operiren, und so die drei skalar Gleichungen XXIX. erhalten, aus denen der Ausdruck XXVI. für σ folgen würde.

(6.) Es zeigt sich als eine nützliche Beschränkung bei Formeln von dieser Art, jedes Beta, in der von uns in (1.) genannten Grundform von $\varphi\varrho$, als von der ersten Dimension anzusehn; denn dann können wir sagen, dass φ und φ' auch von der ersten Dimension sind, aber ψ und ψ' von der zweiten, und m von der dritten; und jede Formel, in welche diese Symbole eingehn, wird somit homogen sein: α, α', α'', und λ, μ, ν, ϱ, werden nicht gezählt, bei dieser Art Dimensionen abzuschätzen, dagegen wird σ als von der ersten Dimension behandelt, wenn es als Darstellung von $\varphi\varrho$ genommen wird.

(7.) Und obwohl wir gesehn haben, dass die dreigliedrige Form XV. hinreichend allgemein ist, so hat es doch keine Schwierigkeit, zu beweisen, wenn wir vorziehn, die entwickeltere Form zu nehmen,

$$\text{XXXI.}\ldots\ \varphi\varrho = \Sigma\beta S\alpha\varrho,$$

die ergiebt,

$$\text{XXXII.}\ldots\ \varphi'\varrho = \Sigma\alpha S\beta\varrho,$$

in der die Summe Σ jetzt irgend welche Anzahl Glieder von $\varphi\varrho$, wie $\beta S\alpha\varrho$, $\beta' S\alpha'\varrho$, u. s. w., umfasst, dass die Gleichungen VIII. und IX. befriedigt werden, wenn wir schreiben,

$$\text{XXXIII.}\ldots\ \psi\varrho = \Sigma V\alpha\alpha' S\beta'\beta\varrho,$$

und

$$\text{XXXIV.}\ldots\ \psi'\varrho = \Sigma V\beta\beta' S\alpha'\alpha\varrho,$$

sowie

$$\text{XXXV.}\ldots\ m = \Sigma S\alpha\alpha'\alpha'' S\beta''\beta'\beta$$
$$= \Sigma S\beta\beta'\beta'' S\alpha''\alpha'\alpha.$$

(8.) Die wichtige Eigenschaft (2.), dass sich die Hülfsfunction ψ in die zu ihr conjugirte ψ' verwandelt, wenn φ mit φ' vertauscht wird, kann bewiesen werden, ohne dass man irgendwie Bezug auf die Form $\Sigma\beta S\alpha\varrho$ von $\varphi\varrho$ nimmt, vermittelst der Definitionen IV. und XI. von φ' und ψ, wie

folgt. Welche vier Vectoren μ, ν, μ_1 und ν_1 auch sein mögen, wenn wir schreiben,

$$\text{XXXVI.} \ldots \lambda'_1 = V\mu_1\nu_1,$$

und

$$\text{XXXVII.} \ldots \psi' V\mu\nu = V.\varphi\mu\varphi\nu,$$

wobei wir hier die letzte Gleichung als eine Definition der Function ψ' annehmen, so können wir dazu übergehn, zu beweisen, dass sie conjugirt zu ψ ist, indem wir beachten, dass wir die Transformationen haben,

$$\begin{aligned}\text{XXXVIII.} \ldots S\lambda'_1\psi'\lambda' &= S(V\mu_1\nu_1.V.\varphi\mu\varphi\nu)\\ &= S.\mu_1(V.\nu_1 V.\varphi\mu\varphi\nu)\\ &= S\mu_1\varphi\nu\,.\,S\nu_1\varphi\mu - S\mu_1\varphi\mu.S\nu_1\varphi\nu\\ &= S\mu\varphi'\nu_1\,.\,S\nu\varphi'\mu_1 - S\mu\varphi'\mu_1.S\nu\varphi'\nu_1\\ &= S.\mu(V.\nu V.\varphi'\mu_1\varphi'\nu_1)\\ &= S(V\mu\nu.V.\varphi'\mu_1\varphi'\nu_1) = S\lambda'\psi\lambda'_1;\end{aligned}$$

und sie stellen die fragliche Beziehung zwischen ψ und ψ' her.

(9.) Und die nicht weniger wichtige Eigenschaft (3.), dass m ungeändert bleibt, wenn wir von φ zu φ' übergehn, kann in gleicher Weise bewiesen werden, ohne auf die Form XV. oder XXXI. von $\varphi\rho$ Bezug zu nehmen, indem man beachtet, dass wir nach XXXVII., u. s. w., die Transformationen haben,

$$\begin{aligned}\text{XXXIX.} \ldots S.\varphi\lambda\varphi\mu\varphi\nu &= S.\varphi\lambda\psi'\lambda' = S\lambda'\psi\varphi\lambda\\ &= mS\lambda'\lambda = mS\lambda\mu\nu,\end{aligned}$$

denn die Gleichungen III. und VIII. ergeben,

$$\text{XL.} \ldots \psi\varphi\rho = m\rho,$$

was für ein Vector ρ auch sein mag; so dass der Werth der skalar Constanten m jetzt aus der ursprünglichen linearen Function φ genau ebenso abgeleitet werden kann, wie in X. oder X′. aus der conjugirten Function φ'.

348. Wir haben also gefunden, dass die lineare und vector Gleichung,

$$\text{I.} \ldots \varphi\rho = \sigma,$$

ergiebt,

$$\text{II.} \ldots m\rho = \psi\sigma,$$

Digitized by Google

als die Formel für ihre Auflösung; und die allgemeine Methode, welche vorher auseinandergesetzt worden ist, um m und ψ aus φ abzuleiten. Wir haben daher die beiden Identitäten,

$$\text{III.}\ldots m\sigma = \varphi\psi\sigma,$$
$$m\varrho = \psi\varphi\varrho;$$

oder kurz und symbolisch,

$$\text{III}'\ldots m = \varphi\psi = \psi\varphi;$$

und mit ihnen können wir, wie ich gezeigt habe, die conjugirten Gleichungen verbinden,

$$\text{III}''\ldots m = \varphi'\psi' = \psi'\varphi'.$$

Vertauscht man daher der Reihe nach μ und ν mit $\psi'\mu$ und $\psi'\nu$, in der Definitionsgleichung der Hülfsfunction ψ, oder in der Formel,

$$\psi V\mu\nu = V.\varphi'\mu\varphi'\nu, \qquad 347,\ \text{XI}',$$

so bekommt man die beiden weiteren Gleichungen,

$$\text{IV.}\ldots -\psi V.\nu\psi'\mu = mV.\mu\varphi'\nu;$$
$$\text{V.}\ldots \psi V.\psi'\mu\psi'\nu = m^2 V\mu\nu;$$

in der ersten von ihnen können die Punkte fortgelassen werden, während in jeder von ihnen die accentuirten Operationssymbole mit den nicht accentuirten ausgetauscht werden können: und wir sehn, dass das Gesetz der Homogenität [347, (6.)] bewahrt wird. Und viele andere Transformationen derselben Art lassen sich ausführen, von denen ich im Folgenden einige wenige Beispiele gebe.

(1.) Operirt man an V. mit ψ^{-1}, oder mit $m^{-1}\varphi$, so bekommt man die neue Formel,

$$\text{VI.}\ldots V.\psi'\mu\psi'\nu = m\varphi V\mu\nu;$$

vergleicht man mit ihr die zuletzt erwähnte Definition von ψ, so sieht man, dass wir φ mit ψ vertauschen können, wenn wir zur selben Zeit ψ mit $m\varphi$ verwechseln, und daher auch m mit m^2; φ' wird daher mit ψ' vertauscht, und ψ' mit $m\varphi'$.

(2.) Zum Beispiel, wir können somit von IV. und V. zu den Formeln übergehn,

$$\text{VII.}\ldots -\varphi V\nu\varphi'\mu = V\mu\psi'\nu,$$

und

$$\text{VIII.}\ldots \varphi V.\varphi'\mu\varphi'\nu = mV\mu\nu;$$

und wir sehn, dass in ihnen das zuletzt erwähnte Gesetz der Homogenität wieder gewahrt ist.

(3.) Die Gleichung VII. hätte auf andere Weise erhalten werden können, dadurch dass man μ und ν in IV. vertauscht, und dann mit $-m^{-1}\varphi$, oder mit $-\psi^{-1}$ operirt hätte; und die Formel VIII. kann sofort aus der Definitionsgleichung von ψ abgeleitet werden, indem man an ihr mit φ operirt. In der That kann man sagen, dass unsere Regel für die Umkehrung der linearen Function φ in der Formel enthalten ist,

$$\text{IX.}\ldots \varphi^{-1}V\mu\nu = m^{-1}V.\varphi'\mu\varphi'\nu;$$

in der m eine skalar Constante ist, wie vorher.

(4.) Nach ähnlichen Operationen und Substitutionen ist,

$$\begin{aligned}
&\text{X.}\ldots\ \varphi^2 V.\varphi'\mu\varphi'\nu = m\varphi V\mu\nu = V.\psi'\mu\psi'\nu;\\
&\text{XI.}\ldots\ m\varphi V.\varphi'\mu\varphi'\nu = m^2 V\mu\nu = \psi V.\psi'\mu\psi'\nu;\\
&\text{XII.}\ldots\ m^2 V.\varphi'\mu\varphi'\nu = m^2\psi V\mu\nu = \psi^2 V.\psi'\mu\psi'\nu;\\
&\text{XIII.}\ldots\ V.\varphi'^2\mu\varphi'^2\nu = \psi V.\varphi'\mu\varphi'\nu = \psi^2 V\mu\nu;
\end{aligned}$$

u. s. w.

(5.) Aber wir haben auch,

$$\text{XIV.}\ldots S.\lambda\varphi^2\rho = S.\varphi\rho\varphi'\lambda = S.\rho\varphi'^2\lambda,$$

so dass die zweiten Functionen φ^2 und φ'^2 conjugirt (vergl. 347, IV.) sind; daher wird, nach XIII., ψ^2 aus φ^2 gebildet, wie ψ aus φ; und wir werden allgemein finden, dass wenn n irgend eine ganze Zahl ist, und wenn wir φ mit φ^n vertauschen, wir zur selben Zeit φ' mit φ'^n vertauschten, ψ mit ψ^n, ψ' mit ψ'^n, und m mit m^n.

(6.) Es mag auch bemerkt werden, dass die Vertauschungen (1.) zu der Gleichung führen,

$$\text{XV.}\ldots (S.\varphi\lambda\varphi\mu\varphi\nu)^2 = S\lambda\mu\nu\, S.\psi\lambda\psi\mu\psi\nu;$$

und auf viele andere entsprechende Formeln.

349. Die Ausdrücke,

$$\begin{aligned}
&\lambda'\varphi\lambda + \mu'\varphi\mu + \nu'\varphi\nu,\\
&\lambda'\psi\lambda + \mu'\psi\mu + \nu'\psi\nu,
\end{aligned}$$

Digitized by Google

in denen λ', μ', ν' die Bedeutungen 347, XX. haben, und andere vom selben Typus verschwinden, wie leicht zu beweisen ist, wenn λ, μ, ν complanar, und daher durch $S\lambda\mu\nu$ theilbar sind, da jeder solcher Ausdruck jeden der drei Hülfsvectoren λ, μ, ν nur im ersten Grade umschliesst; die Quotienten solcher Divisionen sind daher gewisse constanten Quaternionen, welche von λ, μ, ν unabhängig sind, und nur von der besonderen Form von φ abhängen, oder von den (skalar oder vector, aber reellen) Constanten, die in die Zusammensetzung dieser gegebnen Function eingehn. Schreibt man daher,

$$\text{I.} \ldots q_1 = (\lambda'\varphi\lambda + \mu'\varphi\mu + \nu'\varphi\nu) : S\lambda\mu\nu,$$

und

$$\text{II.} \ldots q_2 = (\lambda'\psi\lambda + \mu'\psi\mu + \nu'\psi\nu) : S\lambda\mu\nu,$$

so werden wir es von Nutzen finden, die skalar und vector Theile dieser beiden constanten Quaternionen, q_1 und q_2, gesondert zu betrachten; und diese Constanten sind, bezüglich, von der ersten und zweiten Dimension, in einem Sinne, den wir kürzlich auseinandergesetzt haben.

(1.) Da $V\lambda'\varphi\lambda = \mu S\nu\varphi\lambda - \nu S\lambda\varphi'\mu$, u. s. w., so folgt, dass die vector Theile von q_1 und q_2 die Vorzeichen wechseln, wenn φ mit φ' vertauscht wird, und daher ψ mit ψ'. Anderseits können wir die willkürlichen Vectoren λ, μ, ν mit λ', μ', ν' vertauschen, wenn wir zur selben Zeit λ' mit $V\mu'\nu'$, oder mit $-\lambda S\lambda\mu\nu$, u. s. w., vertauschen und $S\lambda\mu\nu$, oder $S\lambda\lambda'$, mit $-(S\lambda\mu\nu)^2$; dividiren wir daher mit $-S\lambda\mu\nu$, so finden wir die neuen Ausdrücke,

$$\text{III.} \ldots q_1 = (\lambda\varphi\lambda' + \mu\varphi\mu' + \nu\varphi\nu') : S\lambda\mu\nu,$$
$$\text{IV.} \ldots q_2 = (\lambda\psi\lambda' + \mu\psi\mu' + \nu\psi\nu') : S\lambda\mu\nu;$$

operirt man an ihnen mit S, so kehren wir zu den Skalaren der Ausdrücke I. und II. zurück, wenn in ihnen φ und ψ mit φ' und ψ' vertauscht werden.

(2.) Daher werden die conjugirten quaternion Constanten, Kq_1 und Kq_2, dadurch erhalten, dass man zu den conjugirten linearen Functionen übergeht; und somit können wir schreiben,

$$\text{V.} \ldots Kq_1 = (\lambda'\varphi'\lambda + \mu'\varphi'\mu + \nu'\varphi'\nu) : S\lambda\mu\nu;$$
$$\text{VI.} \ldots Kq_2 = (\lambda'\psi'\lambda + \mu'\psi'\mu + \nu'\psi'\nu) : S\lambda\mu\nu;$$

oder, wenn man λ mit λ', u. s. w., in den Dividenden vertauscht,

$$\text{VII.}\ldots Kq_1 = (\lambda\varphi'\lambda' + \mu\varphi'\mu' + \nu\varphi'\nu') : S\lambda\mu\nu;$$
$$\text{VIII.}\ldots Kq_2 = (\lambda\psi'\mu' + \mu\psi'\mu' + \nu\psi'\nu') : S\lambda\mu\nu;$$

wo $\lambda' = V\mu\nu$, u. s. w., wie vorher.

(3.) Operirt man mit $V.\varrho$ an Vq_1, und beachtet, dass

$$V.\varrho V\lambda'\varphi\lambda = \varphi(\lambda S\lambda'\varrho) - \lambda' S\lambda\varphi'\varrho, \text{ u. s. w.,}$$

während

$$\varphi(\lambda S\lambda'\varrho + \mu S\mu'\varrho + \nu S\nu'\varrho) = \varphi\varrho S\lambda\mu\nu,$$

und

$$\lambda' S\lambda\varphi'\varrho + \mu' S\mu\varphi'\varrho + \nu' S\nu\varphi'\varrho = \varphi'\varrho S\lambda\mu\nu,$$

und dass ähnliche Transformationen für $V.\varrho Vq_2$ gelten, so findet man, dass

$$\text{IX.}\ldots V.\varrho Vq_1 = \varphi\varrho - \varphi'\varrho;$$

und dass

$$\text{X.}\ldots V.\varrho Vq_2 = \psi\varrho - \psi'\varrho.$$

(4.) Demnach muss der Vector $\varphi\varrho - \varphi'\varrho$, da

$$S\varrho(\varphi\varrho - \varphi'\varrho) = -S\varrho(\varphi\varrho - \varphi'\varrho) = 0,$$

wenn er nicht verschwindet, eine Linie senkrecht zu ϱ sein, und daher von der Form,

$$\text{XI.}\ldots \varphi\varrho - \varphi'\varrho = 2V\gamma\varrho,$$

in der γ ein gewisser constanter Vector ist; so dass wir schreiben können,

$$\text{XII.}\ldots \varphi\varrho = \varphi_0\varrho + V\gamma\varrho,$$
$$\varphi'\varrho = \varphi_0\varrho - V\gamma\varrho;$$

hier ist die Function $\varphi_0\varrho$ ihr eigner Conjugirter, oder sie ist der gemeinsame, sich selbst conjugirte Theil von $\varphi\varrho$ und $\varphi'\varrho$; nämlich der Theil,

$$\text{XIII.}\ldots \varphi_0\varrho = \tfrac{1}{2}(\varphi\varrho + \varphi'\varrho).$$

Und wir sehn, dass bei dieser Bedeutung von γ,

$$\text{XIV.}\ldots V(\lambda'\varphi\lambda + \mu'\varphi\mu + \nu'\varphi\nu) = -2\gamma S\lambda\mu\nu,$$

ist, oder dass,

$$\text{XIV}'\ldots Vq_1 = -2\gamma;$$

Digitized by Google

während wir in gleicher Weise haben,

$$\text{XV.}\ldots\ V(\lambda'\psi\lambda+\mu'\psi\mu+\nu'\psi\nu)=-2\delta S\lambda\mu\nu,$$

oder

$$\text{XV}'\ldots\ Vq_2=-2\delta,$$

wenn

$$\text{XVI.}\ldots\ \psi\varrho-\psi'\varrho=2V\delta\varrho.$$

Als Bestätigung mag dienen, dass der Theil φ_0 von φ nach (1.) keinen Einfluss auf Vq_1 hat; und wenn wir $\varphi\lambda$ mit $V\gamma\lambda$, u. s. w. im ersten Gliede von XIV. vertauschen, so erhalten wir,

$$\begin{aligned}(\lambda S\gamma\lambda'+\mu S\gamma\mu'+\nu S\gamma\nu')-\gamma S(\lambda\lambda'+\mu\mu'+\nu\nu')\\=\gamma S\lambda\mu\nu-3\gamma S\lambda\mu\nu.\end{aligned}$$

(5.) Da $V\lambda'\psi'\lambda=-\varphi V\lambda\varphi'\lambda'$, u. s. w., nach 348, VII., während wir schreiben können, nach (1.), (2.) und (4.),

$$\text{XVII.}\ldots\ V(\lambda\varphi\lambda'+\mu\varphi\mu'+\nu\varphi\nu')=-2\gamma S\lambda\mu\nu,$$

$$\text{XVIII.}\ldots\ V(\lambda\psi\lambda'+\mu\psi\mu'+\nu\psi\nu')=-2\delta S\lambda\mu\nu,$$

oder

$$\text{XIX.}\ldots\ V(\lambda\varphi'\lambda'+\mu\varphi'\mu'+\nu\varphi'\nu')=+2\gamma S\lambda\mu\nu,$$

und

$$\text{XX.}\ldots\ V(\lambda'\psi'\lambda+\mu'\psi'\mu+\nu'\psi'\nu)=+2\delta S\lambda\mu\nu,$$

so erhalten wir die folgende Relation zwischen den zwei neuen vector Constanten,

$$\text{XXI.}\ldots\ \delta=-\varphi\gamma=-\varphi'\gamma=-\varphi_0\gamma;$$

denn φ, φ' und φ_0 haben alle dieselbe Wirkung auf den besonderen Vector γ.

(6.) Wir können hinzufügen, dass die vector Constante γ von der ersten Dimension ist, und dass δ von der zweiten Dimension ist in Bezug auf die Beta der Grundform; in der That, bei dieser Form, 347, XV., von $\varphi\rho$ erhalten wir die Ausdrücke,

$$\text{XXII.}\ldots\ \gamma=\tfrac{1}{3}V(\beta\alpha+\beta'\alpha'+\beta''\alpha''),$$

und

$$\begin{aligned}\text{XXIII.}\ldots\ \delta=\tfrac{1}{3}V(V\beta'\beta''.V\alpha'\alpha''+V\beta''\beta.V\alpha''\alpha\\+V\beta\beta'.V\alpha\alpha').\end{aligned}$$

(7.) Wenn wir mit ψ_0 und m_0 bezeichnen, was aus ψ und m wird, wenn φ mit φ_0 vertauscht wird, so finden wir leicht, dass

$$\text{XXIV.}\ldots \psi\varrho = \psi_0\varrho - \gamma S\gamma\varrho + V\delta\varrho;$$
$$\text{XXV.}\ldots \psi'\varrho = \psi_0\varrho - \gamma S\gamma\varrho - V\delta\varrho;$$

so dass der selbstconjugirte Theil von $\psi\varrho$ ein Glied enthält, $-\gamma S\gamma\varrho$, welches den Vector γ in sich enthält, aber nur im zweiten Grade; und ebenso ist

$$\text{XXVI.}\ldots m = m_0 + S\gamma\delta = m_0 - S\gamma\varphi\gamma;$$

γ kommt hier wiederum nur in einem graden Grade vor, denn m bleibt ungeändert, wenn wir von φ zu φ' übergehn, oder von γ zu $-\gamma$.

(8.) Es ist augenscheinlich, dass wir die Beziehungen haben,

$$\text{XXVII.}\ldots m_0 = \varphi_0\psi_0 = \psi_0\varphi_0;$$

und dass φ_0, ψ_0 und m_0 bezüglich von der ersten, zweiten und dritten Dimension sind, in einem schon auseinandergesetzten Sinne.

350. Nachdem wir so die vector Theile der beiden quaternion Constanten, q_1 und q_2, betrachtet haben, gehn wir dazu über, ihre skalar Theile in Betracht zu ziehn; und dabei werden wir zwei neue skalar Constanten, m'' und m', einführen und werden darauf hingeführt werden, zwei neue conjugirte Hülfsfunctionen, $\chi\varrho$ und $\chi'\varrho$, anzuwenden; daraus wird sich dann auch die Aufstellung einer gewissen symbolischen und cubischen Gleichung ergeben,

$$\text{I.}\ldots 0 = m - m'\varphi + m''\varphi^2 - \varphi^3,$$

welche durch das lineare Operationszeichen, φ, befriedigt wird, und die von grosser Wichtigkeit in der ganzen Theorie der linearen Functionen ist.

(1.) Schreibt man daher,

$$\text{II.}\ldots m'' = Sq_1,$$

und

$$\text{III.}\ldots m' = Sq_2,$$

so sehn wir erstens, dass keine dieser beiden neuen Constanten den Werth ändert, wenn man von φ zu φ' übergeht, oder von γ zu $-\gamma$; denn wir haben gesehn, dass wir bei einem solchen Uebergange nur q_1 und q_2 mit Kq_1 und Kq_2 vertauschen. Wenn wir demnach mit m'_0 und m''_0 bezeichnen, was aus m' und m''

Digitized by Google

wird, wenn man φ mit φ_0 vertauscht, so findet man leicht die Ausdrücke,

$$\text{IV.}\ldots m'' = m''_0;$$

und

$$\text{V.}\ldots m' = m'_0 - \gamma^2.$$

(2.) Man mag sich merken, dass m'', oder m''_0, von der ersten Dimension ist, dass dagegen m' und m'_0 von der zweiten Dimension in Bezug auf die Grundform von φ sind; und demnach erhalten wir bei dieser Form,

$$\text{VI.}\ldots m'' = S\alpha\beta + S\alpha'\beta' + S\alpha''\beta'';$$

und

$$\text{VII.}\ldots m' = S(V\alpha'\alpha''.V\beta''\beta' + V\alpha''\alpha.V\beta\beta'' + V\alpha\alpha'.V\beta'\beta).$$

(3.) Wenn wir zwei neue lineare Functionen, $\chi\varrho$ und $\chi'\varrho$, einführen, von der Art dass

$$\text{VIII.}\ldots \chi V\mu\nu = V(\mu\varphi'\nu - \nu\varphi'\mu),$$

und

$$\text{IX.}\ldots \chi' V\mu\nu = V(\mu\varphi\nu - \nu\varphi\mu),$$

so ist leicht zu beweisen, dass diese Functionen einander conjugirt sind, und dass jede von der ersten Dimension ist; in der That haben wir, mit der Grundform von $\varphi\varrho$, die Ausdrücke,

$$\text{X.}\ldots \chi\varrho = V(\alpha V\beta\varrho + \alpha' V\beta'\varrho + \alpha'' V\beta''\varrho),$$
$$\text{XI.}\ldots \chi'\varrho = V(\beta V\alpha\varrho + \beta' V\alpha'\varrho + \beta'' V\alpha''\varrho);$$

und $S.\lambda\alpha V\beta\varrho = S.\varrho\beta V\alpha\lambda$, u. s. w. Man findet auch, wenn man χ_0 aus φ_0 bildet, wie χ aus φ, dass

$$\text{XII.}\ldots \chi\varrho = \chi_0\varrho - V\gamma\varrho,$$

und

$$\text{XIII.}\ldots \chi'\varrho = \chi_0\varrho + V\gamma\varrho;$$

wo χ_0 von der ersten Dimension ist.

(4.) Da nun

$$\begin{aligned} S\lambda\chi\lambda' &= S.\lambda(\mu\varphi'\nu - \nu\varphi'\mu) \\ &= S(\mu'\varphi'\mu + \nu'\varphi'\nu), \end{aligned}$$

so ergiebt der Ausdruck II., nach 349, V., die Gleichung,

$$\text{XIV.}\ldots m'' S\lambda\lambda' = S.\lambda(\varphi + \chi)\lambda',$$

in der λ und λ' zwei willkürliche und unabhängige Vectoren

sind; sie kann nur statt haben, wenn wir die functionale Beziehung haben,

$$\text{XV.}\ldots\ \varphi\varrho + \chi\varrho = m''\varrho;$$

oder kurz und symbolisch,

$$\text{XVI.}\ldots\ \chi + \varphi = m''.$$

Demnach ist augenscheinlich, dass die Beziehung XV. verificirt wird durch die Form X. von $\chi\varrho$, in Verbindung mit der Grundform von $\varphi\varrho$ und mit dem Ausdruck VI. für die Constante m''.

(5.) Die Formel XVI. ergiebt,

$$\text{XVII.}\ldots\ \chi\varphi = m''\varphi - \varphi^2 = \varphi\chi;$$

und demnach kann die Identität von $\chi\varphi$ und $\varphi\chi$ leicht auf andere Weise bewiesen werden, indem man μ und ν mit $\psi'\mu$ und $\psi'\nu$ in der Definition VIII. von χ vertauscht, und sich daran erinnert, dass

$$V.\psi'\mu\psi'\nu = m\varphi V\mu\nu,$$
$$\varphi'\psi' = m,$$

und

$$V\mu\psi'\nu = -\varphi V\nu\varphi'\mu;$$

denn wir haben so,

$$\begin{aligned}\text{XVIII.}\ldots\ \chi\varphi V\mu\nu &= V(\mu\psi'\nu - \nu\psi'\mu)\\ &= \varphi V(\mu\varphi'\nu - \nu\varphi'\mu)\\ &= \varphi\chi V\mu\nu,\end{aligned}$$

wie gefordert wird.

(6.) Da dann,

$$\begin{aligned}S.\lambda\varphi\chi\lambda' &= S.\lambda(\mu\psi'\nu - \nu\psi'\mu)\\ &= S(\mu'\psi'\mu + \nu'\psi'\nu),\end{aligned}$$

so ergiebt der Werth III. von m', nach 349, VI., die Gleichung,

$$\text{XIX.}\ldots\ m'S\lambda\lambda' = S.\lambda(\psi + \varphi\chi)\lambda',$$

in der λ und λ' unabhängige Vectoren sind; daher ist,

$$\text{XX.}\ldots\ \psi\varrho + \varphi\chi\varrho = m'\varrho,$$

oder kurz,

$$\text{XXI.}\ldots\ \psi + \varphi\chi = m'.$$

Und in der That, mit der Grundform von $\varphi\varrho$ haben wir

$$\text{XXII.}\ldots\ \varphi\chi\varrho = \chi\varphi\varrho$$
$$= V(V\beta'\beta''.V\varrho V\alpha'\alpha'' + V\beta''\beta.V\varrho V\alpha''\alpha + V\beta\beta'.V\varrho V\alpha\alpha');$$

und damit ist die Gleichung XX. verificirt, wenn sie mit dem Werth VII. von m' in Verbindung gebracht wird, und mit dem Ausdruck 347, XVIII. für $\psi\varrho$.

(7.) Eliminirt man das Symbol χ aus den beiden Gleichungen XVI. und XXI., und denkt daran, dass $\varphi\psi = \psi\varphi = m$ ist, so findet man den symbolischen Ausdruck,

$$\text{XXIII.}\ldots\ m\varphi^{-1} = \psi = m' - m''\varphi + \varphi^2;$$

und damit ist die symbolische und cubische Gleichung I. bewiesen.

(8.) Und da die Coefficienten, m, m', m'', dieser Gleichung, wie wir gesehn haben, ungeändert bleiben, wenn man von φ zu φ' übergeht, so können wir auch die conjugirte Gleichung hinschreiben,

$$\text{XXIV.}\ldots\ 0 = m - m'\varphi' + m''\varphi'^2 - \varphi'^3.$$

(9.) Multiplicirt man symbolisch die Gleichung I. mit $-m^{-1}\psi^3$, und reducirt sie, indem man $\psi\varphi = m$ setzt, so eliminirt sich das Zeichen φ, und wir erhalten die cubische Gleichung in ψ,

$$\text{XXV.}\ldots\ 0 = m^2 - mm''\psi + m'\psi^2 - \psi^3;$$

und in ihr kann ψ' an Stelle von ψ gesetzt werden.

(10.) Im Allgemeinen mag bemerkt werden, dass wenn wir φ mit ψ vertauschen, und daher ψ mit $m\varphi$, wie vorher, wir nicht nur m mit m^2 vertauschen, sondern auch m' mit mm'', und m'' mit m'; während χ zu gleicher Zeit mit $\varphi\chi$ vertauscht wird, oder mit $\chi\varphi$, und der Quaternion q_1 mit q_2 vertauscht wird. Demnach können wir so von der Relation XVI. zu XXI. übergehn, und umgekehrt von der letzteren zur ersteren.

(11.) Und wenn die beiden neuen Hülfsfunctionen, χ und χ', als durch die Gleichungen VIII. und IX. definirt angesehn werden, so kann bewiesen werden, dass sie die conjugirte

Beziehung (3.) zu einander haben, ohne irgendwie auf die Grundform von $\varphi\varrho$ Bezug zu nehmen, durch Betrachtungen ähnlich denjenigen, welche in 347, (8.) angewandt wurden, um die entsprechende Conjugation der Functionen ψ und ψ' festzustellen.

(12.) Es mag hinzugefügt werden, dass die Beziehungen zwischen φ, φ', χ, χ', und m'' die folgenden weiteren Transformationen ergeben, welche gelegentlich von Nutzen sind:

$$\text{XXVI.}\ldots\ \varphi' V\mu\nu = V(\mu\chi\nu + \nu\varphi\mu) = -V(\nu\chi\mu + \mu\varphi\nu);$$

und

$$\text{XXVII.}\ldots\ \varphi V\mu\nu = V(\mu\chi'\nu + \nu\varphi'\mu) = -V(\nu\chi'\mu + \mu\varphi'\nu);$$

und andere, bei denen wir hier nicht verweilen können.

351. Die cubische Gleichung in φ kann so geschrieben werden:

$$\text{I.}\ldots\ 0 = m\varrho - m'\varphi\varrho + m''\varphi^2\varrho - \varphi^3\varrho;$$

wo ϱ ein beliebiger Vector ist. Wenn es daher vorkommen sollte, dass die lineare Function $\varphi\varrho$ für einen gewissen besonderen, aber wirklichen Vector, ϱ, verschwindet, so dass $\varphi\varrho = 0$, $\varphi^2\varrho = 0$, $\varphi^3\varrho = 0$, u. s. w., so muss die Constante m null sein; oder in Zeichen,

$$\text{II.}\ldots\ \text{wenn}\ \varphi\varrho = 0,$$

und

$$T\varrho > 0,$$

dann ist

$$m = 0.$$

Wir müssen daher, nach dem Ausdruck 347, XXIII. für m, wenn wir die Grundform für $\varphi\varrho$ annehmen, entweder haben

$$\text{III.}\ldots\ S\alpha\alpha'\alpha'' = 0,$$

oder sonst

$$\text{IV.}\ldots\ S\beta''\beta'\beta = 0;$$

so dass sich, in jedem Falle, die im Allgemeinen dreigliedrige Form, 347, XV., auf eine zweigliedrige reduciren lassen muss. Umgekehrt, wenn wir somit eine Function von der besonderen Form haben,

$$\text{V.}\ldots\ \varphi\varrho = \beta S\alpha\varrho + \beta' S\alpha'\varrho,$$

Digitized by Google

so haben wir dann,

$$\text{VI.} \ldots \varphi V\alpha\alpha' = 0;$$

so dass wenn α und α' wirkliche und nicht-parallele Linien sind, der reelle und wirkliche Vector $V\alpha\alpha'$ ein Werth von ϱ sein wird, welcher der Gleichung $\varphi\varrho = 0$ genügt; dagegen wird kein anderer reeller und wirklicher Werth von ϱ, ausgenommen $\varrho = xV\alpha\alpha'$, dieser Gleichung genügen, wenn β und β' wirklich und nicht-parallel sind. In dem Falle V. führt die Operation φ jeden andern Vector auf die feste Ebne von β, β' zurück, eine Ebne, die daher der Ort von $\varphi\varrho$ ist; und da wir auch haben,

$$\text{VII.} \ldots \varphi'\varrho = \alpha S\beta\varrho + \alpha' S\beta'\varrho,$$

so sehn wir, dass der Ort des functional conjugirten Vectors, $\varphi'\varrho$, eine andere feste Ebne ist, nämlich diejenige von α, α'. Auch ist die Normale zu letzterer Ebne die Linie, welche durch die erstere Operation zerstört wird, nämlich durch φ; während die Normale zur ersteren Ebne in gleicher Weise die Linie ist, welche durch die letztere Operation, φ', vernichtet wird, denn wir haben,

$$\text{VIII.} \ldots \varphi' V\beta\beta' = 0,$$

aber nicht $\varphi'\varrho = 0$, für irgend ein wirkliches ϱ, in irgend einer Richtung mit Ausnahme derjenigen von $V\beta\beta'$, oder der zu ihr entgegengesetzten, welch letztere indessen, für den gegenwärtigen Zweck, als dieselbe* wie jene angesehn werden kann. In diesem Falle haben wir auch eingliedrige Formen für $\psi\varrho$ und $\psi'\varrho$, nämlich

$$\text{IX.} \ldots \psi\varrho = V\alpha\alpha' S\beta'\beta\varrho,$$

und

$$\text{X.} \ldots \psi'\varrho = V\beta\beta' S\alpha'\alpha\varrho;$$

so dass die Operation ψ jede Linie in der ersten festen Ebne, derjenigen von β, β', zerstört, und die conjugirte Operation ψ'

* Demgemäss werden wir in dieser Untersuchung, wenn immer wir von einer festen Richtung, oder von der Richtung einer gegebnen Linie, u. s. w., sprechen, stets darunter verstehn, dass wir auch meinten, oder die entgegengesetzte zu dieser Richtung.

jede Linie in der zweiten festen Ebne, derjenigen von α, α', vernichtet. Andererseits reducirt die Operation ψ jede Linie, welche ausserhalb der ersten Ebne liegt, auf die feste Richtung der Normalen zur zweiten Ebne; und die Operation ψ' reducirt jede Linie, welche ausserhalb der zweiten Ebne liegt, auf die andere feste Richtung, welche normal zur ersten Ebne ist. Und so kommt es denn dahin, dass wir zuletzt eine null Linie erhalten, mögen wir zuerst mit ψ operiren, und dann mit φ; oder zuerst mit φ, und dann mit ψ; oder zuerst mit ψ' und dann mit φ'; oder zuerst mit φ' und dann mit ψ'; und zwar in allen diesen Fällen in Uebereinstimmung mit den symbolischen Gleichungen,

$$\text{XI.} \ldots \varphi\psi = \psi\varphi = \varphi'\psi' = \psi'\varphi' = m = 0,$$

welche zu dem hier betrachteten Falle gehören.

(1.) Ohne auf die Grundform von $\varphi\rho$ zurückzugehn, hätte uns die Gleichung 348, VI., nämlich $V.\psi'\mu\psi'\nu = m\varphi V\mu\nu$, und die entsprechende Gleichung $V.\psi\mu\psi\nu = m\varphi' V\mu\nu$, in den Stand setzen können, vorherzusehn, dass $\psi'\rho$ und $\psi\rho$, wenn sie nicht beide beständig verschwinden, wenn $m = 0$ ist, ein jedes eine feste Richtung haben müssen; und dass daher ein jedes durch ein Monom auszudrücken sein muss, wie vorher: die feste Richtung von $\psi\rho$ ist die einer Linie, welche durch die Operation φ vernichtet wird, und ähnliches gilt für $\psi'\rho$ und φ'.

(2.) Und da wir haben, nach 347, XI. und XXV.,

$$\psi V\mu\nu = V.\varphi'\mu\varphi'\nu,$$

und

$$\psi' V\mu\nu = V.\varphi\mu\varphi\nu,$$

so dass die Linie $\varphi'\mu$, wenn sie wirklich ist, senkrecht zu $\psi V\mu\nu$ ist, und die Linie $\varphi\mu$ senkrecht zu $\psi' V\mu\nu$, so sehn wir, dass jede von den beiden Linien, $\varphi'\rho$ und $\varphi\rho$, im gegenwärtigen Falle als Ort eine Ebne haben muss; und daraus hätten die zweigliedrigen Formen der beiden conjugirten vector Functionen, $\varphi\rho$ und $\varphi'\rho$, vorhergesehn werden können: $\psi\rho$ und $\psi'\rho$ werden hier als wirkliche Vectoren angenommen.

(3.) Die Beziehungen der Rechtwinkligkeit der beiden

Digitized by Google

festen Linien, oder Richtungen, zu den beiden festen Ebnen hätte somit auch abgeleitet werden können durch die beiden conjugirten zweigliedrigen Formen, V. und VII., ohne vorher die allgemeinere dreigliedrige oder Grundform von $\varphi\rho$ aufzustellen.

(4.) Das Vorhandensein einer Ebne als Ort von $\varphi\rho$, und einer anderen Ebne als Ort von $\varphi'\rho$, für den Fall, dass $m = 0$ ist, hätte auch vorhergesehn werden können aus den Gleichungen,

$$S.\varphi\lambda\varphi\mu\varphi\nu = S.\varphi'\lambda\varphi'\mu\varphi'\nu = mS\lambda\mu\nu;$$

und dieselben Gleichungen hätten uns in den Stand setzen können vorherzusehn, dass die skalar Constante m null sein muss, wenn für irgend einen wirklichen Vector, wie zum Beispiel λ, entweder $\varphi\lambda$ oder $\varphi'\lambda$ null wird.

(5.) Und die Zurückführbarkeit der dreigliedrigen Form auf die zweigliedrige, hätte, wenn die letzte Bedingung erfüllt ist, vorweg genommen werden können, ohne irgendwie Bezug auf die Zusammensetzung der Constanten m zu nehmen, aus der einfachen Betrachtung [vergl. 294, (10.)], dass kein wirklicher Vector ρ zugleich zu drei diplanaren Linien senkrecht sein kann.

352. Es kann vorkommen, dass ausser der letzten Zurückführung (351) der linearen Function $\varphi\rho$ auf eine zweigliedrige Form, welche möglich ist, wenn die Relation

$$\text{I.} \ldots m = 0$$

besteht zwischen den Constanten der Function, ein Fall, in welchem die symbolische und cubische Gleichung 350, I. selbst sich auf die Form reducirt,

$$\text{II.} \ldots \varphi^3 - m''\varphi^2 + m'\varphi = 0,$$

in welchem Falle sie somit ihr absolutes Glied verliert, oder eine Wurzel hat, welche gleich null ist, diese Gleichung dadurch eine weitere Reduction erfahren kann, dass zwei ihrer Wurzeln einander gleich werden; nämlich wenn wir entweder haben

$$\text{III.} \ldots m' = 0,$$

und

$$\text{IV.} \ldots \varphi^2(\varphi - m'') = 0;$$

Digitized by Google

oder auf anderem Wege dadurch, dass die weiteren Gleichungen bestehn,

$$\text{V.}\ldots m''^2 - 4m' = 0,$$

und

$$\text{VI.}\ldots \varphi(\varphi - \tfrac{1}{2}m'')^2 = 0.$$

In jedem von diesen beiden Fällen werden wir finden, dass gewisse neue geometrische Beziehungen entstehn, und es mag von Interesse sein, sie kurz zu untersuchen; die bemerkenswertheste von ihnen ist die gegenseitige Rechtwinkligkeit der beiden festen Ebnen, welche die Orte (vergl. 351) gewisser abgeleiteter, und functional conjugirter Vectoren sind: nämlich, in dem Falle III. und IV., die Orte von $\varphi\rho$ und $\varphi'\rho$; und in dem Falle V. und VI., die Orte von $\Phi\rho$ und $\Phi'\rho$, wenn

$$\text{VII.}\ldots \Phi = \varphi - \tfrac{1}{2}m'',$$

und

$$\text{VIII.}\ldots \Phi' = \varphi' - \tfrac{1}{2}m'',$$

so dass im letzten Falle das Symbol Φ der neuen cubischen Gleichung genügt,

$$\text{IX.}\ldots 0 = \Phi^2(\Phi + \tfrac{1}{2}m'');$$

während Φ' zu gleicher Zeit einer cubischen Gleichung mit denselben Coefficienten [vergl. 350, (8.)] genügt, nämlich der Gleichung

$$\text{X.}\ldots 0 = \Phi'^2(\Phi' + \tfrac{1}{2}m'').$$

(1.) Wir sahn in 351, (1.), (2.), dass wenn $m = 0$, die Linie $\psi'\rho$ im Allgemeinen eine feste Richtung hat, zu welcher diejenige der Linie $\varphi\rho$ senkrecht ist; und dass daher die Linie $\psi\rho$ gleichfalls eine andere feste Richtung hat, zu welcher $\varphi'\rho$ senkrecht ist. Wenn daher die ebnen Orte von $\varphi\rho$ und $\varphi'\rho$ rechtwinklig zu einander sind, so müssen auch die festen Linien $\psi'\lambda$ und $\psi\mu$ rechtwinklig sein, oder es muss sein

$$\text{XI.}\ldots 0 = S.\psi'\lambda\psi\mu = S\lambda\psi^2\mu,$$

unabhängig von den Richtungen von λ und μ; und daher ist

$$\text{XII.}\ldots 0 = \psi^2\mu,$$

oder

Digitized by Google

$$\text{XIII.} \ldots \psi^2 = 0,$$

da μ ein beliebiger Vector ist.

(2.) Jetzt haben wir im Allgemeinen, nach der functional Relation 350, XXI. in Verbindung mit $\psi\varphi = m$, die Transformation,

$$\text{XIV.} \ldots \psi^2 = \psi(m' - \varphi\chi) = m'\psi - m\chi;$$

wenn daher $m = 0$ ist, wie in I., so muss das Symbol ψ der erniedrigten oder quadratischen Gleichung genügen,

$$\text{XV.} \ldots 0 = m'\psi - \psi^2;$$

die demnach ein Factor der cubischen Gleichung,

$$\text{XVI.} \ldots 0 = m'\psi^2 - \psi^3,$$

ist, auf welche die allgemeine Gleichung 350, XXV. reducirt wird, durch die Annahme, dass m verschwindet.

(3.) Wenn wir daher nicht nur haben $m = 0$, wie in I., sondern auch $m' = 0$, wie in III., so wird der Bedingung XIII., nach XV., Genüge gethan; und die beiden Ebnen, auf welche wir vorher Bezug genommen hatten, sind allgemein rechtwinklig.

(4.) Wir könnten in der That vorschlagen, der Bedingung XIII. dadurch zu genügen, dass wir annehmen, man habe stets,

$$\text{XVII.} \ldots \psi = 0,$$

das heisst,

$$\text{XVII}'. \ldots \psi\varrho = 0,$$

für jede Richtung von ϱ; aber in diesem Falle würde die quaternion Constante q_2, nach 349, II., verschwinden; und daher würde die Constante m', da sie — nach 350, III. — ihr skalar Theil ist, wieder gleich null sein.

(5.) Die besondere Annahme XVII. würde indessen den geometrischen Charakter der Frage vollständig ändern; denn sie würde nach sich ziehn [vergl. 351, (2.)], dass die Richtungen der Linien $\varphi\varrho$ und $\varphi'\varrho$ feste sind, wenn diese nicht verschwinden, anstatt dass jene Linien nur gewisse Ebnen zu ihren Oertern haben, wie es vorher der Fall war.

(6.) Was die Rechnung betrifft, sollten wir somit für die beiden conjugirten Functionen, $\varphi\varrho$ und $\varphi'\varrho$, eingliedrige Ausdrücke von den Formen haben,

$$\text{XVIII.} \ldots \varphi\varrho = \beta S\alpha\varrho,$$
$$\varphi'\varrho = \alpha S\beta\varrho;$$

und danach würden wir, nach 347, XVIII. und 350, VII., die Gleichungen, $\psi\varrho = 0$, und $m' = 0$ wiederentdecken.

(7.) Wir würden, in diesem besonderen Falle, auch haben

$$\text{XIX.} \ldots \varphi\varrho = 0,$$

wenn

$$\varrho \perp \alpha,$$

und

$$\text{XX.} \ldots \varphi'\varrho = 0,$$

wenn

$$\varrho \perp \beta;$$

so dass $\varphi\varrho$ jetzt verschwindet, wenn ϱ irgend eine Linie in der festen Ebne senkrecht zu α ist; und ebenso ist $\varphi'\varrho$ eine null Linie, wenn ϱ in der andern festen Ebne liegt, welche rechtwinklig zur andern gegebnen Linie β ist.

(8.) Diese beiden Ebnen, oder ihre Normalen, α und β, oder die festen Richtungen der beiden Linien $\varphi'\varrho$ und $\varphi\varrho$, werden rechtwinklig sein [vergl. (1.)], wenn wir die neue Gleichung haben,

$$\text{XXI.} \ldots \varphi^2 = 0,$$

oder

$$\text{XXI}'. \ldots \varphi^2\varrho = 0,$$

für jede Richtung von ϱ; und demgemäss ergiebt der Ausdruck XVIII.

$$\varphi^2\varrho = S\alpha\beta . \varphi\varrho = 0,$$

wenn

$$\beta \perp \alpha,$$

und umgekehrt.

(9.) Ohne α und β ausdrücklich einzuführen, zeigt die Gleichung 350, XXIII., dass, wenn $\psi = 0$, und daher auch $m' = 0$, wie in (4.), das Zeichen φ der neuen quadratischen oder erniedrigten Gleichung genügt [vergl. (2.)],

Digitized by Google

$$\text{XXII.} \ldots 0 = \varphi^3 - m''\varphi;$$

sie ist demnach ein Factor der cubischen Gleichung IV., aber einer, auf welchen die cubische Gleichung nicht zurückführbar ist, wenn wir nicht so haben $\psi = 0$, sowohl als $m' = 0$.

(10.) Die Bedingung für das Vorhandensein und die Rechtwinkligkeit der beiden Ebnen (7.), für welche wir bezüglich haben $\varphi\rho = 0$, und $\varphi'\rho = 0$, ohne dass $\varphi\rho$ allgemein verschwindet, ein Fall, den zu betrachten von weiter keinem Nutzen wäre, ist daher, dass die folgenden vier Gleichungen bestehn sollen:

$$\text{XXIII.} \ldots m = 0, \qquad m' = 0, \qquad m'' = 0,$$

und

$$\text{XVII.} \ldots \psi = 0;$$

oder dass sich die cubische Gleichung IV., und ihr quadratischer Factor XXII., selbst auf die sehr einfachen Formen reduciren,

$$\text{XXIV.} \ldots \varphi^3 = 0,$$

und

$$\text{XXV.} \ldots \varphi^2 = 0;$$

die cubische Gleichung in φ hat somit drei Wurzeln, welche gleich und null sind, und $\psi\rho$ verschwindet.

(11.) Wir können auch beachten, dass ebenso wie die vector Gleichung

$$\text{XXVI.} \ldots \varphi\rho = 0$$

durch eine reelle Richtung von ρ befriedigt wird, wie wir in Art. 351 sahn, grade wenn eine Wurzel der allgemeinen cubischen Gleichung 350, I. null ist, das heisst wenn $m = 0$, grade so die beiden vector Gleichungen,

$$\text{XXVII.} \ldots \varphi\rho = 0, \qquad \psi\rho = 0,$$

durch ein und dieselbe Richtung der reellen und wirklichen Linie ρ befriedigt werden, wenn wir auch haben $m' = 0$, oder wenn die cubische Gleichung in φ zwei null Wurzeln hat, oder die Form IV. annimmt; denn wir haben, nach 350, XVII. und XX., die allgemeine Beziehung,

$$\psi\rho = m'\rho - \chi\varphi\rho.$$

(12.) Und da wir, nach 350, XV., auch die Relation haben $\chi\varrho = m''\varrho - \varphi\varrho$, so folgt, dass wenn die drei Wurzeln der cubischen Gleichung sämmtlich verschwinden, oder wenn die drei skalar Gleichungen XXIII. befriedigt werden, dann die drei vector Gleichungen,

$$\text{XXVIII.} \ldots \begin{aligned} \varphi\varrho &= 0, \\ \psi\varrho &= 0, \\ \chi\varrho &= 0, \end{aligned}$$

eine gemeinsame, reelle und wirkliche, vector Wurzel haben; oder dass sie dann sämmtlich durch ein und dieselbe Richtung von ϱ befriedigt werden.

(13.) Da $m'' - \varphi = \chi$, so kann die cubische Gleichung IV. in irgend einer der folgenden Formen geschrieben werden,

$$\text{XXIX.} \ldots 0 = \varphi^2\chi = \varphi\chi\varphi = \chi\varphi^2 = \varphi \cdot \varphi\chi = \text{u. s. w.},$$

in der accentuirte Symbole für nicht accentuirte eingesetzt werden können: und ihre geometrische Bedeutung kann durch Bezug auf gewisse feste Linien, und gewisse feste Ebnen, erläutert werden, wie folgt.

(14.) Man nehme erstens an, dass m und m' beide verschwinden, dass aber m'' von null verschieden ist, so dass sich die cubische Gleichung in φ auf die Form IV. zurückführen lässt, aber nicht auf die Form XXIV.; und ferner die Operation ψ, welche hier gleichbedeutend mit $-\varphi\chi$, oder mit $-\chi\varphi$ ist, nicht jeden Vector ϱ vernichtet, so dass [vergl. (4.), (5.), (6.)] $\varphi\varrho$ und $\varphi'\varrho$ nicht die Richtungen zweier festen Linien haben, sondern nur [vergl. (1.) und (3.)] zwei feste und rechtwinklige Ebnen, Π und Π', zu ihren Oertern haben; und es mögen die Normalen zu diesen beiden Ebnen mit λ und λ' bezeichnet werden, so dass die beiden rechtwinkligen Linien, λ und λ', bezüglich in den Ebnen Π' und Π liegen.

(15.) Dann ist leicht zu zeigen (vergl. 351), dass die Operation φ die Linie λ' selbst zerstört, während sie jede andere Linie (das heisst jede Linie, welche nicht von der Form

Digitized by Google

$x\lambda'$ ist, wo $Vx = 0$) auf die Ebne $\Pi \perp \lambda$ reducirt*; und dass sie jede Linie in dieser Ebne auf eine feste Richtung, μ, in derselben Ebne reducirt, welche somit die gemeinsame Richtung aller der Linien $\varphi^2\varrho$ ist, welche Richtung ϱ auch immer haben mag. Und die symbolische Gleichung, $\chi . \varphi^2 = 0$, drückt aus, dass die feste Richtung μ von $\varphi^2\varrho$ auch durch $\chi^{-1}0$ bezeichnet werden kann; oder dass wir die Gleichung haben,

$$\text{XXX.} \ldots 0 = \chi\mu = m''\mu - \varphi\mu,$$

wenn

$$\mu = \varphi^2\varrho,$$

welche demnach anderweitig bewiesen werden kann: und ähnliche Resultate ergeben sich für die conjugirten Symbole, φ' und χ'.

(16.) Zum Beispiel, wir können die Bedingungen des gegenwärtigen Falles durch das folgende System von Gleichungen darstellen (vergl. 351, V., VII., IX., X., und 350, VI., VII., X., XI.):

$$\text{XXXI.} \ldots \begin{cases} \varphi\varrho = \beta S\alpha\varrho + \beta' S\alpha'\varrho, \\ \varphi'\varrho = \alpha S\beta\varrho + \alpha' S\beta'\varrho, \\ 0 = m' = S(V\alpha\alpha' . V\beta'\beta) \\ \quad = S\alpha\beta S\alpha'\beta' - S\alpha\beta' S\alpha'\beta, \\ m'' = S\alpha\beta + S\alpha'\beta'; \end{cases}$$

und

$$\text{XXXII.} \ldots \begin{cases} \chi\varrho = V(\alpha V\beta\varrho + \alpha' V\beta'\varrho) = m''\varrho - \varphi\varrho, \\ \chi'\varrho = V(\beta V\alpha\varrho + \beta' V\alpha'\varrho) = m''\varrho - \varphi'\varrho, \\ -\psi\varrho = \varphi\chi\varrho = \chi\varphi\varrho = V\alpha\alpha' S\beta\beta'\varrho, \\ -\psi'\varrho = \varphi'\chi'\varrho = \chi'\varphi'\varrho = V\beta\beta' S\alpha\alpha'\varrho; \end{cases}$$

und wir können daher schreiben, indem wir hier nicht annehmen, dass $\lambda' = V\mu\nu$, u. s. w.,

$$\text{XXXIII.} \ldots \begin{cases} \lambda = V\beta\beta', \quad \lambda' = V\alpha\alpha', \quad S\lambda\lambda' = 0, \\ \mu = \varphi\beta \,||\, \varphi\beta', \quad \mu' = \varphi'\alpha' \,||\, \varphi'\alpha, \\ S\lambda\mu = S\lambda'\mu' = 0; \end{cases}$$

---

* Ich schlage vor, den Fall, wenn eine Operation der betrachteten Art eine Linie zerstört, oder auf null reducirt, in den Fall miteinzuschliessen, wenn dieselbe Operation eine Linie auf eine feste Richtung reducirt, oder auf eine feste Ebne.

und aus ihnen finden wir leicht, dass

$$\text{XXXIV.}\ldots\begin{cases}\varphi'\lambda = 0, & \varphi^2\rho \quad \mu,\\ \varphi\mu = m''\mu, & \chi\mu = 0;\\ \varphi'\lambda = 0, & \varphi'^2\rho \quad \mu',\\ \varphi'\mu' = m''\mu', & \chi'\mu' = 0.\end{cases}$$

(17.) Da wir somit haben $\chi'\mu' = 0$, wo μ' eine Linie in der festen Richtung von $\varphi'^2\rho$ ist, so haben wir auch die Gleichung,

$$\text{XXXV.}\ldots 0 = S\rho\chi'\mu' = S\mu'\chi\rho,$$

oder

$$\chi\rho \perp \mu';$$

der Ort von $\chi\rho$ ist daher eine Ebne senkrecht zur Linie μ'; und in gleicher Weise ist μ normal zu einer Ebne, welche der Ort der Linie $\chi'\rho$ ist. Und die symbolischen Gleichungen, $\varphi.\varphi\chi = 0$, $\varphi^2.\chi = 0$, können so gedeutet werden, als ob sie ausdrückten, dass die Operation φ jede Linie in der neuen Ebne von $\chi\rho$ auf die feste Richtung von $\varphi^{-1}0$, oder von λ', reducirt; und dass die Operation φ^2 jede Linie in dieser Ebne $\perp\mu'$ zerstört; und entsprechende Resultate ergeben sich, wenn die accentuirten Symbole mit unaccentuirten vertauscht werden. Demnach sehn wir, nach XXXII., dass $\varphi\chi\rho$ die feste Richtung von $V\alpha\alpha'$ hat, oder von λ'; und dass $\varphi.\varphi\chi\rho = 0$ ist, denn es ist $\varphi\lambda' = 0$.

(18.) Wir sehn auch, dass die Operation $\varphi\chi$, oder $\chi\varphi$, jede Linie in der Ebne Π zerstört, auf welche die Operation φ jede Linie reducirt; und dass somit die symbolischen Gleichungen, $\varphi\chi.\varphi = 0$, $\chi\varphi.\varphi = 0$, gedeutet werden können.

(19.) Als Verificirung mag bemerkt werden, dass die feste Richtung λ', von $\varphi\chi\rho$ oder $\chi\varphi\rho$, diejenige der Durchschnittslinie der beiden festen Ebnen von $\varphi\rho$ und $\chi\rho$ sein sollte; und demgemäss ist sie, nach XXXIII., senkrecht zu den beiden Normalen derselben, λ und μ': und ähnliche Bemerkungen betreffen die feste Richtung λ, von $\varphi'\chi'\rho$ oder von $\chi'\varphi'\rho$, welche senkrecht zu λ' und zu μ ist.

(20.) Wir wollen zunächst annehmen, dass wir ausser $m = 0$, und $m' = 0$, haben $\psi = 0$, dass dagegen m'' wieder von

Digitized by Google

null verschieden sei. In diesem Falle haben wir gesehn (6.), dass sich der Ausdruck für $\varphi\rho$ selbst auf die monome Form, $\beta S\alpha\rho$, reducirt; und dass daher die Operation φ jede Linie in einer festen Ebne ($\perp\alpha$) zerstört, während sie jede andere Linie auf eine feste Richtung ($\parallel\beta$) reducirt, welche nicht in dieser Ebne enthalten ist, denn wir haben jetzt nicht $S\alpha\beta = 0$.

(21.) In diesem Falle haben wir, nach (16.), wenn wir α' oder β' gleich 0 setzen, die Ausdrücke,

$$\text{XXXVI.}\ldots\begin{cases}\varphi\rho = \beta S\alpha\rho, \qquad \varphi'\rho = \alpha S\beta\rho,\\ \qquad m'' = S\alpha\beta \lesseqgtr 0,\\ \chi\rho = V.\alpha V\beta\rho = (m'' - \varphi)\rho,\\ \chi'\rho = V.\beta V\alpha\rho = (m'' - \varphi')\rho,\end{cases}$$

so dass die Gleichungen XVIII. von Neuem auftreten; und die erniedrigte cubische Gleichung, oder die quadratische Gleichung XXII. in φ, kann in der sehr einfachen Form geschrieben werden,

$$\text{XXXVII.}\ldots 0 = \varphi\chi = \chi\varphi.$$

(22.) Demnach [vergl. (5.) und (7.)] reducirt hier die Operation φ eine beliebige Linie auf die feste Richtung von β, während χ jede Linie in dieser Richtung zerstört; und umgekehrt, die Operation χ reducirt eine beliebige Linie auf die feste Ebne senkrecht zu α, und φ zerstört jede Linie in dieser festen Ebne. Aber da wir hier nicht annehmen, dass $m'' = 0$ ist, so ist die feste Richtung von $\varphi\rho$ nicht in der festen Ebne von $\chi\rho$ enthalten; und [vergl. (8.) und (10.)] die Richtungen von $\varphi\rho$ und $\varphi'\rho$ sind nicht rechtwinklig zu einander.

(23.) Anderseits erscheinen die binomen Formen XXXI. von $\varphi\rho$ und $\varphi'\rho$ wieder, wenn wir annehmen, dass die drei Wurzeln der cubischen Gleichung in φ verschwinden, oder dass wir haben $m = 0$, $m' = 0$, und $m'' = 0$, wie in XXIII., dass dagegen die Gleichung $\psi\rho = 0$ nicht für alle Richtungen von ρ erfüllt wird, aber es treten die beiden Bedingungsgleichungen zwischen ihren vector Constanten hinzu, von denen uns nur eine vorher begegnet ist:

$$\text{XXXVIII.}\ldots 0 = S\alpha\beta S\alpha'\beta' - S\alpha\beta' S\alpha'\beta,$$
$$0 = S\alpha\beta + S\alpha'\beta'.$$

(24.) Wir haben jetzt auch die Ausdrücke,

$$\text{XXXIX.}\ldots \chi\rho = -\varphi\rho,$$
$$\chi'\rho = -\varphi'\rho;$$

und die cubische Gleichung in φ wird einfach $\varphi^3 = 0$, wie in XXIV.; aber es ist wichtig zu beachten, dass wir hier nicht [vergl. (9.)] die erniedrigte oder quadratische Gleichung $\varphi^2 = 0$ haben, denn wir haben jetzt im Gegentheil die beiden conjugirten Ausdrücke,

$$\text{XL.}\ldots \varphi^2\rho = \psi\rho = V\alpha\alpha' S\beta'\beta\rho,$$
$$\varphi'^2\rho = \psi'\rho = V\beta\beta' S\alpha'\alpha\rho,$$

die nicht allgemein verschwinden. Und die Gleichung $\varphi^3 = 0$ wird jetzt gedeutet, dadurch dass man beachtet, dass φ^2 hier jede Linie auf die feste Richtung von $\varphi^{-1}0$ reducirt; während φ einen beliebigen Vector auf die feste Ebne reducirt, in welcher alle Linien durch φ^2 zerstört werden.

(25.) In dem letzten Falle (23.), in welchem alle Wurzeln der cubischen Gleichung in φ gleich sind, und null sind, kann der Satz (12.) von der Existenz einer gemeinsamen vector Wurzel der drei Gleichungen XXVIII. dadurch verificirt werden, dass man beachtet, dass wir jetzt haben,

$$\text{XLI.}\ldots \varphi V\alpha\alpha' = 0,$$
$$\psi V\alpha\alpha' = 0,$$
$$\chi V\alpha\alpha' = 0;$$

die dritte derselben würde hier nicht gelten, wenn wir nicht angenommen hätten, dass $m'' = 0$ ist.

(26.) Diese letzte Bedingung erlaubt uns, nach (16.), zu schreiben,

$$\text{XLII.}\ldots \varphi\mu = 0, \qquad \varphi'\mu' = 0,$$
$$V\mu\lambda' = 0, \qquad V\mu'\lambda = 0,$$
$$S\mu\mu' = 0;$$

die Linien μ' und μ fallen sonach der Richtung nach zusammen mit den Normalen λ und λ' zu den Ebnen Π und Π'; wenn wir daher schreiben,

$$\text{XLIII.}\ldots \nu = V\lambda\lambda' \,||\, V\mu\mu',$$

so dass

$$S\mu\nu = 0, \qquad S\mu'\nu = 0,$$

Digitized by Google

so wird der neue Vector ν eine Linie im Durchschnitt der beiden rechtwinkligen Ebnen sein, welche — wie wir soeben (14.) gesehn haben — die Orte der Linien $\varphi\rho$ und $\varphi'\rho$ sind, und jetzt [vergl. (17.)] die Orte von $\chi\rho$ und $\chi'\rho$ sind; und die drei Linien μ, μ', ν (oder λ', λ, ν) werden jetzt ein rechtwinkliges System bilden.

(27.) Im Allgemeinen ist es leicht zu beweisen, dass die Ausdrücke,

$$\text{XLIV.}\ldots \begin{cases} \beta = a\beta_1 + b\beta'_1, \\ \beta' = a'\beta_1 + b'\beta'_1, \\ \alpha_1 = a\alpha + a'\alpha', \\ \alpha'_1 = b\alpha + b'\alpha', \end{cases}$$

in welchen $\alpha, \beta, \alpha' \beta'$ irgend welche vier Vectoren sein können, und a, b, a', b' irgend welche vier Skalare, zu den folgenden Transformationen führen, in denen ρ irgend ein Vector sein kann:

$$\text{XLV.}\ldots\ S\alpha_1\beta_1 + S\alpha'_1\beta'_1 = S\alpha\beta + S\alpha'\beta';$$
$$\text{XLVI.}\ldots\ \beta_1 S\alpha_1\rho + \beta'_1 S\alpha'_1\rho = \beta S\alpha\rho + \beta' S\alpha'\rho;$$
$$\text{XLVII.}\ldots\ V\alpha_1\alpha'_1 . V\beta'_1\beta_1 = V\alpha\alpha' . V\beta'\beta;$$

so dass in ihrem Werthe ungeändert bleiben der Skalar, $S\alpha\beta + S\alpha'\beta'$; der Vector, $\beta S\alpha\rho + \beta' S\alpha'\rho$; und der Quaternion*, $V\alpha\alpha' . V\beta'\beta$; wenn wir von einem gegebnen System von vier Vectoren $\alpha\beta\alpha'\beta'$, zu einem anderen System von vier Vectoren $\alpha_1\beta_1\alpha'_1\beta'_1$, durch Ausdrücke von den Formen XLIV. übergehn.

(28.) Mit Hülfe des allgemeinen Satzes (27.), und der Bemerkungen in (26.), kann man ohne Schwierigkeit zeigen, dass man in dem Falle (23.) annehmen kann, ohne an Allgemeinheit irgend etwas zu verlieren, dass die vector Constanten des zweigliedrigen Ausdrucks $\beta S\alpha\rho + \beta' S\alpha'\rho$ für $\varphi\rho$ den folgenden vier Bedingungen unterworfen sind,

$$\text{XLVIII.}\ldots\ 0 = S\alpha\beta = S\alpha'\beta = S\beta\beta' = S\alpha'\beta';$$

sie führen augenscheinlich zu den weiteren Ausdrücken,

* Wir haben in diesen Transformationen Beispiele für — wie wir sagen können — quaternion Invarianten.

$$\text{XLIX.} \ldots \varphi^2\varrho = \beta S\alpha\beta' S\alpha'\varrho,$$
$$\varphi^3\varrho = 0;$$

und sie bringen somit klar zur Anschauung, und zwar auf eine sehr einfache Art, dass sich die cubische Gleichung $\varphi^3 = 0$ nicht allgemein zu der quadratischen Gleichung $\varphi^2 = 0$ erniedrigen lässt.

(29.) Der Fall, oder Nebenfall, wenn wir nicht nur $m = 0$, $m' = 0$, $m'' = 0$, haben, sondern auch $\psi = 0$, und daher $\varphi^2 = 0$, als eine erniedrigte Form von $\varphi^3 = 0$, dadurch dass sich die lineare Function $\varphi\varrho$ selbst auf das Monom $\beta S\alpha\varrho$ reducirt, wo die Beziehung $S\alpha\beta = 0$ zwischen seinen Constanten gilt, ist schon, in (10.), betrachtet worden; und somit sind die Folgerungen der Annahme III., dass es wenigstens zwei gleiche, aber null Wurzeln der cubischen Gleichung in φ giebt, wohl hinreichend discutirt worden.

(30.) Was den andern Hauptfall betrifft, wenn gleiche Wurzeln der cubischen Gleichung in φ bestehn, nämlich denjenigen, in welchem die vector Constanten durch die Relation V. verbunden sind, oder durch die Bedingungsgleichung,

$$\text{L.} \ldots 0 = m''^2 - 4m'$$
$$= (S\alpha\beta + S\alpha'\beta')^2 - 4S(V\alpha\alpha' . V\beta'\beta)$$
$$= (S\alpha\beta - S\alpha'\beta')^2 + 4S\alpha\beta' S\alpha'\beta,$$

so mag genügen zu bemerken, dass sie, nach VI., oder nach VII. und IX., zu der symbolischen Gleichung führt,

$$\text{LL} \ldots 0 = \varphi\,\Phi^2,$$

wenn

$$\Phi = \varphi - \tfrac{1}{2}m'';$$

und dass somit ihre Deutung genau gleich derjenigen der analogen Gleichung, XXIX.,

$$\chi\varphi^2 = 0,$$

ist, in der

$$\chi = m'' - \varphi$$

ist, wie sie in (14.) gegeben wurde, und in den folgenden Nebenartikeln.

353. Wenn wir $m = 0$ haben, aber nicht $m' = 0$, noch $m''^2 = 4m'$, so sind die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

Digitized by Google

in φ sämmtlich ungleich, während eine von ihnen wieder null ist, wie vorher; und die beiden Wurzeln der quadratischen und skalar Gleichung mit reellen Coefficienten (347),

$$\text{I.} \ldots 0 = c^2 + m''c + m',$$

die aus der cubischen Gleichung dadurch gebildet wird, dass man φ mit $-c$ vertauscht, und dann durch c dividirt, sind auch nothwendigerweise ungleich, mögen sie reell oder imaginär sein. Wir werden finden, dass wenn diese beiden skalar Wurzeln, c_1, c_2, reell sind, es dann zwei reelle Richtungen, ϱ_1 und ϱ_2, in der festen Ebne Π giebt, welche der Ort (351, 352) der Linie $\varphi\varrho$ ist; sie besitzen die Eigenschaft, dass für jede von ihnen die homogene und vector Gleichung zweiten Grades,

$$\text{II.} \ldots V\varrho\varphi\varrho = 0,$$

oder

$$\varphi\varrho \parallel \varrho,$$

erfüllt wird, ohne dass ϱ verschwindet; nämlich dadurch, dass wir für die erste dieser beiden Richtungen die Gleichung haben,

$$\text{III.} \ldots \varphi\varrho_1 = -c_1\varrho_1,$$

oder

$$\varphi_1\varrho_1 = 0,$$

wenn

$$\varphi_1 = \varphi + c_1;$$

und für die zweite von ihnen die entsprechende Gleichung,

$$\text{IV.} \ldots \varphi\varrho_2 = -c_2\varrho_2,$$

oder

$$\varphi_2\varrho_2 = 0,$$

wenn

$$\varphi_2 = \varphi + c_2;$$

aber keine andere Richtung des reellen und wirklichen Vectors ϱ genügt der Gleichung V., mit Ausnahme jener dritten, von der wir schon in Betracht gezogen haben (351), dass sie der linearen und vector Gleichung,

$$\text{V.} \ldots \varphi\varrho = 0,$$

genügt, in der

$$T\varrho > 0.$$

Es wird sich auch zeigen, dass diese beiden Richtungen, ϱ_1, ϱ_2,

Digitized by Google

nicht nur reell sind, sondern auch rechtwinklig zu einander und zur dritten Richtung ϱ, wenn die lineare Function $\varphi\varrho$ selbstconjugirt ist [349, (4.)], oder wenn die Bedingung erfüllt wird,

$$\text{VI.}\ldots\ S\varphi'\varrho = S\varphi\varrho,$$

oder

$$\text{VI}'\ldots\ S\lambda\varphi\varrho = S\varrho\varphi\lambda,$$

durch die gegebne Form von φ, oder durch die Constanten, welche in die Zusammensetzung des linearen Symbols eingehn; dass dagegen, wenn die Bedingung der Selbstconjugation nicht erfüllt wird, die Wurzeln der quadratischen Gleichung I. auch imaginär sein können: und dass in diesem Falle keine reelle Richtung von ϱ besteht, für welche die vector Gleichung II. vom zweiten Grade durch wirkliche Werthe von ϱ befriedigt wird, mit Ausnahme der einen Richtung, von der wir vorher gesehn haben, dass sie der linearen Gleichung V. genügt.

(1.) Die leichteste Art, die Gleichung II. zu befriedigen zu suchen, anders als durch V., ist die, einen Ausdruck von der Form, $\varrho = x\beta + x'\beta'$, anzunehmen, und der Gleichung, $(\varphi + c)\varrho = 0$, nebst $\varphi\varrho = \beta S\alpha\varrho + \beta' S\alpha'\varrho$ dadurch Genüge zu thun zu suchen, dass man den beiden skalar Gleichungen,

$$\text{VII.}\ldots\ 0 = x(c + S\alpha\beta) + x' S\alpha\beta',$$
$$0 = x'(c + S\alpha'\beta') + x S\alpha'\beta,$$

besonders genügt; sie ergeben, wenn man $x' : x$ eliminirt, die folgende quadratische Gleichung in c,

$$\text{VIII.}\ldots\ (c + S\alpha\beta)(c + S\alpha'\beta') = S\alpha\beta' S\alpha'\beta,$$

der man leicht ansieht, dass sie nur eine andere Form von I. ist. Bezeichnet man daher, wie vorher, mit c_1 und c_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung I., die wir für den Augenblick als reell annehmen wollen, so erhalten wir die beiden reellen Richtungen für ϱ, in der Ebne Π von β, β':

$$\text{IX.}\ldots\ \varrho_1 = \beta(c_1 + S\alpha'\beta') - \beta' S\alpha'\beta,$$
$$= c_1\beta + V\alpha' V\beta'\beta;$$

$$\text{X.}\ldots\ \varrho_2 = \beta(c_2 + S\alpha'\beta') - \beta' S\alpha'\beta,$$
$$= c_2\beta + V\alpha' V\beta'\beta;$$

Digitized by Google

sie genügen den Gleichungen III. und IV. In der That ergiebt der Ausdruck IX.,

$$\varphi\varrho_1 = c_1\varphi\beta + m'\beta = -c_1\varrho_1,$$

oder

$$\varphi_1\varrho_1 = 0,$$

denn wir können ihn so schreiben,

$$\begin{aligned} \text{XI.}\ldots\ \varrho_1 &= (m'' + c_1)\beta - \varphi\beta \\ &= -c_2\beta - \varphi\beta \\ &= -\varphi_2\beta \\ &= -\varphi\beta - m'c_1^{-1}\beta; \end{aligned}$$

und ebenso kann der Ausdruck X. so geschrieben werden,

$$\begin{aligned} \text{XII.}\ldots\ \varrho_2 &= (m'' + c_2)\beta - \varphi\beta \\ &= -c_1\beta - \varphi\beta \\ &= -\varphi_1\beta \\ &= -\varphi\beta - m'c_2^{-1}\beta, \end{aligned}$$

und er ergiebt,

$$\begin{aligned} \varphi\varrho_2 &= c_2\varphi\beta + m'\beta \\ &= -c_2\varrho, \end{aligned}$$

oder

$$\varphi_2\varrho_2 = 0.$$

(2.) Wir können auch schreiben,

$$\begin{aligned} \text{XIII.}\ldots\ \varrho'_1 &= \beta'(c_1 + S\alpha\beta) - \beta S\alpha\beta' \\ &= c_1\beta' + V\alpha V\beta\beta' \\ &= -\varphi_2\beta' \parallel \varrho_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{XIV.}\ldots\ \varrho'_2 &= \beta'(c_2 + S\alpha\beta) - \beta S\alpha\beta' \\ &= c_2\beta' + V\alpha V\beta\beta' \\ &= -\varphi_1\beta' \parallel \varrho_2; \end{aligned}$$

und wir haben daher die Gleichungen,

$$\begin{aligned} \text{XV.}\ldots\ \varphi_1\varrho'_1 &= 0, \\ \varphi_2\varrho'_2 &= 0; \end{aligned}$$

aber die Richtungen von ϱ'_1 und ϱ'_2 sind, nach VIII., dieselben, wie diejenigen von ϱ_1 und ϱ_2, und sie liefern somit keine neue Lösung des eben gelösten Problems.

(3.) Wir haben daher also,

$$\text{XVI.}\ldots \varphi_2\beta' \parallel \varphi_2\beta \parallel \varrho_1 \parallel \varphi_1^{-1}0,$$

und

$$\text{XVI}'\ldots \varphi_1\beta' \parallel \varphi_1\beta \parallel \varrho_2 \parallel \varphi_2^{-1}0;$$

es folgt daraus, dass die Operation φ_2 jede Linie in der festen Ebne von $\varphi\varrho$ auf die feste Richtung von $\varphi_1^{-1}0$ reducirt; und dass, ebenso, die Operation φ_1 jede Linie in derselben festen Ebne von $\varphi\varrho$ auf die andere feste Richtung von $\varphi_2^{-1}0$ reducirt.

(4.) Wir können daher die symbolischen Gleichungen hinschreiben,

$$\text{XVII.}\ldots \varphi_1 \cdot \varphi_2\varphi = 0,$$
$$\varphi_2 \cdot \varphi_1\varphi = 0,$$

in welchen die Punkte fortgelassen werden können; und wir haben in der That die Transformationen,

$$\text{XVIII.}\ldots \varphi_1\varphi_2 = \varphi_2\varphi_1 = (\varphi + c_1)(\varphi + c_2)$$
$$= \varphi^2 - m''\varphi + m'$$
$$= \psi,$$

so dass

$$\varphi_1\varphi_2 \cdot \varphi = \varphi_2\varphi_1 \cdot \varphi = \psi\varphi$$
$$= m$$
$$= 0.$$

(5.) Wenn wir uns ψ_1 aus φ_1, nach derselben allgemeinen Regel (347, XI.), gebildet denken, nach welcher ψ aus φ gebildet wird, so haben wir

$$\text{XIX.}\ldots \psi_1 V\mu\nu = V.\,\varphi'_1\mu\,\varphi'_1\nu$$
$$= V.(\varphi'\mu + c_1\mu)(\varphi'\nu + c_1\nu),$$

und daher, nach der Definition 350, VIII. von χ,

$$\text{XX.}\ldots \psi_1\varrho = \psi\varrho + c_1\chi\varrho + c_1^2\varrho,$$

oder

$$\text{XXI.}\ldots \psi_1 = \psi + c_1\chi + c_1^2;$$

und ebenso

$$\text{XXII.}\ldots \psi_2 = \psi + c_2\chi + c_2^2,$$

selbst wenn m von null verschieden ist, und wenn c_1, c_2 beliebige Skalare sind.

Digitized by Google

(6.) Wenn wir demnach, ohne anzunehmen, dass m verschwindet, an $\psi_1 \varrho$ mit φ_1 operiren, oder den Ausdruck XXI. für ψ_1 symbolisch durch φ_1 multipliciren, so bekommen wir das symbolische Product,

$$\text{XXIII.} \ldots \varphi\ \psi_1 = (\varphi + c_1)(\psi + c_1\chi + c_1^2)$$
$$= \varphi\psi + c_1(\varphi\chi + \psi) + c_1^2(\varphi + \chi) + c_1^3$$
$$= m + c_1 m' + c_1^2 m'' + c_1^3 = m_1,$$

wo m_1 das ist, was der Skalar m wird, wenn φ mit φ_1 vertauscht wird, oder von der Art ist, dass

$$\text{XXIV.} \ldots m_1 S\lambda\mu\nu = S.\varphi'_1\lambda\varphi'_1\mu\varphi'_1\nu$$
$$= S.(\varphi'\lambda + c_1\lambda)(\varphi'\mu + c_1\mu)(\varphi'\nu + c_1\nu);$$

wie aus den Definitionen von $\varphi', \psi, \chi, m, m', m''$ erhellt, und aus den Beziehungen zwischen diesen Symbolen, welche in den vorigen Artikeln aufgestellt worden sind, oder in den Nebenartikeln, welche ihnen angefügt sind.

(7.) Nehmen wir jetzt wieder an, dass $m = 0$, und dass c_1, c_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung I. in c sind, so haben wir, nach XXIII.,

$$\text{XXV.} \ldots \varphi_1\psi_1 = m_1 = 0;$$

und ebenso

$$\text{XXVI.} \ldots \varphi_2\psi_2 = m_2 = 0,$$

wenn m_2 aus m_1 dadurch gebildet wird, dass man c_1 mit c_2 vertauscht.

(8.) Vergleicht man XXV. mit XVII., so gelangt man leicht dazu, das Vorhandensein eines innigen Zusammenhangs zu ahnen, der zwischen ψ_1 und $\varphi_2\varphi$ besteht, denn jede reducirt einen beliebigen Vector auf die feste Richtung von $\varphi_1^{-1}0$, oder von ϱ_1; und in der That sind diese beiden Operationen identisch, denn wir haben, nach XXI., und nach den bekannten Beziehungen zwischen den Symbolen, die Transformationen,

$$\text{XXVII.} \ldots \psi_1 = \psi + c_1\chi + c_1^2$$
$$= (m' - m''\varphi + \varphi^2) + c_1(m'' - \varphi) + c_1^2$$
$$= \varphi^2 - (m'' + c_1)\varphi$$
$$= \varphi^2 + c_2\varphi$$
$$= \varphi\varphi_2;$$

und ebenso ist,

$$\text{XXVIII.} \ldots \psi_2 = \varphi^2 + c_1\varphi = \varphi\varphi_1;$$

während

$$\psi = \varphi_1\varphi_2$$

ist, wie vorher.

(9.) Wir haben somit die neue symbolische Gleichung,

$$\text{XXIX.} \ldots \varphi\varphi_1\varphi_2 = 0,$$

in der die drei symbolischen Factoren φ, φ_1, φ_2 auf irgend welche Weise gruppirt und umgestellt werden können, so dass sie die beiden Gleichungen XVII. einschliessen; und in denen der Gegenstand der Operation ein beliebiger Vector ρ ist. Ihre Deutung ist theilweis schon gegeben worden; aber wir können hinzufügen, dass, während φ jeden Vector auf die feste Ebne Π reducirt, φ_1 jede Linie auf eine andere feste Ebne, Π_1, reducirt, und ebenso φ_2 auf eine dritte Ebne, Π_2; somit reducirt $\varphi_1\varphi_2$, oder $\varphi_2\varphi_1$, eine beliebige Linie auf die feste Richtung, welche der Durchschnitt der beiden Ebnen $\Pi_1\Pi_2$ hat, während sie zwei Linien ρ_1, ρ_2, und daher jede Linie in der Ebne Π zerstört; und jener Durchschnitt muss daher die Richtung von $\varphi^{-1}0$ haben; und ebenso muss die feste Richtung ρ_1 von $\varphi_1^{-1}0$ die des Durchschnitts der Ebnen $\Pi\Pi_2$ sein, da sie diejenige ist, auf welche ein beliebiger Vector durch die zusammengesetzte Operation $\varphi_2\varphi$, oder $\varphi\varphi_2$, reducirt wird (3.); und ρ_2, oder $\varphi_2^{-1}0$, hat die Richtung des Durchschnitts von $\Pi\Pi_1$; während anderseits $\varphi\varphi_2$ jede Linie in Π_1 zerstört, und $\varphi\varphi_1$ jede Linie in Π_2: so dass diese drei Ebnen, und ihre drei Durchschnittslinien, die hauptsächlichsten Elemente für die geometrische Deutung der Gleichung $\varphi\varphi_1\varphi_2 = 0$ sind.

(10.) Die conjugirte Gleichung,

$$\text{XXX.} \ldots \varphi'\varphi'_1\varphi'_2 = 0,$$

kann auf ähnlichem Wege gedeutet werden, und führt so zur Betrachtung eines conjugirten Systems von Ebnen und Linien; nämlich zu den Ebnen Π', Π'_1, Π'_2, welche die Orte von $\varphi'\rho$, $\varphi'_1\rho$, $\varphi'_2\rho$ sind, während die Operationen $\varphi'_1\varphi'_2$, $\varphi'_2\varphi'_1$, und $\varphi'\varphi'_1$ bezüglich sämmtliche Linien in diesen drei Ebnen zerstören, und beliebige Linien auf die festen Richtungen der

Digitized by Google

Durchschnitte, $\Pi'_1\Pi'_2, \Pi'_2\Pi', \Pi'\Pi'_1$, reduciren, welche auch diejenigen von $\varphi'^{-1}0, \varphi'_1{}^{-1}0, \varphi'_2{}^{-1}0$ sind.

(11.) Es ist von Wichtigkeit zu beachten, dass die drei letzten Linien die Normalen zu den drei ersten Ebnen, Π, Π', Π'', sind; und dass ebenso die drei ersteren Linien senkrecht zu den drei letzteren Ebnen sind. Um dies zu beweisen, ist es hinreichend zu beachten, dass

$$\text{XXXI.} \ldots S\varrho'\varphi\varrho = S\varrho\varphi'\varrho' = 0,$$

wenn

$$\varphi'\varrho' = 0,$$

oder dass

$$\varphi\varrho \perp \varphi'^{-1}0;$$

und ebenso, $\varphi'\varrho \perp \varphi^{-1}0$, u. s. w.

(12.) Anstatt $x' : x$ zwischen den beiden Gleichungen VII. zu eliminiren, hätten wir c eliminiren können; und das würde die weitere quadratische Gleichung ergeben haben,

$$\text{XXXII.} \ldots 0 = x^2 S\alpha'\beta + xx'(S\alpha'\beta' - S\alpha\beta) - x'^2 S\alpha\beta';$$

auch ist, wenn $x'_1 : x_1$ und $x'_2 : x_2$ die beiden Werthe von $x' : x$ sind,

$$\text{XXXIII.} \ldots \varrho_1 \parallel x_1\beta + x'_1\beta',$$
$$\varrho_2 \parallel x_2\beta + x'_2\beta',$$

und

$$\text{XXXIV.} \ldots x_1x_2 : (x_1x'_2 + x_2x'_1) : x'_1x'_2$$
$$= -S\alpha\beta' : (S\alpha\beta - S\alpha'\beta') : S\alpha'\beta;$$

daher wird die Bedingung für die Rechtwinkligkeit der beiden Linien ϱ_1, ϱ_2, oder $\varphi_1{}^{-1}0, \varphi_2{}^{-1}0$, durch die Gleichung ausgedrückt,

$$\text{XXXV.} \ldots 0 = -\beta^2 S\alpha\beta' + S\beta\beta'(S\alpha\beta - S\alpha'\beta') + \beta'^2 S\alpha'\beta$$
$$= S.\beta\beta' V(\beta\alpha + \beta'\alpha');$$

und folglich wird sie befriedigt, wenn die gegebne Function φ selbstconjugirt (VI.) ist, denn dann haben wir die Beziehung,

$$\text{XXXVI.} \ldots V\beta\alpha + V\beta'\alpha' = 0;$$

in der That ergiebt die zweigliedrige Form von φ (vergl. 349, XXII.),

$$\text{XXXVII.}\ldots \varphi'\varrho - \varphi\varrho = (\alpha S\beta\varrho - \beta S\alpha\varrho) + (\alpha' S\beta'\varrho - \beta' S\alpha'\varrho) = V.\varrho V(\beta\alpha + \beta'\alpha'),$$

und sie kann nicht unabhängig von ϱ verschwinden, wenn nicht die Constanten der Bedingung XXXVI. genügen.

(13.) Mit dieser Bedingung, dass φ selbstconjugirt sein soll, haben wir daher die Beziehung für die Rechtwinkligkeit,

$$\text{XXXVIII.}\ldots S\varrho_1\varrho_2 = 0,$$

oder

$$\varphi_1^{-1}0 \perp \varphi_2^{-1}0;$$

wenigstens wenn die Richtungen ϱ_1 und ϱ_2 reell sind; und man kann leicht beweisen, dass sie es sind, wie folgt.

Die Bedingung XXXVI. ergiebt,

$$\text{XXXIX.}\ldots 0 = S.\alpha\alpha' V(\beta\alpha + \beta'\alpha') = \alpha^2 S\alpha'\beta + S\alpha\alpha'(S\alpha'\beta' - S\alpha\beta) - \alpha'^2 S\alpha\beta';$$

und daher ist:

$$(\alpha^2 S\alpha'\beta - \alpha'^2 S\alpha\beta')^2 = (S\alpha\alpha')^2 (S\alpha\beta - S\alpha'\beta')^2,$$

$$\alpha^2\alpha'^2(m''^2 - 4m') = \alpha^2\alpha'^2\{(S\alpha\beta - S\alpha'\beta')^2 + 4S\alpha\beta' S\alpha'\beta\}$$

$$= [\alpha^2\alpha'^2 - (S\alpha\alpha')^2](\alpha\beta - S\alpha'\beta')^2 + (\alpha^2 S\alpha'\beta + \alpha'^2 S\alpha\beta')^2 > 0,$$

und

$$\text{XL.}\ldots (S\alpha\beta - S\alpha'\beta')^2 + 4S\alpha\beta' S\alpha'\beta = m''^2 - 4m' > 0;$$

so dass jede der beiden quadratischen Gleichungen, I. (oder VIII.), und XXXII., reelle und ungleiche Wurzeln hat: ein Schluss, der auch auf andere Weise abgeleitet werden kann, aus den Ausdrücken $\beta = a\alpha + b\alpha'$, $\beta' = b\alpha + a'\alpha'$, eine Bedingung, welche uns erlaubt, β und β' zu ersetzen.

(14.) Dieselbe Bedingung XXXVI. zeigt, dass die vier Vectoren $\alpha\beta\alpha'\beta'$ complanar sind, oder dass wir die Beziehungen haben,

$$\text{XLI.}\ldots S\alpha\beta\beta' = 0,\quad S\alpha'\beta\beta' = 0,\quad V(V\alpha\alpha'.V\beta'\beta) = 0;$$

und daher ist $V\alpha\alpha'$, oder $\varphi^{-1}0$ jetzt normal zur Ebne Π; und daher bilden, nach (13.), die drei Richtungen,

$$\text{XLII.}\ldots \varrho, \varrho_1, \varrho_2, \quad \text{oder} \quad \varphi^{-1}0, \varphi_1^{-1}0, \varphi_2^{-1}0,$$

Digitized by Google

ein reelles und rechtwinkliges System, wenn die Function φ selbstconjugirt (VI.) ist.

(15.) In der gegenwärtigen Reihe von Nebenartikeln zu 353 nehmen wir an, dass die drei Wurzeln der cubischen Gleichung in φ sämmtlich ungleich sind; die Fälle mit gleichen Wurzeln, in denen $m = 0$, sind in einer vorhergehenden Reihe (352) durchgesprochen worden; doch mag immerhin bemerkt werden, dass wenn eine selbstconjugirte Function $\varphi\,\varrho$ auf die eingliedrige Form $\beta\, S\alpha\varrho$ zurückführbar ist, wir die Relation $V\beta\alpha = 0$ haben müssen; und dass somit die Linie β, auf deren feste Richtung [vgl. 352, (5.) und (6.)] die Operation φ denn einen beliebigen Vector reducirt, senkrecht zur festen Ebne [352, (7.)] ist, in welcher jede Linie durch die Operation φ zerstört wird.

(16.) Im Allgemeinen ist augenscheinlich, wenn φ somit selbstconjugirt ist, dass die drei Ebnen Π', Π'_1, Π'_2, welche die Orte von $\varphi'\varrho, \varphi'_1\varrho, \varphi'_2\varrho$ sind [vergl. (10.)], mit den Ebnen Π, Π_1, Π_2 zusammenfallen, welche die Orte von $\varphi\,\varrho, \varphi_1\varrho, \varphi_2\varrho$ sind.

(17.) Wenn φ nicht selbstconjugirt ist, so dass $\varphi\,\varrho$ und $\varphi'\varrho$ allgemein nicht gleich sind, ist hervorgehoben worden, dass die quadratische, skalar Gleichung I., und daher auch die symbolische, cubische Gleichung in φ, imaginäre Wurzeln haben kann; und dass, in diesem Falle, die vector Gleichung II. vom zweiten Grade nicht durch irgend eine reelle Richtung von ϱ befriedigt werden kann, mit Ausnahme der einen, welche die lineare Gleichung V. befriedigt, oder welche zur Folge hat, dass $\varphi\,\varrho$ selbst verschwindet, während ϱ reell und wirklich bleibt. Als ein Beispiel für solche imaginären Skalare, als Wurzeln von I., und von — wie wir sagen können — imaginären Richtungen, oder imaginären Vectoren [vergl. 214, (4.)], welche diesen Skalaren entsprechen, und selbst imaginäre Wurzeln von II. sind, können wir die sehr einfachen Ausdrücke nehmen (vergl. 349, XII.),

$$\text{XLIII.}\ .\ .\ \varphi\,\varrho = V\gamma\varrho,$$
$$\varphi'\varrho = -V\gamma\varrho;$$

in ihr bezeichnet γ einen gewissen reellen und gegebnen Vector, der augenscheinlich die Bedingung VI. nicht erfüllt; die

Function φ ist hier der negative Werth ihres eignen Conjugirten, so dass ihr selbstconjugirter Theil φ_0 null ist (vergl. 349, XIII.). Wir haben somit,

$$\text{XLIV.}\ldots\ m_0 = 0, \quad m'_0 = 0, \quad m''_0 = 0,$$
$$\varphi_0 = 0, \quad \psi_0 = 0, \quad \chi_0 = 0,$$

und folglich, nach den Nebenartikeln zu 349 und 350,

$$\text{XLV.}\ldots\ m = 0, \quad m' = -\gamma^2, \quad m'' = 0,$$
$$\psi\varrho = -\gamma S\gamma\varrho, \quad \chi\varrho = -V\gamma\varrho;$$

die quadratische Gleichung I., und ihre Wurzeln c_1, c_2, werden daher,

$$\text{XLVI.}\ldots\ c^2 - \gamma^2 = 0,$$
$$c_1 = +\sqrt{-1}\,.\,T\gamma,$$
$$c_2 = -\sqrt{-1}\,.\,T\gamma,$$

wo $\sqrt{-1}$ die Imaginäre der Algebra ist [vergl. 214, (3.)]; somit haben wir, nach XX., oder XXI. und XXII., jetzt

$$\text{XLVII.}\ldots\ \psi_1\sigma = -\gamma S\gamma\sigma - c_1 V\gamma\sigma + c_1{}^2\sigma$$
$$= (\gamma - c_1)V\gamma\sigma,$$
$$\psi_2\sigma = (\gamma - c_2)V\gamma\sigma;$$

daher ist

$$S\gamma\psi_1\sigma = 0, \quad V\gamma\psi_1\sigma = \gamma\psi_1\sigma,$$

u. s. w., und

$$\text{XLVIII.}\ldots\ \varphi_1\psi_1\sigma = (\varphi + c_1)\psi_1\sigma = (\gamma + c_1)(\gamma - c_1)V\gamma\sigma$$
$$= (\gamma^2 - c_1{}^2)V\gamma\sigma = 0,$$

und ebenso ist

$$\text{XLVIII.}'\ldots\ \varphi_2\psi_2\sigma = 0;$$

wenn wir daher einen beliebigen Vector σ nehmen, und ihn von zwei (imaginären) Vectoren ϱ_1 und ϱ_2 durch die (imaginären) Operationen ableiten (oder besser abgeleitet denken), so erhalten wir die Gleichungen (vergl. III. und IV.),

$$\text{XLIX.}\ldots\ \varrho_1 = \psi_1\sigma, \quad \varphi_1\varrho_1 = 0,$$
$$\varphi\varrho_1 = c_1\varrho_1, \quad V\varrho_1\varphi\varrho_1 = 0,$$

und

$$\text{L.}\ldots\ \varrho_2 = \psi_2\sigma, \quad \varphi_2\varrho_2 = 0,$$
$$\varphi\varrho_2 = -c_2\varrho_2, \quad V\varrho_2\varphi\varrho_2 = 0,$$

und sie sind wenigstens symbolisch wahr. Wir finden daher,

Digitized by Google

dass die beiden imaginären Richtungen, ϱ_1 und ϱ_2 (wenigstens in einem symbolischen Sinne, und so weit es die Berechnung betrifft), die vector Gleichung II. befriedigen, oder dass ϱ_1 und ϱ_2 zwei imaginäre vector Wurzeln von $V\varrho\varphi\varrho = 0$ sind; dass dagegen die vector Gleichung II., wie vorher ausgesprochen wurde, keine reelle vector Wurzel ϱ hat, denn die skalar quadratische I. hat hier imaginäre Wurzeln, mit Ausnahme der einen in der Richtung des gegebnen und reellen Vectors γ, welcher der linearen Gleichung V. genügt, oder welcher $\varphi\varrho = 0$ ergiebt.

(18.) Dies besondere Beispiel hätte, durch eine weniger allgemeine Methode, einfacher behandelt werden können, wie folgt. Wenn wir der Gleichung zu genügen wünschen,

$$\text{LI.}\ldots 0 = V.\varrho V\gamma\varrho = \varrho S\gamma\varrho - \varrho^2\gamma;$$

welche die weiteren Gleichungen ergiebt,

$$\text{LII.}\ldots 0 = V\gamma\varrho . S\gamma\varrho,$$
$$0 = \varrho^2 V\gamma\varrho,$$

wenn wir an ihr mit $V.\gamma$ und $V.\varrho$ operiren; wenn wir ferner die Annahme, $\varphi\varrho = V\gamma\varrho = 0$, zu vermeiden wünschen, so müssen wir den beiden skalar Gleichungen,

$$\text{LIII.}\ldots S\gamma\varrho = 0, \qquad \varrho^2 = 0,$$

zu genügen suchen; und umgekehrt, wenn wir ihnen durch irgend ein, reelles oder imaginäres, ϱ genügen können, so werden wir der vector Gleichung LI., reell oder symbolisch, Genüge gethan haben. Jetzt wird die erste Gleichung LIII. befriedigt, wenn wir den Ausdruck annehmen,

$$\text{LIV.}\ldots \varrho = (c + \gamma)\, V\gamma\sigma = V\gamma\sigma . (c - \gamma),$$

in dem σ ein beliebiger Vector, und c irgend ein Skalar ist, oder ein Zeichen, welches den Gesetzen für Skalare unterworfen ist; und der Ausdruck LIV. für ϱ ergiebt, mit seiner eben angegebenen Umformung,

$$\text{LV.}\ldots \varrho^2 = (c^2 - \gamma^2)(V\gamma\sigma)^2 = 0,$$

wenn

$$c^2 - \gamma^2 = 0;$$

die quadratische Gleichung XLVI. entsteht daher von Neuem, und wir haben dieselben imaginären Wurzeln, und imaginären Richtungen, wie vorher.

(19.) Geometrisch ist der imaginäre Charakter des letzten Problems, der Gleichung $V.\varrho V\gamma\varrho = 0$ durch irgend eine Richtung von ϱ zu genügen, mit Ausnahme derjenigen der gegebnen Linie γ, sofort ersichtlich aus dem Umstande, dass $\varphi\varrho$, oder $V\gamma\varrho$, hier ein Vector ist, senkrecht zu ϱ, wenn beide wirkliche Linien sind; und daher kann der eine auch nicht dem andern parallel sein, so lange als beide reell* sind.

354. In den drei vorhergehenden Artikeln, und in den beigefügten Nebenartikeln, haben wir durchweg angenommen, dass das absolute Glied der cubischen Gleichung in φ verschwindet, oder dass die Bedingung $m = 0$ erfüllt wird; und in diesem Falle haben wir gesehn (351), dass es stets möglich ist, der linearen Gleichung $\varphi\varrho = 0$ zu genügen, durch wenigstens einen reellen und wirklichen Werth von ϱ, mit einem beliebigen skalar Coefficienten; oder durch wenigstens eine reelle Richtung. Es ist jetzt leicht zu zeigen, dass es doch stets wenigstens eine reelle Richtung giebt, für welche die vector Gleichung vom zweiten Grade,

$$\text{I.}\ldots\ V\varrho\varphi\varrho = 0,$$

welche schon, in Verbindung mit der Bedingung $m = 0$, in Betracht gezogen worden ist (353), erfüllt wird, obwohl umgekehrt [vergl. 351, (4.)] die Function $\varphi\varrho$ nicht für irgend einen wirklichen Vector ϱ verschwinden kann, wenn wir nicht so haben $m = 0$; und dass, wenn die Function φ selbstconjugirt ist, dann die Gleichung I. stets wenigstens durch drei reelle und rechtwinklige Richtungen befriedigt wird, aber nicht allgemein durch mehr Richtungen als durch drei; obgleich in dem Falle, wenn Selbstconjugation statt hat, nämlich wenn

$$\text{II.}\ldots\ \varphi'\varrho = \varphi\varrho,$$

oder

$$\text{II}'.\ldots\ S\lambda\varphi\varrho = S\varrho\varphi\lambda,$$

* Demnach sind die beiden imaginären Richtungen, welche wir vorher für ϱ fanden, wie leicht zu sehn ist, diejenigen, welche in der neueren Geometrie die Richtungen von Linien genannt werden, welche in einer gegebnen Ebne, die hier senkrecht zur gegebnen Linie γ ist, zu den Kreispunkten in der Unendlichkeit gezogen sind; und als der imaginäre Charakter der angenommenen Richtungen kann angesprochen werden, dass jede, in der gegebnen Ebne, ihre eigne Senkrechte ist.

Digitized by Google

für sämmtliche Werthe der Vectoren ϱ und λ, die Gleichung I. zufällig für eine reelle Richtung von ϱ wahr werden kann, und für jede Richtung senkrecht zu ihr: oder selbst für alle möglichen Richtungen, je nach dem besonderen System von Constanten, welche in die Zusammensetzung der Function $\varphi\varrho$ eingehn. Ich werde auch zeigen, dass die skalar (oder algebraische) und cubische Gleichung,

$$\text{III.} \ldots 0 = m + m'c + m''c^2 + c^3,$$

welche aus der symbolischen und cubischen Gleichung 350, I., dadurch gebildet wird, dass man φ mit $-c$ vertauscht, mit ausserordentlicher Bedeutung in dieser ganzen Theorie vorkommt; und dass die quadratische und vector Gleichung I., wenn sie eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln hat, durch nur eine reelle Richtung von ϱ befriedigt wird; aber dass man dann sagen kann [vergl. 353, (17.)], sie werde auch durch zwei imaginäre Richtungen befriedigt, oder sie habe zwei imaginäre und vector Wurzeln: so dass man sagen kann, die Gleichung I. stelle allgemein ein System von drei graden Linien dar, von denen wenigstens eine reell sein muss. Für den Fall II. lässt sich beweisen, dass die skalar Wurzeln von III. stets reell sind; so dass, wenn m_0, m'_0 und m''_0 (wie in den Nebenartikeln zu 349 und 350) aus dem selbstconjugirten Theil $\varphi_0\varrho$ irgend einer linearen und vector Function $\varphi\varrho$ gebildet werden, wie m, m' und m'' aus der Function $\varphi\varrho$ selbst gebildet werden, dann die neue cubische Gleichung,

$$\text{IV.} \ldots 0 = m_0 + m'_0 c + m''_0 c^2 + c^3,$$

welche so resultirt, niemals imaginäre Wurzeln haben kann.

(1.) Wenn wir schreiben,

$$\text{V.} \ldots \Phi\varrho = \varphi\varrho + c\varrho, \qquad \Phi'\varrho = \varphi'\varrho + c\varrho,$$

oder kurz,

$$\text{V}' \ldots \Phi = \varphi + c,$$
$$\Phi' = \varphi' + c,$$

wo c ein beliebiger Skalar ist, und wenn wir durch Ψ, Ψ' und M bezeichnen, was ψ, ψ' und m werden, wenn man φ mit $\varphi + c$, oder mit Φ, vertauscht, so zeigen die Rechnungen in 353, (5.), (6.), dass wir die Ausdrücke haben,

$$\text{VI.}\ldots \quad \Psi = \psi + c\chi + c^2,$$
$$\Psi' = \psi' + c\chi' + c^2,$$

und

$$\text{VII.}\ldots \quad M = m + m'c + m''c^2 + c^3,$$

nebst

$$\text{VIII.}\ldots \quad M = \Phi\Psi = \Psi\Phi = \Phi'\Psi' = \Psi'\Phi'.$$

(2.) Daraus kann man schliessen, dass die Functionen χ, χ', und die Constanten m', m'' werden,

$$\text{IX.}\ldots \quad X = D_c\Psi = \chi + 2c,$$
$$X' = D_c\Psi' = \chi' + 2c,$$

$$\text{X.}\ldots \quad \begin{cases} M' = D_c M = m' + 2m''c + 3c^2, \\ M'' = \frac{1}{2}D_c^2 M = m'' + 3c; \end{cases}$$

und es lässt sich verificiren, dass

$$\text{XI.}\ldots \quad \Phi + X = \Phi' + X' = M'',$$
$$\Phi X + \Psi = \Phi' X' + \Psi' = M',$$

wie wir, nach den Nebenartikeln zu 350, hatten,

$$\varphi + \chi = \varphi' + \chi' = m'',$$
$$\varphi\chi + \psi = \varphi'\chi' + \psi' = m'.$$

(3.) Das neue lineare Symbol Φ muss der neuen cubischen Gleichung genügen,

$$\text{XII.}\ldots \quad 0 = M - M'\Phi + M''\Phi^2 - \Phi^3;$$

sie kann demnach sofort aus der früheren cubischen Gleichung 350, I., unter der Form abgeleitet werden,

$$\text{XIII.}\ldots \quad 0 = m + m'(c - \Phi) + m''(c - \Phi)^2 + (c - \Phi)^3.$$

(4.) Jetzt ist es stets möglich, der Bedingung,

$$\text{XIV.}\ldots \quad M = 0,$$

dadurch zu genügen, dass man für c eine reelle Wurzel der cubischen skalar Gleichung III. einsetzt; und man kann so die neue symbolische cubische Gleichung XII. auf die Form bringen,

$$\text{XV.}\ldots \quad 0 = \Phi^3 - M''\Phi^2 + M'\Phi;$$

welche der Form,

$$0 = \varphi^3 - m''\varphi^2 + m'\varphi, \qquad 352, \text{ II.},$$

Digitized by Google

vollkommen ähnlich ist, und zu analogen Folgerungen führt, die hier nicht im Einzelnen entwickelt zu werden brauchen, denn sie können leicht durch Jeden vervollständigt werden, der sich die Mühe nehmen will, die wenigen letzten Reihn von Nebenartikeln wieder zu lesen.

(5.) Zum Beispiel, reducirt die Operation Ψ (vergl. 351) einen beliebigen Vector auf eine gegebne Richtung; und die Operation Φ zerstört jede Linie in dieser Richtung, wenn nicht grade statt hat, dass $\Psi\varrho$ beständig verschwindet, ein Fall, in welchem $M' = 0$, und $\Phi\varrho$ (wenn es nicht identisch null ist) eine eingliedrige Form annimmt, die sich auf null reducirt [vergl. 352, (7.)], für jede Richtung von ϱ in einer gegebnen Ebne: so dass, in jedem Falle, es wenigstens einen reellen Weg giebt, der vector Gleichung $\Phi\varrho = 0$ zu genügen, und daher auch, wie vorher versichert wurde, der Gleichung I., ohne dass man bewirkt, dass ϱ selbst verschwindet.

(6.) Und da die Gleichung I. so geschrieben werden kann,

$$\text{XVI.} \ldots V\varrho\,\Phi\varrho = 0,$$

oder

$$\Phi\varrho \parallel \varrho,$$

so sehn wir, dass sie befriedigt werden kann, ohne dass $\Phi\varrho$ verschwindet, wenn die neue skalar und quadratische Gleichung,

$$\text{XVII.} \ldots 0 = C^2 + M''C + M',$$

(vergl. 353, I.) reelle und ungleiche Wurzeln C_1, C_2 hat; denn wenn wir dann schreiben,

$$\text{XVIII.} \ldots \Phi_1 = \Phi + C_1,$$
$$\Phi_2 = \Phi + C_2,$$

so hat die Linie $\Phi\varrho$ allgemein zu ihrem Ort eine gegebne Ebne, und es giebt daher zwei reelle und verschiedene Richtungen ϱ_1 und ϱ_2 in dieser Ebne, für deren eine $\Phi_1\varrho_1 = 0$ ist, während für die andere $\Phi_2\varrho_2 = 0$ ist; so dass jede XVI., oder I., befriedigt; und sie sind genau die festen Richtungen von $\Psi_1\varrho$ und $\Psi_2\varrho$, wenn Ψ_1 und Ψ_2 dadurch aus Ψ gebildet werden, dass man bezüglich Φ_1 und Φ_2 mit Φ vertauscht.

(7.) Fälle, in denen die Wurzeln gleich und imaginär sind, brauchen hier nicht behandelt zu werden; aber es mag

nebenbei bemerkt werden, dass wenn die Function $\varphi\varrho$ die besondere Form,

$$\text{XIX.} \ldots \varphi\varrho = g\varrho,$$

hat (g ist hier irgend eine skalar Constante), dann

$$\text{XX.} \ldots (g - \varphi)^3 = 0$$

ist, und

$$\text{XXI.} \ldots M = (g + c)^3;$$

die cubische Gleichung XIV., oder III., hat somit lauter gleiche Wurzeln, und die Gleichung I. wird, in diesem besonderen Falle, durch jede Richtung von ϱ befriedigt.

(8.) Dass allgemein ein reelles und rechtwinkliges System von drei Richtungen besteht, welche I. befriedigen, wenn die Bedingung II. erfüllt wird, kann wie in 353, (14.) bewiesen werden; und es ist unnöthig bei dem Fall zu verweilen, in welchem dadurch, dass zwei Wurzeln der cubischen Gleichung gleich werden, sämmtliche Linien in einer gegebnen Ebne, und auch die Normale zu dieser Ebne, vector Wurzeln von I. sind, mit derselben Bedingung II.

(9.) Und da die quadratische Gleichung, $0 = c^2 + m''c + m'$ (353, I.), stets, wie wir bewiesen haben, reelle Wurzeln [353, (13.)] hat, wenn $\varphi'\varrho = \varphi\varrho$ ist, so muss die analoge quadratische Gleichung XVII. ebenfalls reelle Wurzeln, C_1, C_2, haben; und daraus folgt unmittelbar (vergl. XII. und XIII.), dass die cubische Gleichung III., unter derselben Bedingung von Selbstconjugation, drei reelle Wurzeln, c, $c + C_1$, $c + C_2$, hat; und daher, dass die andere cubische Gleichung IV., welche aus dem selbstconjugirten Theil φ_0 der allgemeinen linearen und vector Function φ gebildet wird, und welche deswegen so bezeichnet werden kann,

$$\text{XXII.} \ldots M_0 = 0,$$

Wurzeln hat, welche stets reell sind, wie vorher ausgesprochen wurde.

(10.) Wenn wir in gleicher Weise durch Φ_0 das Symbol $\varphi_0 + c$ bezeichnen, so wird die Gleichung $m = m_0 - S\gamma\varphi_0\gamma$ (349, XXVI., vergl. 349, XXI.),

$$\text{XXIII.} \ldots M = M_0 - S\gamma\Phi_0\gamma;$$

Digitized by Google

und daraus finden wir, wenn wir Potenzen von c vergleichen, die Beziehungen,

$$m' = m'_0 - \gamma^2,$$

und,

$$m'' = m''_0,$$

wieder, wie in 350, (1.).

(11.) In einem ähnlichen Sinne wird die Gleichung $m\varphi' V\mu\nu = V.\psi\mu\psi\nu$,

$$\text{XXIV.}\ldots M\Phi' V\mu\nu = V.\Psi\mu\Psi\nu,$$

[vergl. 348, (1.)], in welcher μ und ν beliebige Vectoren sind, und c ein beliebiger Skalar ist; oder vollständiger,

$$\text{XXV.}\ldots (m + m'c + m''c^2 + c^3)(\varphi' + c)V\mu\nu = V.(\psi\mu + c\chi\mu + c^2\mu)(\psi\nu + c\chi\nu + c^2\nu);$$

und daraus folgen die neuen Gleichungen,

$$\text{XXVI.}\ldots (m + m'\varphi')V\mu\nu = V(\psi\mu.\chi\nu - \psi\nu.\chi\mu),$$
$$\text{XXVII.}\ldots (m' + m''\varphi')V\mu\nu = V(\mu\psi\nu - \nu\psi\mu + \chi\mu.\chi\nu),$$
$$\text{XXVIII.}\ldots (m'' + \varphi')V\mu\nu = V(\mu\chi\nu - \nu\chi\mu);$$

sie können alle auf andere Weise bewiesen werden, und aus der letzten von ihnen können wir dadurch, dass wir φ mit ψ vertauschen, u. s. w., auf die weitere Gleichung von derselben Art schliessen,

$$\text{XXIX.}\ldots (m' + \psi')V\mu\nu = V(\mu\varphi\chi\nu + \nu\varphi\chi\mu).$$

(12.) Als ein Beispiel für das Vorhandensein eines reellen und rechtwinkligen Systems von drei Richtungen (8.), wie es im Zusammenhang durch eine Gleichung von der Form I. dargestellt wird, und eines Systems von drei reellen Wurzeln der cubischen skalar Gleichung III., wenn die Bedingung II. erfüllt wird, wollen wir die Form nehmen,

$$\text{XXX.}\ldots \varphi\varrho = g\varrho + V\lambda\varrho\mu = \varphi'\varrho,$$

in der g irgend ein reeller und gegebner Skalar, und λ, μ irgend welche reellen und nicht-parallelen gegebnen Vectoren sind; denn auf diese Form kann — wie wir bald finden werden — jede selbstconjugirte Function $\varphi_0\varrho$ gebracht werden. Wir haben jetzt, nach einigen Reductionen,

Digitized by Google

$$\text{XXXI.}\ldots\ \psi\varrho = V\lambda\varrho\mu\, S\lambda\mu - V\lambda\mu\, S\lambda\varrho\mu - g(\lambda\, S\mu\varrho + \mu\, S\lambda\varrho) + g^2\varrho,$$

$$\text{XXXII.}\ldots\ \chi\varrho = -(\lambda\, S\mu\varrho + \mu\, S\lambda\varrho) + 2g\varrho,$$

und

$$\text{XXXIII.}\ldots\ m = (g - S\lambda\mu)(g^2 - \lambda^2\mu^2),$$
$$m' = -\lambda^2\mu^2 - 2g\, S\lambda\mu + 3g^2,$$
$$m'' = -S\lambda\mu + 3g;$$

wo der Theil von $\psi\varrho$, welcher unabhängig von g ist, auf verschiedene andere Formen gebracht werden kann, wie zum Beispiel auf die folgende,

$$\text{XXXIV.}\ldots\ V(\lambda\varrho\mu\, S\lambda\mu - \lambda\mu\, S\lambda\varrho\mu) = \lambda\varrho\mu S\lambda\mu - \lambda\mu S\lambda\varrho\mu$$
$$= \lambda(\varrho\, S\lambda\mu + S\lambda\mu\varrho)\mu$$
$$= \tfrac{1}{2}\lambda(\lambda\mu\varrho + \varrho\lambda\mu)\mu$$
$$= \lambda(\lambda S\mu\varrho + \mu S\lambda\varrho - \lambda\varrho\mu)\mu,$$

u. s. w.; und Φ, Ψ, X, M, M', M'' können aus φ, ψ, χ, m, m', m'' einfach dadurch gebildet werden, dass man g mit $c + g$ vertauscht. Die Gleichung $M = 0$ hat daher hier drei reelle und ungleiche Wurzeln, nämlich die drei folgenden,

$$\text{XXXV.}\ldots\ c = -g + S\lambda\mu,$$
$$c + C_1 = -g + T\lambda\mu,$$
$$c + C_2 = -g - T\lambda\mu;$$

und für $\Psi\varrho$ findet man die entsprechenden Formen,

$$\text{XXXVI.}\ldots\ \Psi\varrho = V\lambda\mu\, S\lambda\mu\varrho,$$
$$\Psi_1\varrho = -(\lambda\, T\mu + \mu\, T\lambda)\, S.\varrho(\lambda\, T\mu + \mu\, T\lambda),$$
$$\Psi_2\varrho = -(\lambda\, T\mu - \mu\, T\lambda)\, S.\varrho(\lambda\, T\mu - \mu\, T\lambda).$$

Somit haben $\Psi\varrho$, $\Psi_1\varrho$, und $\Psi_2\varrho$ in der That die drei festen und rechtwinkligen Richtungen von $V\lambda\mu$, $\lambda\, T\mu + \mu\, T\lambda$, und $\lambda\, T\mu - \mu\, T\lambda$, nämlich die Richtung der Normale zur gegebnen Ebne von λ, μ, und diejenigen der Halbirungslinien der Winkel, welche diese beiden gegebnen Linien mit einander bilden; und sie sind demnach die einzigen Richtungen, welche der vector Gleichung vom zweiten Grade genügen,

$$\text{XXXVII.}\ldots\ (V\varrho\varphi\varrho = V.\varrho V\lambda\varrho\mu =)\ V\varrho\lambda\, S\mu\varrho + V\varrho\mu\, S\lambda\varrho = 0$$

so dass diese letzte Gleichung, wie zu erwarten war, ein

Digitized by Google

System von drei geraden Linien, bezüglich in diesen drei Richtungen, darstellt.

(13.) Wenn c_1, c_2, c_3 die drei (reellen oder imaginären) Wurzeln der cubischen Gleichung $M = 0$ bezeichnen, und wenn wir schreiben,

$$\text{XXXVIII.} \ldots \begin{aligned} \Phi_1 &= \varphi + c_1, \\ \Phi_2 &= \varphi + c_2, \\ \Phi_3 &= \varphi + c_3, \end{aligned}$$

so werden die entsprechenden Werthe von Ψ sein (vergl. VI.),

$$\text{XXXIX.} \ldots \begin{aligned} \Psi_1 &= \psi + c_1\chi + c_1^2, \\ \Psi_2 &= \psi + c_2\chi + c_2^2, \\ \Psi_3 &= \psi + c_3\chi + c_3^2; \end{aligned}$$

und wir haben auch die Beziehungen,

$$\text{XL.} \ldots \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = -m'' = -\varphi - \chi, \\ c_2c_3 + c_3c_1 + c_1c_2 = +m' = \varphi\chi + \psi, \\ c_1c_2c_3 = -m = -\varphi\psi; \end{cases}$$

und danach ist leicht auf die Ausdrücke zu schliessen,

$$\text{XLI.} \ldots \begin{aligned} \Phi_1 &= (c_2 - c_3)^{-1}(\Psi_3 - \Psi_2), \\ \Phi_2 &= (c_3 - c_1)^{-1}(\Psi_1 - \Psi_3), \\ \Phi_3 &= (c_1 - c_2)^{-1}(\Psi_2 - \Psi_1); \end{aligned}$$

sie setzen uns in den Stand, die Functionen $\Phi_1\varrho$, $\Phi_2\varrho$, $\Phi_3\varrho$ zweigliedrig (vergl. 351, u. s. w.) auszudrücken, wenn $\Psi_1\varrho$, $\Psi_2\varrho$, $\Psi_3\varrho$ als Monome ausgedrückt worden sind, und die (reellen oder imaginären) Ebnen anzugeben, welche die Orte der Linien $\Phi_1\varrho$, $\Phi_2\varrho$, $\Phi_3\varrho$ sind.

(14.) Demgemäss findet man, dass die drei Operationen, Φ, Φ_1, Φ_2, durch welche Linien in den drei zuletzt bestimmten Richtungen (12.) zerstört, oder auf null reducirt werden, und welche sich zuerst selbst unter den Formen darbieten,

$$\text{XLII.} \ldots \begin{aligned} \Phi\varrho &= \lambda S\mu\varrho + \mu S\lambda\varrho, \\ \Phi_1\varrho &= V\lambda\varrho\mu + \varrho T\lambda\mu, \\ \Phi_2\varrho &= V\lambda\varrho\mu - \varrho T\lambda\mu, \end{aligned}$$

die Transformationen zulassen,

$$\text{XLIII.} \ldots \Phi\varrho = \frac{\Psi_2\varrho - \Psi_1\varrho}{2T\lambda\mu};$$

$$\Phi_1\varrho = \frac{\Psi_1\varrho - \Psi\varrho}{T\lambda\mu + S\lambda\mu};$$

$$\Phi_2\varrho = \frac{\Psi\varrho - \Psi_1\varrho}{T\lambda\mu - S\lambda\mu};$$

in denen Ψ, Ψ_1, Ψ_2 die vorigen Formen XXXVI. haben; und die Orte von $\Phi\varrho$, $\Phi_1\varrho$, $\Phi_2\varrho$ bilden ein System von drei rechtwinkligen Ebnen.

(15.) Im Allgemeinen ergeben die Beziehungen (13.) auch [vergl. 353, (8.)],

$$\text{XLIV.} \ldots \begin{aligned} \Psi_1 &= \Phi_2\Phi_3, \\ \Psi_2 &= \Phi_3\Phi_1, \\ \Psi_3 &= \Phi_1\Phi_2, \end{aligned}$$

und

$$\text{XLV.} \ldots \Phi_1\Psi_1 = \Phi_2\Psi_2 = \Phi_3\Psi_3 = \Phi_1\Phi_2\Phi_3 = 0,$$

und danach ist auch,

$$\text{XLVI.} \ldots \Psi_1\Psi_2 = \Psi_2\Psi_3 = \Psi_3\Psi_1 = 0,$$

die Zeichen (in irgend einem System von dieser Art) lassen sich nach Belieben versetzen und in Gruppen zusammenfassen; wenn daher die Wurzeln von $M = 0$ reell und ungleich sind, so entsteht daraus ein System dreier reellen und verschiedenen Ebnen, welche mit der Deutung der symbolischen Gleichung, $\Phi_1\Phi_2\Phi_3 = 0$, in genau demselben Zusammenhang stehn, wie die drei Ebnen in 353, (9.) mit der entsprechenden Gleichung, $\varphi\varphi_1\varphi_2 = 0$.

(16.) Und wenn die cubische Gleichung zwei imaginäre Wurzeln hat, so kann man daher sagen, dass es hier eine reelle Ebne [wie die Ebne $\perp\gamma$ in 353, (18.), 19.)] giebt, welche die beiden imaginären Richtungen enthält, die dann der Gleichung I. genügen; und zwei imaginäre Ebnen, welche diese beiden Richtungen bezüglich enthalten, und einander in einer reellen Linie schneiden (wie, zum Beispiel, die Linie γ eine solche in dem erwähnten Beispiel ist), nämlich in der einen reellen vector Wurzel derselben Gleichung I.

355. Einiges weitere Licht kann man dadurch auf die

Digitized by Google

vector Gleichung vom zweiten Grade werfen, dass man das System der beiden skalar Gleichungen betrachtet,

$$\text{I.} \ldots S\lambda\varrho\varphi\varrho = 0,$$

und

$$\text{II.} \ldots S\lambda\varrho = 0,$$

und der Bedingung für die Realität der beiden* Richtungen, ϱ_1 und ϱ_2, nachforscht, durch welche sie allgemein befriedigt werden, und für deren jede die Ebne von ϱ und $\varphi\varrho$ allgemein die gegebne Linie λ in I. enthält, oder die Linie, welche senkrecht zum ebnen Ort II. von ϱ ist. Wir werden finden, dass diese beiden Richtungen stets reell und rechtwinklig sind (mit der Ausnahme, dass sie unbestimmt werden können), wenn die lineare Function φ ihre eigne Conjugirte ist; und dass daher, wenn λ eine Wurzel ϱ_0 der vector Gleichung,

$$\text{III.} \ldots V\varrho\varphi\varrho = 0,$$

ist, welche schon anderweitig discutirt worden ist, die Linien ϱ_1 und ϱ_2 auch Wurzeln dieser Gleichung sind; die allgemeine Existenz (354) eines Systems dreier reellen und rechtwinkligen Richtungen, welche der Gleichung III. genügen, wenn $\varphi'\varrho = \varphi\varrho$, ist somit von Neuem bewiesen; und daraus folgt auch ein neuer Beweis für die Realität der skalar Wurzeln der cubischen Gleichung $M = 0$, für den Fall, wenn φ selbstconjugirt ist; und daher auch für die nothwendige Realität der Wurzeln der weiteren cubischen Gleichung, $M_0 = 0$, welche aus dem selbstconjugirten Theil φ_0 der allgemeinen linearen und vector Function φ gebildet wird (354, IV. oder XXII.), wie $M = 0$ aus φ gebildet wurde.

(1.) Es mögen λ, μ, ν ein System dreier rechtwinkligen vector Einheiten sein, welche in jeder Hinsicht den Gesetzen (182, 183) der Symbole i, j, k folgen. Schreibt man dann,

---

* Geometrisch stellt die Gleichung I. einen Kegel zweiten Grades dar, dessen eine Seite λ ist, und in dem drei weitere Seiten die drei Linien ϱ sind, welche III. genügen; und II. stellt eine Ebne durch die Spitze, senkrecht zur Seite λ, dar. Die beiden gesuchten Richtungen sind somit die beiden Seiten, in welchen diese Ebne den Kegel schneidet.

$$\text{IV.} \ldots \varrho = y\mu + z\nu,$$

und daher

$$\lambda\varrho = y\nu - z\mu,$$
$$\varphi\varrho = y\varphi\mu + z\varphi\nu,$$

so wird der Gleichung II. Genüge gethan, und I. wird,

$$\text{V.} \ldots 0 = y^2 S\nu\varphi\mu + yz(S\nu\varphi\nu - S\mu\varphi\mu) - z^2 S\mu\varphi\nu;$$

die Wurzeln der quadratischen Gleichung sind reell und ungleich, wenn

$$\text{VI.} \ldots (S\nu\varphi\nu - S\mu\varphi\mu)^2 + 4\,S\mu\varphi\nu\,S\nu\varphi\mu > 0;$$

und die entsprechenden Richtungen von ϱ werden rechtwinklig sein, wenn

$$\text{VII.} \ldots 0 = S(y_1\mu + z_1\nu)(y_2\mu + z_2\nu) = -(y_1 y_2 + z_1 z_2);$$

das heisst, wenn

$$\text{VIII.} \ldots S\nu\varphi\mu = S\mu\varphi\nu,$$

wenigstens für das besondere Paar von Vectoren, μ und ν.

(2.) Führt man jetzt den Ausdruck ein, $\varphi\varrho = \varphi_0\varrho + V\gamma\varrho$ (349, XII.), so nehmen die Bedingungen VI. und VIII. die Formen an,

$$\text{IX.} \ldots (S\nu\varphi_0\nu - S\mu\varphi_0\mu)^2 + 4\,S(\mu\varphi_0\nu)^2 > 4\,(S\gamma\mu\nu)^2,$$

und

$$\text{X.} \ldots S\gamma\mu\nu = 0;$$

sie beide werden allgemein befriedigt, wenn $\gamma = 0$, oder $\varphi = \varphi' = \varphi_0$ ist; die einzige Ausnahme ist die, dass die quadratische Gleichung V. zufällig dadurch eine Identität werden kann, dass alle ihre Coefficienten verschwinden: dagegen kann die zu VI. und IX. entgegengesetzte Ungleichheit niemals statt haben, dass heisst, es können die Wurzeln jener quadratischen Gleichung niemals imaginär werden, wenn φ in dieser Weise selbstconjugirt ist.

(3.) Wenn anderseits γ wirklich ist, oder $\varphi'\varrho$ nicht allgemein $= \varphi\varrho$, so kann die Bedingung X. für die Rechtwinkligkeit nur gelegentlich erfüllt werden, nämlich dadurch, dass die gegebne oder feste Linie γ zufällig in der angenommenen

Digitized by Google

Ebne von μ, ν liegt; und wenn die beiden Richtungen von ϱ somit nicht rechtwinklig sind, oder wenn der Skalar $S\gamma\mu\nu$ nicht verschwindet, so haben wir nur anzunehmen, dass das Quadrat dieses Skalars gross genug wird, um diese Richtungen zum Zusammenfallen zu bringen, nach IX., oder sie imaginär zu machen.

(4.) Wenn $\varphi' = \varphi$, oder $\gamma = 0$, so können wir μ und ν als die beiden rechtwinkligen Richtungen von ϱ nehmen, oder können die quadratische Gleichung auf die sehr einfache Form $yz = 0$ bringen, aber zu diesem Zweck müssen wir die Beziehungen aufstellen,

$$\text{XI.} \ldots S\mu\varphi\nu = S\nu\varphi\mu = 0.$$

(5.) Und wenn, zur selben Zeit, λ der Gleichung III. genügt, so dass $\varphi\lambda \parallel \lambda$, so haben wir die weiteren skalar Gleichungen,

$$\begin{aligned}\text{XII.} \ldots 0 &= S\mu\varphi\lambda = S\nu\varphi\lambda \\ &= S\lambda\varphi\mu = S\lambda\varphi\nu;\end{aligned}$$

und danach ist

$$\varphi\mu \parallel V\nu\lambda \parallel \mu,$$

und

$$\varphi\nu \parallel V\lambda\mu \parallel \nu,$$

oder

$$\text{XIII.} \ldots 0 = V\lambda\varphi\lambda = V\mu\varphi\mu = V\nu\varphi\nu;$$

λ, μ, ν bilden somit, wie vorher ausgesprochen wurde, ein System von drei reellen und rechtwinkligen Wurzeln der vector Gleichung III.

(6.) Aber im Allgemeinen kann selbst dann, wenn III. durch zwei reelle und verschiedene Richtungen von ϱ befriedigt wird, die skalar und cubische Gleichung $M = 0$ nicht imaginäre Wurzeln haben; denn wenn diese beiden Richtungen zwei ungleiche, aber reelle und skalar Werthe, c_1 und c_2, ergeben für den Quotienten $-\varphi\varrho : \varrho$, dann sind c_1 und c_2 zwei reelle Wurzeln der cubischen Gleichung, deren dritte Wurzel daher auch reell ist; und wenn anderseits die beiden Richtungen ϱ_1 und ϱ_2 ein und denselben reellen und skalar Werth für diesen Quotienten ergeben, wie z. B. c_1, dann ist $\varphi\varrho = -c_1\varrho$, oder $\Phi_1\varrho = (\varphi + c_1)\varrho = 0$, für jede Linie in der Ebne von ϱ_1, ϱ_2;

so dass $\varphi\,\varrho$ von der Form sein muss, $-c_1\,\varrho + \beta\,S\varrho_1\,\varrho_2\,\varrho$, und die cubische Gleichung wird dann wenigstens zwei gleiche Wurzeln haben, denn sie nimmt die Form an,

$$\text{XIV.}\ldots\ 0 = (c - c_1)^2(c - c_1 + S\varrho_1\,\varrho_2\,\beta),$$

wie sich leicht aus Sätzen und Formeln zeigen lässt, welche schon aufgestellt worden sind.

(7.) Es ist somit von Neuem bewiesen, dass die Gleichung $M = 0$ lauter reelle Wurzeln hat, wenn $\varphi'\,\varrho = \varphi\,\varrho$ ist; und dass daher die Gleichung $M_0 = 0$, wie vorher ausgesprochen wurde, niemals eine imaginäre Wurzel haben kann.

(8.) Und wir sehn, zu gleicher Zeit, wie die cubische skalar Gleichung $M = 0$ aus der symbolischen cubischen Gleichung 350, I. hätte abgeleitet werden können, oder aus der Gleichung 351, I., da die Bedingung für die vector Gleichung III. durch irgend ein wirkliches ϱ befriedigt wird; nämlich dadurch, dass man beachtet, dass wenn $\varphi\,\varrho = -c\,\varrho$, dann $\varphi^2\varrho = c^2\varrho$, $\varphi^3\varrho = -c^3\varrho$ u. s. w., und dass daher $M\varrho = 0$ ist, eine Gleichung, in welcher ϱ, der Annahme nach, von null verschieden ist.

(9.) Was endlich den Fall betrifft, wenn Unbestimmtheit eintritt, auf den ich vorher angespielt habe, wenn die quadratische Gleichung V. aufhört, irgend welche bestimmten Werthe für $y : z$ zu liefern, oder irgend welche bestimmten Richtungen in der gegebnen Ebne für ϱ, so ist dieser Fall augenscheinlich durch die Bedingung,

$$\text{XV.}\ldots\ S\mu\varphi\,\mu = S\nu\varphi\,\nu,$$

ausgezeichnet, in Verbindung mit den Gleichungen XI.

356. Das Bestehn der symbolischen und cubischen Gleichung (350), welche durch das lineare und vector Symbol φ

* Wir werden finden, dass dieser Fall den Kreisschnitten einer Oberfläche zweiter Ordnung entspricht, während der weniger besondere Fall, in welchem $\varphi'\varrho = \varphi\,\varrho$, dagegen nicht $S\mu\varphi\,\mu = S\nu\varphi\,\nu$, so dass die beiden Richtungen von ϱ als reelle und rechtwinklige bestimmt werden, den Achsen eines nicht-kreisförmigen Schnitts einer solchen Fläche entspricht.

Digitized by Google

befriedigt wird, führt auf einen Satz* über geometrische Deformation, welcher so ausgesprochen werden kann: —

„Wenn wir durch irgend eine gegebne Art, oder irgend ein gegebnes Gesetz, der linearen Ableitung, von der vorher durch das Symbol q bezeichneten Art, von irgend einem angenommenen Vector ϱ zu einer Reihe von successiv abgeleiteten Vectoren, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, . . . oder $q^1\varrho$, $q^2\varrho$, $q^3\varrho$, . . übergehn; und wenn wir dadurch, dass wir ein Parallelepiped construiren, irgend eine Linie dieser Reihe, wie z. B. ϱ_3, in drei Theil- oder Component-Linien, $m\varrho$, $-m'\varrho_1$, $m''\varrho_2$, zerlegen, nach den Rich-

---

* Dieser Satz wurde, beinahe auf demselben Wege, auf Seite 568 der Vorlesungen aufgestellt; und das Problem der Umkehrung einer linearen und vector Function wurde, auf den wenigen vorhergehenden Seiten (559, u. s. w.), behandelt, wenn auch mit etwas weniger Vollständigkeit, und vielleicht weniger einfach, als im gegenwärtigen Abschnitt, und mit ein wenig verschiedener Bezeichnung. Die allgemeine Form einer solchen Function, welche dort angenommen wurde, kann jetzt so ausgedrückt werden:

$$q\varrho = \Sigma\beta S\alpha\varrho + Vr\varrho,$$

wenn r ein gegebner Quaternion ist; als resultirender Werth von m fand sich (Seite 561),

$$m = \Sigma S\alpha\alpha'\alpha'' S\beta'\beta'\beta + \Sigma S(rV\alpha\alpha'.V\beta'\beta) + Sr\Sigma S\alpha\beta r - \Sigma S\alpha r S\beta r + SrTr^2;$$

und die Hülfsfunction, welche wir jetzt durch ψ bezeichnen, war

$$mq^{-1}\sigma = \psi\sigma = \Sigma V\alpha\alpha' S\beta'\beta\sigma + \Sigma V.\alpha V(V\beta\sigma.r) + (V\sigma rSr - VrS\sigma r);$$

wo die Summe der beiden letzten Glieder von $\psi\sigma$ hätte geschrieben werden können $\sigma rSr - rS\sigma r$. Es könnte für den Leser eine nützliche Uebung abgeben, die Richtigkeit dieser Ausdrücke durch die Sätze dieses Abschnitts zu beweisen. Ein Weg, dies zu thun, würde sein, $\Sigma\beta S\alpha\varrho$ und r bezüglich als gleich $q_0\varrho + V\gamma\varrho$ und gleich $c + \varepsilon$ zu behandeln; das würde m und $\psi\sigma$, wie es vorher hingeschrieben wurde, in die folgenden Ausdrücke transformiren,

$$M_0 = S(\gamma + \varepsilon)(q_0 + c)(\gamma + \varepsilon),$$

und

$$\Psi_0\sigma = (\gamma + \varepsilon)S(\gamma + \varepsilon)\sigma + V\sigma(q_0 + c)(\gamma + \varepsilon);$$

das heisst, in die neuen Werthe überführen, welche das M und $\Psi\sigma$ des Abschnitts annehmen, wenn $\Phi\varrho$ den neuen Werth, $\Phi\varrho = (q_0 + c)\varrho + V(\gamma + \varepsilon)\varrho$, annimmt.

tungen derjenigen drei, welche ihr vorhergehn, wie es hier die Linien ϱ, ϱ_1, ϱ_2 sind; so hängen die drei skalar Coefficienten, m, $-m'$, m'', oder die drei Verhältnisse, in denen die drei Componenten der vierten Linie ϱ_3 zu den drei ihr vorhergehenden Linien der Reihe stehn, nur von der gegebnen Art, oder dem Gesetz, der Ableitung ab, und sind völlig unabhängig von der angenommenen Länge und Richtung des Anfangsvectors."

(1.) Als ein Beispiel für solche successive Ableitung wollen wir das Gesetz nehmen,

$$\text{I.} \ldots \varrho_1 = \varphi\varrho = -V\beta\varrho\gamma,$$
$$\varrho_2 = \varphi^2\varrho = -V\beta\varrho_1\gamma,$$

u. s. w.; es entspricht der Construction in 305, (1.), u. s. w., wenn wir annehmen, dass β und γ Einheitslinien sind. Behandeln wir sie zuerst als irgend welche zwei gegebnen Vectoren, so führt unsere allgemeine Methode auf die Gleichung,

$$\text{II.} \ldots \varrho_3 = m\varrho - m'\varrho_1 + m''\varrho_2,$$

mit folgenden Werthen der Coefficienten,

$$\text{III.} \ldots m = -\beta^2\gamma^2 S\beta\gamma,$$
$$m' = -\beta^2\gamma^2,$$
$$m'' = S\beta\gamma;$$

das kann man, ohne irgend welche neue Berechnung, allein daraus ersehn, dass man g, λ und μ, in 354, XXXIII., mit 0, β, und $-\gamma$ vertauscht.

(2.) Man nehme zunächst an, zur Vergleichung mit 305, dass

$$\text{IV.} \ldots \beta^2 = \gamma^2 = -1,$$

und

$$S\beta\gamma = -l,$$

so dass β, γ Einheitslinien sind, und l der Cosinus ihrer gegenseitigen Neigung; dann wird der Werth III.,

$$\text{V.} \ldots m = l,$$
$$m' = -1,$$
$$m'' = -l;$$

und die Gleichung II., welche vier auf einander folgende Linien der Reihe in Zusammenhang setzt, nimmt die Form an,

Digitized by Goog

$$\text{VI.} \ldots \varrho_3 = l\varrho + \varrho_1 - l\varrho_2,$$

oder

$$\text{VII.} \ldots \varrho_3 - \varrho_1 = -l(\varrho_2 - \varrho);$$

ein Resultat, welches mit 305, (2.) übereinstimmt, denn wir fanden dort, dass wenn $\varrho = OP$, u. s. w., der Abstand $P_1 P_3$ war $= -l \times PP_2$.

(3.) Und was die Umkehrung einer linearen und vector Function (347) betrifft, oder die Rückkehr von irgend einer Linie ϱ_1 einer solchen Reihe zu derjenigen Linie ϱ, welche ihr vorhergeht, so ergiebt unsere allgemeine Methode, für das Beispiel I., nach 354, (12.),

$$\text{VIII.} \ldots \psi\varrho_1 = \tfrac{1}{2}\beta(\beta\gamma\varrho_1 + \varrho_1\beta\gamma)\gamma,$$

und

$$\text{IX.} \ldots \quad \varrho = \varphi^{-1}\varrho_1 = m^{-1}\psi\varrho_1 = -\frac{\beta\varrho_1\beta^{-1} + \gamma\varrho_1\gamma^{-1}}{\beta\gamma + \gamma\beta};$$

ein Resultat, welches sich leicht bewahrheiten und deuten lässt, nach Sätzen, welche schon entwickelt wurden.

357. Wir sind jetzt vorbereitet, einige neue und allgemeine Formen anzugeben, auf welche die lineare und vector Function (mit reellen Constanten) eines variablen Vectors gebracht werden kann, ohne anzunehmen, dass sie selbstconjugirt ist; eine der einfachsten Formen derselben ist die folgende,

$$\text{I} \ldots \varphi\varrho = Vq_0\varrho + V\lambda\varrho\mu,$$

in Verbindung mit

$$\text{I}' \ldots q_0 = g + \gamma;$$

q_0 ist hier ein reeller und constanter Quaternion, und λ, μ sind zwei reelle und constante Vectoren, welche sämmtlich in bestimmter Weise angegeben werden können, wenn die besondere Form von φ gegeben wird: ausgenommen, dass λ und μ, nach 295, VII., vertauscht werden können, und dass jeder mit irgend einem Skalar multiplicirt werden kann, wenn der andere mit demselben Skalar dividirt werden kann. Es folgt, dass die skalar, quadratische und homogene Function eines Vectors, welche durch $S\varrho\varphi\varrho$ bezeichnet wird, stets so ausgedrückt werden kann:

$$\text{II.}\ldots\ S\varrho\varphi\varrho = g\varrho^2 + S\lambda\varrho S\mu\varrho;$$

oder so,

$$\text{II}'.\ldots\ S\varrho\varphi\varrho = g'\varrho^2 + 2S\lambda\varrho S\mu\varrho,$$

wenn

$$g' = g - S\lambda\mu;$$

und diese allgemeine und, wie oben bemerkt wurde, bestimmte Transformation erweist sich von grosser Nützlichkeit in der Theorie der Oberflächen* zweiter Ordnung.

(1.) Richtet man seine Aufmerksamkeit zuerst auf den Fall selbstconjugirter Functionen $\varphi_0\varrho$, von dem wir zu dem allgemeinen Falle dadurch übergehn können, dass wir nur das Glied $V\gamma\varrho$ hinzufügen, und annehmen, (kraft dessen, was vorhergeht), dass $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ drei reelle und rechtwinklige Einheitsvectoren sind, und $c_1c_2c_3$ drei reelle Skalare (die Wurzeln der cubischen Gleichung $M_0 = 0$), so dass

$$\text{III.}\ldots\ \begin{aligned}\varphi_1\alpha_1 &= (\varphi_0 + c_1)\alpha_1 = 0,\\ \varphi_2\alpha_2 &= (\varphi_0 + c_2)\alpha_2 = 0,\\ \varphi_3\alpha_3 &= (\varphi_0 + c_3)\alpha_3 = 0,\end{aligned}$$

so können wir schreiben,

$$\text{IV.}\ldots\ \varrho = -(\alpha_1 S\alpha_1\varrho + \alpha_2 S\alpha_2\varrho + \alpha_3 S\alpha_3\varrho),$$

und daher

$$\text{V.}\ldots\ \varphi_0\varrho = c_1\alpha_1 S\alpha_1\varrho + c_2\alpha_2 S\alpha_2\varrho + c_3\alpha_3 S\alpha_3\varrho;$$

so dass

$$\text{VI.}\ldots\ \begin{cases}\varphi_1\varrho = (c_2 - c_1)\alpha_2 S\alpha_2\varrho + (c_3 - c_1)\alpha_3 S\alpha_3\varrho,\\ \varphi_2\varrho = (c_3 - c_2)\alpha_3 S\alpha_3\varrho + (c_1 - c_2)\alpha_1 S\alpha_1\varrho,\\ \varphi_3\varrho = (c_1 - c_3)\alpha_1 S\alpha_1\varrho + (c_2 - c_3)\alpha_2 S\alpha_2\varrho;\end{cases}$$

die zweigliedrigen Formen von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ werden somit augenscheinlich klargestellt.

(2.) Wir haben folglich die allgemeinen, aber skalar Ausdrücke:

* In der Theorie dieser Oberflächen haben die beiden constanten und reellen Vectoren, λ und μ, die Richtungen der — wie wir sie genannt haben — cyklischen Normalen.

Digitized by Google

$$\text{VII.}\ldots -\varrho^2 = (S\alpha_1\varrho)^2 + (S\alpha_2\varrho)^2 + (S\alpha_3\varrho)^2;$$

$$\begin{aligned}\text{VIII.}\ldots S\varrho\varphi\varrho &= S\varrho\varphi_0\varrho\\ &= c_1(S\alpha_1\varrho)^2 + c_2(S\alpha_2\varrho)^2 + c_3(S\alpha_3\varrho)^2\\ &= -c_1\varrho^2 + (c_2-c_1)(S\alpha_2\varrho)^2 + (c_3-c_1)(S\alpha_3\varrho)^2\\ &= -c_2\varrho^2 - (c_2-c_1)(S\alpha_1\varrho)^2 + (c_3-c_2)(S\alpha_3\varrho)^2\\ &= -c_3\varrho^2 - (c_3-c_1)(S\alpha_1\varrho)^2 - (c_3-c_2)(S\alpha_2\varrho)^2;\end{aligned}$$

und in ihnen ist es im Allgemeinen erlaubt, anzunehmen, dass

$$\text{IX.}\ldots c_1 < c_2 < c_3,$$

oder dass

$$\begin{aligned}\text{X.}\ldots c_2 - c_1 &= 2e^2,\\ c_3 - c_2 &= 2e'^2;\end{aligned}$$

e und e' sind reelle Skalare, und der numerische Coefficient wird aus einem Bequemlichkeitsgrunde eingeführt, der sogleich klar werden wird.

(3.) Vergleicht man den letzten, wenn nicht einen der Ausdrücke VIII. mit II′., so sieht man, dass $S\varrho\varphi\varrho$ dadurch auf die vorgeschlagne Form II. gebracht werden kann, dass man annimmt,

$$\begin{aligned}\text{XI.}\ldots \lambda &= e\alpha_1 + e'\alpha_3,\\ \mu &= -e\alpha_1 + e'\alpha_3,\\ g &= S\lambda\mu - c_2 = -\tfrac{1}{2}(c_1 + c_3),\end{aligned}$$

da

$$S\lambda\mu = e^2 - e'^2 = c_2 - \tfrac{1}{2}(c_1 + c_3).$$

(4.) Aber im Allgemeinen [vergl. 349, (4.)] können wir nicht, für alle Werthe von ϱ, haben,

$$\text{XII.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = S\varrho\varphi'\varrho,$$

wenn nicht

$$\text{XIII.}\ldots \varphi_0\varrho = \varphi_0'\varrho,$$

das heisst, wenn nicht die selbstconjugirten Theile von φ und φ' gleich sind; wir können daher aus II. schliessen, dass $\varphi_0\varrho = g\varrho + V\lambda\varrho\mu$, da $V\lambda\varrho\mu = V\mu\varrho\lambda =$ seinem eignen Conjugirten; und somit wird bewiesen, dass die Transformation I. möglich, und reell ist.

(5.) Demnach wird, mit den Werthen XI. von λ, μ, g, der Ausdruck,

$$\text{XIV.}\ldots \varphi_0\varrho = g\varrho + V\lambda\varrho\mu$$
$$= \varrho(g - S\lambda\mu) + \lambda S\mu\varrho + \mu S\lambda\varrho,$$
$$\text{XV.}\ldots \varphi_0\varrho = -c_2\varrho + (e'\alpha_3 + e\alpha_1)S(e'\alpha_3 - e\alpha_1)\varrho$$
$$+ (e'\alpha_3 - e\alpha_1)S(e'\alpha_3 + e\alpha_1)\varrho$$
$$= -c_2\varrho - 2e^2\alpha_1 S\alpha_1\varrho + 2e'^2\alpha_3 S\alpha_3\varrho;$$

und das stimmt, nach X., mit VI. überein.

(6.) Umgekehrt, wenn g, λ und μ Constanten von der Art sind, dass $\varphi_0\varrho = g\varrho + V\lambda\varrho\mu$, dann ist $\varphi_0 V\lambda\mu = g' V\lambda\mu$, wo $g' = g - S\lambda\mu$ ist, wie vorher; daher muss $-g'$ eine der drei Wurzeln c_1, c_2, c_3 der cubischen Gleichung $M_0 = 0$ sein, und die Normale zur Ebne von λ, μ muss eine der drei Richtungen von α_1, α_2, α_3 haben; wenn wir dann, versuchsweise, annehmen, dass diese Ebne diejenige von α_1, α_3 ist, und demgemäss schreiben,

$$\text{XVI.}\ldots \lambda = a\alpha_1 + a'\alpha_3,$$
$$\mu = b\alpha_1 + b'\alpha_3,$$
$$\varphi_2\varrho = \lambda S\mu\varrho + \mu S\lambda\varrho,$$

so haben wir, nach VI., nach Skalaren $aa'bb'$ zu suchen, welche den drei Bedingungen genügen,

$$\text{XVII.}\ldots 2ab = c_1 - c_2,$$
$$2a'b' = c_3 - c_2,$$
$$ab' + ba' = 0;$$

sie ergeben aber

$$\text{XVIII.}\ldots (2ab')^2 = (2ba')^2 = (c_3 - c_2)(c_2 - c_1),$$

so dass wir, wenn die Transformation eine reelle ist, annehmen müssen, dass $c_2 - c_1$ und $c_3 - c_2$ entweder beide positiv sind, wie in IX., oder auch beide negativ sind; oder mit anderen Worten, wir müssen die drei reellen Wurzeln der cubischen Gleichung so anordnen, dass c_2 (algebraisch) dem Werthe nach zwischen den beiden anderen liegt. Nehmen wir daher die Reihenfolge IX. an, und die Werthe X.; so genügen wir den Bedingungen XVII. dadurch, dass wir annehmen, dass

$$\text{XIX.}\ldots a' = b' = e',$$
$$a = -b = e;$$

und somit gelangen wir von XVI. zu den Ausdrücken XI. zurück, als den einzigen reellen für λ, μ und g, welche die Trans-

Digitized by Google

formationen I. und II. möglich machen; mit der Ausnahme, dass λ und μ vertauscht werden können, u. s. w., wie vorher.

(7.) Wir sehn indessen, dass es in einem imaginären Sinne zwei andere Lösungen der Aufgabe giebt, $\varphi\varrho$ und $S\varrho\varphi\varrho$, wie vorher, zu transformiren; denn wenn wir die Anordnung IX. beibehalten, und g' in II'. entweder $-c_1$ oder $-c_3$ gleichsetzen, so können wir uns in jedem Falle vorstellen, dass die entsprechende Summe zweier Quadrate in VIII. das Product zweier imaginären, aber linearen Factoren ist; die Ebnen dieser beiden imaginären Paare von Vectoren, welche sich ergeben, sind reell, und bezüglich senkrecht zu α_1 und α_3.

(8.) Und wenn der reelle Ausdruck XIV. für $\varphi_0\varrho$ gegeben wäre, und gefordert würde, man solle von ihm zum Ausdruck V. übergehn, mit der Reihenfolge der Ungleichheiten IX., so würde uns die Untersuchung in 354, (12.) sofort in den Stand setzen, die Formeln aufzustellen:

$$\begin{aligned}
\text{XX.}\ldots\ c_1 &= -g - T\lambda\mu,\\
c_2 &= -g + S\lambda\mu,\\
c_3 &= -g + T\lambda\mu;\\
\text{XXI.}\ldots\ \alpha_1 &= U(\lambda T\mu - \mu T\lambda),\\
\alpha_2 &= UV\lambda\mu,\\
\alpha_3 &= U(\lambda T\mu + \mu T\lambda);
\end{aligned}$$

in ihnen ist indessen erlaubt, das Vorzeichen irgend einer der drei vector Einheiten zu ändern. Demgemäss ergeben die Ausdrücke XI.,

$$\begin{aligned}
T\lambda\mu + S\lambda\mu &= 2e^2 = c_2 - c_1,\\
T\lambda\mu - S\lambda\mu &= 2e'^2 = c_3 - c_2,\\
S\lambda\mu &= g + c_2;\\
T\lambda &= T\mu,\\
\lambda - \mu &= 2e\alpha_1,\\
V\lambda\mu &= -2ee'\alpha_3\alpha_1 = \mp 2ee'\alpha_2,\\
\lambda + \mu &= 2e'\alpha_3.
\end{aligned}$$

(9.) Wir haben auch die beiden identischen Transformationen,

$$\text{XXII.}\ldots\ S\lambda\varrho\mu\varrho = \varrho^2 T\lambda\mu + \{(S\lambda\mu\varrho)^2 + (S\lambda\varrho T\mu + S\mu\varrho T\lambda)^2\}(T\lambda\mu - S\lambda\mu)^{-1},$$

$$\text{XXIII.}\ldots\ S\lambda\varrho\mu\varrho = -\varrho^2 T\lambda\mu - \{(S\lambda\mu\varrho)^2 + (S\lambda\varrho\, T\mu - S\mu\varrho\, T\lambda)^2\}(T\lambda\mu + S\lambda\mu)^{-1},$$

welche für irgend drei Vectoren, λ, μ, ϱ, statt haben, und (ausser auf anderen Wegen) durch die Ausdrücke XX. und XXI. aus II. und VIII. abgeleitet werden können.

(10.) Wenn wir endlich, was die Ausdrücke VI. für $\varphi_1\varrho$, u. s. w., betrifft, die entsprechenden Formen von $\psi\varrho$ durch $\psi_1\varrho$, u. s. w., bezeichnen, so haben wir [vergl. 354, (15.)] die weiteren Ausdrücke, welche wie üblich (vergl. 351, u. s. w.) von eingliedriger Form sind:

$$\text{XXIV.}\ldots\begin{cases} \psi_1\varrho = \varphi_2\varphi_3\varrho = (c_2 - c_1)(c_1 - c_3)\alpha_1 S\alpha_1\varrho; \\ \psi_2\varrho = \varphi_3\varphi_1\varrho = (c_3 - c_2)(c_2 - c_1)\alpha_2 S\alpha_2\varrho; \\ \psi_3\varrho = \varphi_1\varphi_2\varrho = (c_1 - c_3)(c_3 - c_2)\alpha_3 S\alpha_3\varrho; \end{cases}$$

und welche die Relationen 354, XLI. bewahrheiten, und mehrere andere Theile der ganzen vorhergehenden Theorie.

358. Die allgemeine lineare und vector Function $\varphi\varrho$ eines Vectors enthält, wie wir gesehn haben [347, (1.)], wenigstens der Sache nach, neun skalar Constanten; und demgemäss umschliesst der Ausdruck 357, I. jene Anzahl, nämlich vier in dem Gliede $Vq_0\varrho$, wegen des constanten Quaternions q_0, und fünf in dem anderen Gliede $V\lambda\varrho\mu$; jeder der beiden Einheitsvectoren, $U\lambda$ und $U\mu$, zählt für zwei Skalare, und der Tensor $T\lambda\mu$ als einer mehr. Aber eine selbstconjugirte lineare und vector Function, oder der selbstconjugirte Theil $\varphi_0\varrho$ der allgemeinen Function $\varphi\varrho$, umfasst nur sechs skalar Constanten; entweder, weil drei mit dem Glied $V\gamma\varrho$ von $\varphi\varrho$ verschwinden; oder weil die Bedingung für Selbstconjugation, $\Sigma V\beta\alpha = 2\gamma = 0$ (vergl. 349, XXII. und 353, XXXVI.), welche entsteht, wenn wir für $\varphi\varrho$ die Form $\Sigma\beta S\alpha\varrho$ (347, XXXI.) nehmen, gleichbedeutend mit einem System von drei skalar Gleichungen ist, welche die neun Constanten in Zusammenhang setzen. Und aus demselben Grunde umfasst die allgemeine quadratische, aber skalar Function, $S\varrho\varphi\varrho$, in gleicher Weise nur sechs skalar Constanten. Demgemäss treten nur sechs solche Constanten in den Ausdrücken 357, II., II′., V., VIII., XIV., auf; c_1, c_2, c_3, sind, zum Beispiel, drei solche Constanten, und das System der rechtwinkligen Einheiten α_1, α_2, α_3 entspricht den

Digitized by Google

drei andern. Die folgenden weiteren allgemeinen Umformungen von $S\varrho\varphi\varrho$ und $\varphi_0\varrho$, obwohl nicht ganz so einfach wie 357, II. und XIV., umfassen dieselbe Anzahl (sechs) skalar Constanten, und verdienen kurz betrachtet zu werden: nämlich die Formen,

$$\text{I.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = a(V\alpha\varrho)^2 + b(S\beta\varrho)^2;$$
$$\text{II.}\ldots \varphi_0\varrho = -a\alpha V\alpha\varrho + b\beta S\beta\varrho;$$

in welchen a, b zwei reelle Skalare, und α, β zwei reelle Einheitsvectoren sind. Wir werden nur die leitenden Formeln niederschreiben, und überlassen es dem Leser, die Analyse zu vervollständigen; er kann sie auf dieser Stufe ohne Schwierigkeit finden.

(1.) Wenn man die Reduction der Ausdrücke,

$$S\varrho\varphi\varrho = c_1(S\alpha_1\varrho)^2 + c_2(S\alpha_2\varrho)^2 + c_3(S\alpha_3\varrho)^2, \qquad 357,\ \text{VIII.}$$

und

$$\varphi_0\varrho = c_1\alpha_1 S\alpha_1\varrho + c_2\alpha_2 S\alpha_2\varrho + c_3\alpha_3 S\alpha_3\varrho, \qquad 357,\ \text{V.},$$

auf die neuen Formen I. und II. ausführt, wird man finden, dass, wenn das Resultat ein reelles ist, $-a$ diejenige Wurzel der cubischen Skalargleichung $M_0 = 0$ sein muss, deren Reciproke abgebraisch zwischen den Reciproken der beiden andern liegt. Es ist daher angemessen, in Betreff der Aufeinanderfolge der Ungleichheiten, hier als neue Bedingung anzunehmen, dass

$$\text{III.}\ldots c_1^{-1} > c_2^{-1} > c_3^{-1};$$

sie fallen in der That mit der Anordnung 357, IX. zusammen, wenn die drei Wurzeln c_1, c_2, c_3 sämmtlich positiv sind, aber sie sind mit ihr unvereinbar in jedem anderen Falle.

(2.) Wenn wir dies festsetzen (oder wir können selbst, wenn wir es vorziehn, die entgegengesetzte Anordnung nehmen), so können die (reellen) Werthe von a, b, α, β so ausgedrückt werden:

$$\text{IV.}\ldots a = -c_2, \qquad b = c_1 - c_2 + c_3;$$
$$\text{V.}\ldots \alpha = x\alpha_1 + z\alpha_3,$$
$$\beta = x'\alpha_1 + z'\alpha_3;$$

in ihnen ist

$$\text{VI.}\ldots x^2 = \frac{c_1^{-1} - c_2^{-1}}{c_1^{-1} - c_3^{-1}},$$
$$z^2 = \frac{c_2^{-1} - c_3^{-1}}{c_1^{-1} - c_3^{-1}};$$

$$\text{VII.}\ldots \frac{c_1 x}{x'} = \frac{c_3 z}{z'} = b(xx' + zz') = -bS\alpha\beta = (\text{sagen wir})\ b';$$

$$\text{VIII.}\ldots\ b'^2 = c_1 c_2^{-1} c_3 b = c_1^2 x^2 + c_3^2 z^2;$$

$$\text{IX.}\ldots\ x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = 1;$$

$$\text{X.}\ldots\ bx'z' = c_2 xz;$$

$$\text{XI.}\ldots\ c_1 x^2 + c_3 z^2 = c_1 c_2^{-1} c_3 = b^{-1} b'^2 = b(S\alpha\beta)^2,$$
$$c_1 c_3 = -ab(S\alpha\beta)^2;$$

$$\text{XII.}\ldots\ b'\beta = -b\beta S\alpha\beta = c_1 x\alpha_1 + c_3 z\alpha_3;$$

u. s. w.

(3.) Und es ergeben sich daher die Umformungen:

$$\text{XIII.}\ldots\ \varphi_2\varrho = (c_1 - c_2)\alpha_1 S\alpha_1\varrho + (c_3 - c_2)\alpha_3 S\alpha_3\varrho = -c_2(x\alpha_1 + z\alpha_3) S(x\alpha_1 + z\alpha_3)\varrho + \frac{c_2}{c_1 c_3}(xc_1\alpha_1 + zc_3\alpha_3) S(xc_1\alpha_1 + zc_3\alpha_3)\varrho;$$

$$\text{XIV.}\ldots\ \varphi_0\varrho = c_1\alpha_1 S\alpha_1\varrho + c_2\alpha_2 S\alpha_2\varrho + c_3\alpha_3 S\alpha_3\varrho = c_2(x\alpha_1 + z\alpha_3) V(x\alpha_1 + z\alpha_3)\varrho + \frac{c_2}{c_1 c_3}(xc_1\alpha_1 + zc_3\alpha_3) S(xc_1\alpha_1 + zc_3\alpha_3)\varrho;$$

$$\text{XV.}\ldots\ S\varrho\varphi\varrho = -c_2[V(x\alpha_1 + z\alpha_3)\varrho]^2 + \frac{c_2}{c_1 c_3}[S(xc_1\alpha_1 + zc_3\alpha_3)\varrho]^2;$$

und die letzte ergiebt, wenn $c_1 c_3$ positiv sind, die weitere reelle Form,

$$\text{XVI.}\ldots\ S\varrho\varphi\varrho = \frac{c_2}{c_1 c_3} N\{S(xc_1\alpha_1 + zc_3\alpha_3)\varrho + (c_1 c_3)^{\frac{1}{2}} V(x\alpha_1 + z\alpha_3)\varrho\};$$

x^2 und z^2 werden durch die Ausdrücke VI. bestimmt.

(4.) Diese Ausdrücke erlauben uns, die Vorzeichen von $z:x$ zu ändern, und dadurch ein zweites Paar reeller Einheitslinien, α' und β', zu bestimmen, welche für α und β in die Formen I. und II. eingesetzt werden können; die Reihenfolge der Ungleichheiten III. (oder die zu ihr entgegengesetzte Reihenfolge), und die Werthe IV. von a und b bleiben ungeändert. Wir haben daher die zweifachen Transformationen:

$$\text{XVII.}\ldots\ S\varrho\varphi\varrho = -c_2(V\alpha\varrho)^2 + (c_1 - c_2 + c_3)(S\beta\varrho)^2 = -c_2(V\alpha'\varrho)^2 + (c_1 - c_2 + c_3)(S\beta'\varrho)^2;$$

Digitized by Google

$$\text{XVIII.}\ldots \varphi_0\varrho = c_2\alpha V\alpha\varrho + (c_1 - c_2 + c_3)\beta S\beta\varrho$$
$$= c_2\alpha' V\alpha'\varrho + (c_1 - c_2 + c_3)\beta' S\beta'\varrho.$$

(5.) Wenn eine der beiden im Zusammenhang stehenden Formen I. und II. gegeben worden wäre, so hätten wir vorschlagen können, aus ihr die Werthe von $c_1\ c_2\ c_3$ und von $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, nach der allgemeinen Methode dieses Abschnitts, abzuleiten. Wir würden so die cubische Gleichung erhalten haben,

$$\text{XIX.}\ldots 0 = M_0 = (c+a)\{c^2 + (a-b)c - ab(S\alpha\beta)^2\};$$

und da die quadratische Gleichung $(c+a)^{-1}M_0 = 0$ so geschrieben werden kann,

$$\text{XX.}\ldots (c^{-1}+a^{-1})^2(S\alpha\beta)^2 - (c^{-1}+a^{-1})(a^{-1}S.(\alpha\beta)^2 + b^{-1}) + a^{-2}(V\alpha\beta)^2 = 0,$$

so ergiebt sie zwei reelle Werthe von $c^{-1}+a^{-1}$, einen positiv und den andern negativ; wenn wir daher die Reciproken der drei Wurzeln von $M_0 = 0$ in der Anordnung III. zusammenstellen, so haben wir die Ausdrücke,

$$\text{XXI.}\ldots \begin{cases} c_1 = \frac{1}{2}(b-a) + \frac{1}{2}ab\sqrt{(a^{-2} + 2a^{-1}b^{-1}S.(\alpha\beta)^2 + b^{-2})}; \\ c_2 = -a; \\ c_3 = \frac{1}{2}(b-a) - \frac{1}{2}ab\sqrt{(a^{-2} + 2a^{-1}b^{-1}S.(\alpha\beta)^2 + b^{-2})}; \end{cases}$$

die Vorzeichen der Wurzel werden durch die Bedingung bestimmt, dass $(c_1 - c_3) : ab(S\alpha\beta)^2 = c_1^{-1} - c_3^{-1} > 0$ sein soll. Demnach stimmen diese Ausdrücke für die Wurzeln augenscheinlich mit den früheren Resultaten, IV. und XI., überein, da $S.(\alpha\beta)^2 = 2(S\alpha\beta)^2 - 1$ ist.

(6.) Da die Wurzeln c_1, c_2, c_3 somit bekannt sind, so ergiebt dieselbe allgemeine Methode für die Richtungen von α_1, α_2, α_3 die Versoren der folgenden Ausdrücke (oder der negativen Werthe derselben):

$$\text{XXII.}\ldots \begin{cases} \psi_1\varrho = ac_3^{-1}(c_3\alpha + b\beta S\alpha\beta)S(c_3\alpha + b\beta S\alpha\beta)\varrho; \\ \psi_2\varrho = abV\alpha\beta S\beta\alpha\varrho; \\ \psi_3\varrho = ac_1^{-1}(c_1\alpha + b\beta S\alpha\beta)S(c_1\alpha + b\beta S\alpha\beta)\varrho; \end{cases}$$

deren eingliedrige Formen wieder bezeichnet werden können, und welche ergeben,

$$\text{XXII}\ldots \begin{aligned} \alpha_1 &= \pm U(c_3\alpha + b\beta S\alpha\beta), \\ \alpha_2 &= \pm UV\alpha\beta, \\ \alpha_3 &= \pm U(c_1\alpha + b\beta S\alpha\beta). \end{aligned}$$

(7.) Demgemäss ergeben die Ausdrücke in (2.) — wenn wir annehmen, dass $\alpha_3\alpha_1 = +\alpha_2$ ist —

$$\text{XXIII}\ldots \begin{aligned} c_3\alpha + b\beta S\alpha\beta &= (c_3 - c_1)\,x\alpha_1, \\ V\alpha\beta &= (x'z - xz')\alpha_2, \\ c_1\alpha + b\beta S\alpha\beta &= (c_1 - c_3)\,z\alpha_3; \end{aligned}$$

und als eine ergänzende Verification der Uebereinstimmung der verschiedenen Theile dieser ganzen Theorie mag bemerkt werden (vergl. 357, XXIV.), dass

$$\text{XXIV}\ldots \begin{aligned} -ac_3^{-1}(c_3\alpha + b\beta S\alpha\beta)^2 &= (c_3 - c_1)(c_1 - c_3), \\ ab(V\alpha\beta)^2 &= (c_3 - c_2)(c_2 - c_1), \\ -ac_1^{-1}(c_1\alpha + b\beta S\alpha\beta)^2 &= (c_1 - c_3)(c_3 - c_2). \end{aligned}$$

(8.) Was die zweiten Transformationen, XVII. und XVIII., betrifft, so ist leicht zu beweisen, dass wir schreiben können,

$$\text{XXV}\ldots \begin{aligned} (c_3 - c_1)\alpha' &= b\beta\alpha\beta - a\alpha, \\ (c_3 - c_1)\beta' &= a\alpha\beta\alpha - b\beta, \end{aligned}$$

$$\text{XXVI}\ldots \begin{aligned} -(c_3 - c_1)^2 &= (b\beta\alpha\beta - a\alpha)^2 \\ &= (a\alpha\beta\alpha - b\beta)^2; \end{aligned}$$

so dass wir die folgende Gleichung haben

$$\text{XXVII}\ldots \begin{aligned} &[a(V\alpha\rho)^2 + b(S\beta\rho)^2]\,[a^2 + 2ab\,S.(\alpha\beta)^2 + b^2] \\ &= a[V(b\beta\alpha\beta - a\alpha)\rho]^2 + b[S(a\alpha\beta\alpha - b\beta)\rho]^2; \end{aligned}$$

sie ist für irgend einen Vector ρ, irgend zwei Einheitslinien α, β, und irgend zwei Skalare a, b wahr.

(9.) Demgemäss ist aus (4.) ersichtlich, dass α_1, α_3 die Halbirungslinien der Winkel sein müssen, welche α, α' bilden, und auch derjenigen, welche β, β' bilden; und die Ausdrücke XXV. können (da $b - a = c_1 + c_3$) so geschrieben werden,

$$\text{XXVIII}\ldots \begin{aligned} (c_3 - c_1)\alpha' &= (c_3 + c_1)\alpha + 2b\beta S\alpha\beta, \\ (c_1 - c_3)\beta' &= (c_1 + c_3)\alpha - 2a\alpha S\alpha\beta; \end{aligned}$$

und danach können wir, nach XXIII., schreiben,

Digitized by Google

$$\text{XXIX.}\ldots \alpha + \alpha' = 2x\alpha_1,$$
$$\alpha - \alpha' = 2z\alpha_3;$$

so dass α_1 den inneren Winkel, und α_3 den äusseren Winkel der Linien α, α' halbirt.

(10.) Zu gleicher Zeit haben wir die weiteren Ausdrücke,

$$\text{XXX.}\ldots (c_1 - c_3)(\beta + \beta') = 2(c_1\beta - a\alpha S\alpha\beta),$$
$$(c_3 - c_1)(\beta - \beta') = 2(c_3\beta - a\alpha S\alpha\beta);$$

sie können leicht auf die einfachen Formen gebracht werden,

$$\text{XXXI.}\ldots \beta + \beta' = 2x'\alpha_1,$$
$$\beta - \beta' = 2z'\alpha_3,$$

in denen die Coefficienten x' und z' die vorigen Bedeutungen haben.

(11.) Und obwohl wir, um reelle Transformationen zu erhalten, angenommen haben (vergl. III.), dass

$$\text{XXXII.}\ldots (c_1^{-1} - c_2^{-1})(c_2^{-1} - c_3^{-1}) > 0,$$

so sehn wir doch, weil die angenommene Beziehung $\alpha = x\alpha_1 + z\alpha_3$ zwischen den drei Einheitsvectoren $\alpha\ \alpha_1\ \alpha_3$, von denen die beiden letzteren rechtwinklig sind, ergiebt $x^2 + z^2 = 1$, wie in IX., so dass jeder der beiden Ausdrücke VI. den andern einschliesst, und ihre Vergleichung das Verhältniss ergiebt,

$$\text{XXXIII.}\ldots x^2 : z^2 = (c_1^{-1} - c_2^{-1}) : (c_2^{-1} - c_3^{-1}),$$

– sehn wir doch, dass die vorigen Transformationen in einem imaginären (oder rein symbolischen) Sinne statt haben, ohne dass die Ungleichheit XXXII. besteht; so dass wir, allgemein, sagen können, dass die Functionen $S\varrho\varphi\varrho$ und $\varphi_0\varrho$ auf die Formen I. und II. auf sechs verschiednen Wegen gebracht werden können, von denen zwei reelle sind, und die vier andern imaginär sind.

(12.) Es mag hinzugefügt werden, dass sich die erste Gleichung XXII. durch die folgende ersetzen lässt,

$$\text{XXXIV.}\ldots \psi_1\varrho = -bc_1^{-1}(c_1\beta - a\alpha S\alpha\beta)\, S(c_1\beta - a\alpha S\alpha\beta)\varrho,$$

und dass eine entsprechende Form für $\psi_3\varrho$ gilt; und dass wir somit die Freiheit haben, an Stelle von XXII′., die Ausdrücke zu schreiben,

$$\text{XXXV.}\ldots \begin{aligned} \alpha_1 &= U(c_1\beta - a\alpha S\alpha\beta), \\ \alpha_2 &= UV\alpha\beta, \\ \alpha_3 &= U(c_3\beta - a\alpha S\alpha\beta), \end{aligned}$$

für dasjenige rechtwinklige Einheitssystem, welches aus I. oder II. abgeleitet wird.

359. Wenn wir, wie wir natürlich können, die Ausdrücke

$$\text{I.}\ldots \varphi_0\varrho = c_1\alpha_1 S\alpha_1\varrho + c_2\alpha_2 S\alpha_2\varrho + c_3\alpha_3 S\alpha_3\varrho, \qquad 357,\ \text{V.},$$

und

$$\text{II.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = c_1(S\alpha_1\varrho)^2 + c_2(S\alpha_2\varrho)^2 + c_3(S\alpha_3\varrho)^2, \qquad 357,\ \text{VIII.},$$

die **rechtwinkligen Transformationen** der Functionen $\varphi_0\varrho$ und $S\varrho\varphi\varrho$ nennen, dann können wir, nach einer anderen geometrischen Analogie, die uns ersichtlich werden wird, wenn wir dazu kommen werden, kurz von der Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung zu sprechen, — können wir die Ausdrücke,

$$\text{III.}\ldots \varphi_0\varrho = g\varrho + V\lambda\varrho\mu, \qquad 357,\ \text{XIV.},$$

und

$$\text{IV.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = g\varrho^2 + S\lambda\varrho\mu\varrho, \qquad 357,\ \text{II.},$$

die **cyklischen*** **Transformationen** derselben beiden Functionen nennen; und können sagen, dass die beiden andern und neueren Ausdrücke,

$$\text{V.}\ldots \varphi_0\varrho = -a\alpha V\alpha\varrho + b\beta S\beta\varrho, \qquad 358,\ \text{II.},$$

und

$$\text{VI.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = a(V\alpha\varrho)^2 + b(S\beta\varrho)^2, \qquad 358,\ \text{I.},$$

focal** **Transformationen** derselben sind. Wir haben schon gezeigt (357), wie rechtwinklige Formen mit cyklischen zu vertauschen sind; und auch (358), wie von rechtwinkligen Ausdrücken zu focalen überzugehn ist, und den reciproken Uebergang: doch es kann der Mühe werth sein, kurz die gegenseitigen Beziehungen in Betracht zu ziehn, welche zwischen cyklischen und focalen Ausdrücken bestehn, und die Arten von den einen zu den andern überzugehn.

---

* Vergleiche die Anmerkung zu Art. 357.

** Man wird finden, dass die beiden reellen Vectoren α, α', von 358, zwei reelle focal Linien des reellen oder imaginären Kegels sind, welcher zur Oberfläche zweiter Ordnung, $S\varrho\varphi\varrho$ = const., asymptotisch ist.

Digitized by Google

(1.) Um von IV. nach VI. überzugehn, oder von der cyklischen zur focal Form, können wir zuerst die rechtwinklige Transformation II. ausführen, mit den Werthen 357, XX., und XXI., von c_1, c_2, c_3, und von α_1, α_2, α_3, — wir nehmen an, dass die Aufeinanderfolge der Ungleichheiten sei,

$$\text{VII.} \ldots c_3 > c_2 > c_1, \qquad \text{wie in 357, IX.;}$$

— und dann kommen wir (vergl. 358, XV.) zu folgenden Ausdrücken:

$$\text{VIII.} \ldots 4 S\varrho\varphi\varrho = \{S.\varrho[c_1^{\frac{1}{2}}(U\lambda - U\mu) + c_3^{\frac{1}{2}}(U\lambda + U\mu)]\}^2 - \{V.\varrho(c_1^{\frac{1}{2}}(U\lambda + U\mu) + c_3^{\frac{1}{2}}(U\lambda - U\mu)]\}^2;$$

$$\text{VIII}'. \ldots 4 S\varrho\varphi\varrho = -\{S.\varrho[(-c_1)^{\frac{1}{2}}(U\lambda - U\mu) + (-c_3)^{\frac{1}{2}}(U\lambda + U\mu)]\}^2 + \{V.\varrho[(-c_1)^{\frac{1}{2}}(U\lambda + U\mu) + (-c_3)^{\frac{1}{2}}(U\lambda - U\mu)]\}^2;$$

$$\text{IX.} \ldots (c_3 - c_2)^2 S\varrho\varphi\varrho = \{V.\varrho[c_3^{\frac{1}{2}} V\lambda\mu + (-c_2)^{\frac{1}{2}}(\lambda T\mu + \mu T\lambda)]\}^2 + \{S.\varrho[(-c_2)^{\frac{1}{2}} V\lambda\mu - c_3^{\frac{1}{2}}(\lambda T\mu + \mu T\lambda)]\}^2;$$

$$\text{X.} \ldots (c_2 - c_1)^2 S\varrho\varphi\varrho = -\{V.\varrho[(-c_1)^{\frac{1}{2}} V\lambda\mu + c_3^{\frac{1}{2}}(\lambda T\mu - \mu T\lambda)]\}^2 - \{S.\varrho[-c_2^{\frac{1}{2}} V\lambda\mu + (-c_1)^{\frac{1}{2}}(\lambda T\mu - \mu T\lambda)]\}^2;$$

es ist daran zu erinnern, dass (nach 357, XX.)

$$\text{XI.} \ldots \begin{aligned} c_1 &= -g - T\lambda\mu, \\ c_2 &= -g + S\lambda\mu, \\ c_3 &= -g - T\lambda\mu; \end{aligned}$$

und sie sind sämmtlich in symbolischem Sinne wahr, oder sie ergeben (wie in IV.) den reellen Werth $g\varrho^2 + S\lambda\varrho\mu\varrho$ für $S\varrho\varphi\varrho$, wenn g, λ, μ, ϱ reell sind. Und in diesem symbolischen Sinne zählen sie, obwohl sie vier an der Zahl hingeschrieben worden sind, nur als drei verschiedene focal Transformationen, einer gegebnen und reellen cyklischen Form; denn der Ausdruck VIII'. ist eine unmittelbare Folgerung aus VIII.; und weitere Formeln IX'. und X'. könnten in gleicher Weise sofort aus IX. und X. abgeleitet werden.

(2.) Wenn wir uns aber selbst auf reelle focal Formen zu beschränken wünschen, so sind dann vier Fälle in Betracht zu ziehn, in jedem von ihnen ist eine gewisse von den vier

Gleichungen VIII., VIII′., IX., X. zu adoptiren, mit Ausschluss der drei andern. Somit ist, wenn

$$\text{XII.}\ldots c_3 > c_2 > c_1 > 0,$$

und daher

$$c_1^{-1} > c_2^{-1} > c_3^{-1} > 0,$$

die Form VIII. die einzig reelle. Wenn

$$\text{XIII.}\ldots c_3 > c_2 > 0 > c_1,$$
$$c_2^{-1} > c_3^{-1} > 0 > c_1^{-1},$$

dann ist X. die reelle Form. Wenn

$$\text{XIV.}\ldots c_3 > 0 > c_2 > c_1,$$
$$c_3^{-1} > 0 > c_1^{-1} > c_2^{-1},$$

so ist IX. die einzige reelle Form. Wenn endlich

$$\text{XV.}\ldots 0 > c_3 > c_2 > c_1,$$
$$0 > c_1^{-1} > c_2^{-1} > c_3^{-1},$$

das heisst, wenn alle die Wurzeln der cubischen Gleichung $M_0 = 0$ negativ sind, dann ist VIII′. die zu adoptirende Form, unter derselben Bedingung, dass sie reell sein soll.

(3.) Wenn die sämmtlichen Wurzeln c positiv sind, oder in dem Falle, wenn VIII. die reelle focal Form ist, können die Einheitslinien α, β, in VI. so ausgedrückt werden:

$$\text{XVI.}\ldots \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{c_3}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}}(U\lambda - U\mu) + \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^{\frac{1}{2}}(U\lambda + U\mu); \\ \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{b}\right)^{\frac{1}{2}}(U\lambda - U\mu) + \frac{1}{2}\left(\frac{c_3}{b}\right)^{\frac{1}{2}}(U\lambda + U\mu); \end{cases}$$

wobei

$$b = c_1 - c_2 + c_3$$

ist, wie vorher (358, IV.).

(4.) In demselben Falle VIII. können die Ausdrücke für $4S\varrho\varphi\varrho$ (vergl. 358, XVI.) unter einer der beiden weiteren reellen Formen geschrieben werden:

$$\text{XVII.}\ldots 4S\varrho\varphi\varrho = N\{(c_3^{\frac{1}{2}} + c_1^{\frac{1}{2}})\varrho . U\lambda + (c_3^{\frac{1}{2}} - c_1^{\frac{1}{2}})U\mu . \varrho\};$$
$$\text{XVII′.}\ldots 4S\varrho\varphi\varrho = N\{(c_3^{\frac{1}{2}} + c_1^{\frac{1}{2}})U\lambda . \varrho + (c_3^{\frac{1}{2}} - c_1^{\frac{1}{2}})\varrho . U\mu\};$$

so dass wir, wenn wir, zur Abkürzung, schreiben,

Digitized by Google

$$\text{XVIII.} \ldots \begin{aligned} \iota_0 &= \tfrac{1}{2}(c_3^{\frac{1}{2}} + c_1^{\frac{1}{2}})U\lambda, \\ \varkappa_0 &= \tfrac{1}{2}(c_3^{\frac{1}{2}} - c_1^{\frac{1}{2}})U\mu, \end{aligned}$$

den kurzen Ausdruck erhalten,

$$\text{XIX.} \ldots S\varrho\varphi\varrho = N(\iota_0\varrho + \varrho\varkappa_0) = N(\varrho\iota_0 + \varkappa_0\varrho).$$

(5.) Oder wir können machen

$$\text{XX.} \ldots \begin{aligned} \iota &= \tfrac{1}{2}(c_1^{-\frac{1}{2}} + c_3^{-\frac{1}{2}})U\lambda, \\ \varkappa &= \tfrac{1}{2}(c_1^{-\frac{1}{2}} - c_3^{-\frac{1}{2}})U\mu, \end{aligned}$$

und danach ist

$$\varkappa^2 - \iota^2 = c_1^{-\frac{1}{2}} c_3^{-\frac{1}{2}};$$

und wir haben dann die Transformation,

$$\text{XXI.} \ldots S\varrho\varphi\varrho = N\tfrac{\iota\varrho + \varrho\varkappa}{\varkappa^2 - \iota^2},$$

welche mit der Gleichung 281, XXIX. des Ellipsoids verglichen werden mag; und damit sie von reeller Form sei, oder dass es ihre vector Constanten, ι, $\varkappa$, seien, dazu ist nothwendig, dass die Wurzeln c der cubischen Gleichung sämmtlich positiv sind, wie vorher.

(6.) Ich habe kürzlich [in 358, (8.), u. s. w.] gezeigt, wie man von einer gegebnen und reellen focal Form zu einer zweiten von derselben Art übergehn kann, deren neue reelle Einheitslinien α', β' in derselben Ebne liegen, wie die beiden vorigen oder gegebnen Linien, α, β; aber wir haben noch nicht gezeigt, wie man von einer focal Form zu einer cyklischen übergehn kann, obgleich wir den umgekehrten Uebergang kürzlich discutirt haben. Jetzt wollen wir daher annehmen, dass die Form VI. reell und gegeben sei, oder dass die beiden skalar Constanten a, b, und die beiden Einheitsvectoren α, β, reelle und gegebne Werthe haben; und wir wollen diesen Ausdruck VI. auf die frühere Form IV. zu bringen suchen.

(7.) Wir könnten, zu diesem Zweck, damit beginnen, anzunehmen, dass

$$\text{XXII.} \ldots c_1^{-1} > c_2^{-1} > c_3^{-1},$$

wie in 358, III.; und das würde die Ausdrücke 358, XXI. und XXII., für c_1 c_2 c_3 und α_1 α_2 α_3 ergeben, und so würde

man die rechtwinklige Transformation an die Stelle setzen, von der wir, wie vorher, zur cyklischen übergehn könnten.

(8.) Um aber die Analyse ein wenig zu verändern, wollen wir jetzt annehmen, dass die gegebne focal Form eine von den vier folgenden [vergl. (1.)] sei:

$$\begin{aligned}
&\text{XXIII.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = (S\beta_0\varrho)^2 - (V\alpha_0\varrho)^2;\\
&\text{XXIII}'\ldots S\varrho\varphi\varrho = (V\alpha_0\varrho)^2 - (S\beta_0\varrho)^2;\\
&\text{XXIV.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = (S\beta_0\varrho)^2 + (V\alpha_0\varrho)^2;\\
&\text{XXIV}'\ldots S\varrho\varphi\varrho = -(V\alpha_0\varrho)^2 - (S\beta_0\varrho)^2;
\end{aligned}$$

in jeder von ihnen hat man sich α_0 und β_0 als gegebne und reelle Vectoren zu denken, aber nicht allgemein als Einheitslinien; und sie sind in der That die vier Fälle, welche unter der allgemeinen Form,

$$a\,(V\alpha\varrho)^2 + b\,(S\beta\varrho)^2,$$

begriffen sind, je nachdem die Skalare a und b positiv oder negativ sind. Es wird hinreichend sein, die beiden Fälle, XXIII. und XXIV., zu betrachten, aus denen die beiden andern sofort folgen.

(9.) Für den Fall XXIII. leiten wir leicht die reelle cyklische Transformation ab,

$$\begin{aligned}
\text{XXV.}\ldots S\varrho\varphi\varrho &= (S\beta_0\varrho)^2 - (S\alpha_0\varrho)^2 + \alpha_0{}^2\varrho^2\\
&= S(\beta_0 + \alpha_0)\varrho\,.\,S(\beta_0 - \alpha_0)\varrho + \alpha_0{}^2\varrho^2\\
&= g\varrho^2 + S\lambda\varrho\mu\varrho\\
&= (g - S\lambda\mu)\varrho^2 + 2\,S\lambda\mu\,S\mu\varrho,
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
\text{XXVI.}\ldots \lambda &= \beta_0 + \alpha_0,\\
\mu &= \tfrac{1}{2}(\beta_0 - \alpha_0),\\
g &= \tfrac{1}{2}(\alpha_0{}^2 + \beta_0{}^2);
\end{aligned}$$

und die Gleichungen 357, (9.) setzen uns daher in den Stand, zu den beiden imaginären cyklischen Formen überzugehn.

(10.) Zum Beispiel, wenn die vorgeschlagne Function ist (vergl. XIX.),

$$\begin{aligned}
\text{XXVII.}\ldots S\varrho\varphi\varrho &= N(\iota_0\varrho + \varrho\varkappa_0)\\
&= [S(\iota_0 + \varkappa_0)\varrho]^2 - [V(\iota_0 - \varkappa_0)\varrho]^2,
\end{aligned}$$

so können wir schreiben

Digitized by Google

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \iota_0 - \varkappa_0, \\ \beta_0 &= \iota_0 + \varkappa_0, \\ \lambda &= 2\iota_0, \\ \mu &= \varkappa_0, \\ g &= \iota_0^2 + \varkappa_0^2; \end{aligned}$$

und die geforderte Transformation ist (vergl. 336, XI.),

$$\text{XXVIII.}\ldots N(\iota_0\varrho + \varrho\varkappa_0) = (\iota_0^2 + \varkappa_0^2)\varrho^2 + 2S\iota_0\varrho\varkappa_0\varrho.$$

(11.) Um den Fall XXIV. nach unserer allgemeinen Methode zu behandeln, können wir der Einfachheit wegen die unteren Indices $_0$ fortlassen, und können einfach (vergl. V. und VI.) die Ausdrücke hinschreiben,

$$\text{XXIX.}\ldots \varphi\varrho = -\alpha V\alpha\varrho + \beta S\beta\varrho,$$

und

$$\text{XXX.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = (V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2;$$

bei ihnen ist indessen zu beachten, dass α und β, wenn auch reelle Vectoren, jetzt nicht Einheitslinien (8.) sind. Daher bilden wir, da $-\alpha V\alpha\varrho = \alpha S\alpha\varrho - \alpha^2\varrho$, leicht die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \text{XXXI.}\ldots m &= \alpha^2(S\alpha\beta)^2, \\ m' &= \alpha^2(\alpha^2 - \beta^2) - (S\alpha\beta)^2, \\ m'' &= \beta^2 - 2\alpha^2; \end{aligned}$$

$$\text{XXXII.}\ldots \begin{cases} \psi\varrho = V\alpha\beta S\beta\alpha\varrho - \alpha^2(\alpha V\alpha\varrho + \beta V\beta\varrho) + \alpha^4\varrho \\ \quad = V\alpha\varrho\beta S\alpha\beta + \alpha(\alpha^2 - \beta^2) S\alpha\varrho, \\ \chi\varrho = -(\alpha S\alpha\varrho + \beta S\beta\varrho) + (\beta^2 - \alpha^2)\varrho; \end{cases}$$

und daher

$$\text{XXXIII.}\ldots M = (c - \alpha^2)[c^2 + (\beta^2 - \alpha^2)c - (S\alpha\beta)^2],$$

und

$$\begin{aligned} \text{XXXIV.}\ldots \Psi\varrho &= V\alpha\varrho\beta S\alpha\beta + (\beta^2 - \alpha^2)(c\varrho - \alpha S\alpha\varrho) \\ &\quad - c(\alpha S\alpha\varrho + \beta S\beta\varrho) + c^2\varrho \\ &= [\alpha(\alpha^2 - \beta^2 - c) + \beta S\alpha\beta] S\alpha\varrho + (\alpha S\alpha\beta \\ &\quad - c\beta) S\beta\varrho + [c^2 + (\beta^2 - \alpha^2)c - (S\alpha\beta)^2]\varrho. \end{aligned}$$

(12.) Führt man daher eine reelle und positive skalar Constante, r, ein, so dass

$$\text{XXXV.}\ldots r^4 = (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4(S\alpha\beta)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 + 4(V\alpha\beta)^2$$
$$= \alpha^4 + (\alpha\beta)^2 - (\beta\alpha)^2 + \beta^4$$
$$= \alpha^4 + 2\,S.(\alpha\beta)^2 + \beta^4$$
$$= \alpha^{-2}(\alpha^3 + \beta\alpha\beta)^2 = \beta^{-2}(\beta^3 + \alpha\beta\alpha)^2$$
$$= \text{u. s. w.},$$

wo (nach 199, u. s. w.),

$$S.(\alpha\beta)^2 = (S\alpha\beta)^2 + (V\alpha\beta)^2 = 2(S\alpha\beta)^2 - \alpha^2\beta^2$$
$$= 2(V\alpha\beta)^2 + \alpha^2\beta^2,$$

so lassen sich die Wurzeln von $M = 0$, wie folgt, ausdrücken:

$$\text{XXXVI.}\ldots c_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 + r^2),$$
$$c_2 = \alpha^2,$$
$$c_3 = \tfrac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2 - r^2);$$

und wenn sie so angeordnet werden, so haben wir die Ungleichheiten,

$$\text{XXXVII.}\ldots c_1 > 0 > c_3 > c_2,$$
$$c_1^{-1} > 0 > c_2^{-1} > c_3^{-1}.$$

(13.) Die entsprechenden Formen von $\Psi\varrho$ sind die drei eingliedrigen Ausdrücke,

$$\text{XXXVIII.}\ldots \begin{cases} \psi_1\varrho = c_3^{-1}(\alpha c_3 + \beta S\alpha\beta)\,S(\alpha c_3 + \beta S\alpha\beta)\,\varrho, \\ \psi_2\varrho = V\alpha\beta\,S\beta\alpha\varrho, \\ \psi_3\varrho = c_1^{-1}(\alpha c_1 + \beta S\alpha\beta)\,S(\alpha c_1 + \beta S\alpha\varrho)\,\varrho; \end{cases}$$

sie können in mannigfacher Weise transformirt und verificirt werden, und ergeben die drei folgenden rechtwinkligen vector Einheiten,

$$\text{XXXIX.}\ldots \alpha_1 = U(\alpha c_3 + \beta S\alpha\beta),$$
$$\alpha_2 = UV\alpha\beta,$$
$$\alpha_3 = U(\alpha c_1 + \beta S\alpha\beta);$$

im Zusammenhang mit ihnen ist leicht zu beweisen, dass

$$\text{XL.}\ldots \begin{cases} T(\alpha c_3 + \beta S\alpha\beta) = (-c_3)^{\frac{1}{2}}(c_1 - c_2)^{\frac{1}{2}}(c_1 - c_3)^{\frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad = r(c_1 - c_2)^{\frac{1}{2}}(-c_3)^{\frac{1}{2}}, \\ TV\alpha\beta = (c_1 - c_2)^{\frac{1}{2}}(c_3 - c_2)^{\frac{1}{2}}; \\ T(\alpha c_1 + \beta S\alpha\beta) = c_1^{\frac{1}{2}}(c_3 - c_2)^{\frac{1}{2}}(c_1 - c_3)^{\frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad = r(c_3 - c_2)^{\frac{1}{2}}c_1^{\frac{1}{2}}; \end{cases}$$

die Wurzeln sind, nach XXXVII., sämmtlich reell.

Digitized by Google

(14.) Wir haben somit, für die gegebne focal Form XXX., die rechtwinklige Transformation,

$$\text{XLI.}\ldots\ S\varrho\varphi\varrho = (V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2$$
$$= \frac{c_1[S(\alpha c_3 + \beta S\alpha\beta)\varrho]^2}{-c_3(c_1-c_2)r^2} + \frac{c_2(S\alpha\beta\varrho)^2}{(c_1-c_2)(c_3-c_2)}$$
$$+ \frac{c_3[S(\alpha c_1 + \beta S\alpha\beta)\varrho]^2}{c_1(c_3-c_2)r^2},$$

oder kurz,

$$\text{XLII.}\ldots\ S\varrho\varphi\varrho = (V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2$$
$$= c_1[S.\varrho U(\alpha c_3 + \beta S\alpha\beta)\varrho]^2 + \alpha^2(S.\varrho UV\alpha\beta)^2$$
$$+ c_3[S.\varrho U(\alpha c_1 + \beta S\alpha\beta)]^2;$$

in ihr ist das erste Glied positiv, aber die beiden andern sind negativ, und c_1, c_3 sind die Wurzeln der quadratischen Gleichung,

$$\text{XLIII.}\ldots\ 0 = c^2 + (\beta^2 - \alpha^2)c - (S\alpha\beta)^2.$$

(15.) Wir haben auch die Parallelismen,

$$\text{XLIV.}\ldots\ \alpha c_3 + \beta S\alpha\beta \parallel \beta c_1 - \alpha S\alpha\beta,$$
$$\alpha c_1 + \beta S\alpha\beta \parallel \beta c_3 - \alpha S\alpha\beta,$$

da

$$c_1 c_3 = -(S\alpha\beta)^2;$$

und können daher schreiben,

$$\text{XLV.}\ldots\ S\varrho\varphi\varrho = (V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2$$
$$= c_1[S.\varrho U(\beta c_1 - \alpha S\alpha\beta)]^2 + \alpha^2(S.\varrho UV\alpha\beta)^2$$
$$+ c_3[S.\varrho U(\beta c_3 - \alpha S\alpha\beta)]^2;$$

während

$$\text{XLVI.}\ldots\ T(\beta c_1 - \alpha S\alpha\beta) = r c_1^{\frac{1}{2}}(c_1 - c_2)^{\frac{1}{2}},$$
$$T(\beta c_3 - \alpha S\alpha\beta) = r(-c_3)^{\frac{1}{2}}(c_3 - c_2)^{\frac{1}{2}},$$

und

$$r = (c_1 - c_3)^{\frac{1}{2}},$$

wo die Wurzeln reell sind, wie vorher.

(16.) Multipliciren wir daher mit $r^2(TV\alpha\beta)^2$, oder mit $(c_1 - c_2)(c_1 - c_3)(c_3 - c_2)$, so erhalten wir die neue Gleichung

$$\text{XLVII.}\ldots\ (c_1 - c_3)\{(TV\alpha\beta)^2[(V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2] - \alpha^2(S\alpha\beta\varrho)^2\}$$
$$= (c_3 - \alpha^2)(c_1 S\beta\varrho - S\alpha\beta S\alpha\varrho)^2 - (c_1 - \alpha^2)(c_3 S\beta\varrho - \alpha S\alpha\beta)^2;$$

sie ist nur ein anderer Weg, dieselbe rechtwinklige Transformation wie vorher auszudrücken, hat aber den Vortheil, frei von Divisoren zu sein.

(17.) Entwickelt man das zweite Glied von XLVII., und dividirt durch $c_1 - c_3$, so erhält man die neue Transformation:

$$\text{XLVIII.} \ldots (TV\alpha\beta)^2 S\varrho\varphi\varrho = -(V\alpha\beta)^2[(V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2] = \alpha^2(S\alpha\beta\varrho)^2 - (S\alpha\beta)^2(S\alpha\varrho)^2 + 2\alpha^2 S\alpha\beta S\alpha\varrho S\beta\varrho + C(S\beta\varrho)^2;$$

in ihr haben wir zur Abkürzung geschrieben,

$$\text{XLIX} \ldots C = c_1 c_3 - \alpha^2(c_1 + c_3).$$

(18.) Die Ausdrücke XXXVI. für c_1, c_3 ergeben somit,

$$\text{L.} \ldots C = -\alpha^4 - (V\alpha\beta)^2;$$

und demnach wird diese Gleichung, wenn dieser Werth für C in XLVIII. eingesetzt wird, eine Identität, oder sie hat für sämmtliche Werthe der drei Vectoren, α, β, ϱ statt; wie das auf verschiedenen Wegen bewiesen* werden kann.

(19.) Lässt man dies Resultat zu, so sieht man, dass es allein zur Aufstellung der Gleichung XLVII. nicht nothwendig ist, dass c_1 und c_2 Wurzeln der besonderen quadratischen Gleichung XLIII. sein müssen. Es ist, zu diesem Zweck, hinreichend, dass sie Wurzeln irgend einer quadratischen Gleichung,

$$\text{LI.} \ldots c^2 + Ac + B = 0,$$

sind, mit der Beziehung zwischen ihren Coefficienten, dass

$$\text{LII.} \ldots A\alpha^2 + B + \alpha^4 + (V\alpha\beta)^2 = 0.$$

Wenn wir aber mit ihr die Bedingung für Rechtwinkligkeit, $\alpha_3 \perp \alpha_1$, combiniren, oder

$$\text{LIII.} \ldots 0 = S.(c_1\beta - \alpha S\alpha\beta)(c_3\beta - \alpha S\alpha\beta) = A(S\alpha\beta)^2 + B\beta^2 + \alpha^2(S\alpha\beta)^2,$$

so erhalten wir eine zweite Beziehung, welche in bestimmter Weise, für die beiden Coefficienten, die Werthe ergiebt,

---

* Viele derartige Beweise, oder Verificirungen, wie es die eine ist, auf welche hier hingewiesen wird, sind absichtlich, auf dieser Stufe, dem Leser als Uebungsbeispiele überlassen.

Digitized by Google

$$\text{LIV.}\ldots\ A = \beta^2 - \alpha^2$$
$$B = -(S\alpha\beta)^2;$$

und so, auf einem neuen Wege, zur Gleichung XLIII. führt.

(20.) Auf diese Weise hätten wir daher dazu geführt werden können, die Richtigkeit der rechtwinkligen Transformation XLVII. zu begreifen, und der quadratischen Gleichung XLIII., deren Wurzeln c_1 und c_3 sind, ohne vorher die cubische Gleichung XXXIII. gefunden zu haben, deren Factor die quadratische Gleichung ist, und deren andere Wurzel $c_2 = \alpha^2$ ist. Aber wenn wir die allgemeine Methode dieses Abschnitts nicht angewandt hätten, welche uns dazu führte, jene cubische Gleichung zuerst zu bilden, so hätte uns nichts auf die besondere Form XLVII. gebracht, auf die wir somit nur durch eine gewisse Art von Zufall hätten gelangen können.

(21.) Die Werthe von $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ ergeben auch (vergl. 357, VII.),

$$\text{LV.}\ldots\ -\varrho^2 = [S.\varrho\, U(\beta c_1 - \alpha S\alpha\beta)]^2 + (S.\varrho\, UV\alpha\beta)^2 + [S.\varrho\, U(\beta c_3 - \alpha S\alpha\beta)]^2;$$

das heisst, nach XL. und XLVI.,

$$\text{LVI.}\ldots\ c_1 c_3 (c_1 - c_3)[\varrho^2 (V\alpha\beta)^2 - (S\alpha\beta\varrho)^2] = c_3 (c_3 - \alpha^2)(c_1 S\beta\varrho - S\alpha\beta S\alpha\varrho)^2 - c_1 (c_1 - \alpha^2)(c_3 S\beta\varrho - S\alpha\beta S\alpha\varrho);$$

und demnach setzen uns die Werthe XXXVI. für c_1, c_3 in den Stand, jedes Glied dieser letzten Gleichung unter der gemeinsamen Form, $-c_1 c_3 (c_1 - c_3)(\alpha S\beta\varrho - \beta S\alpha\varrho)^2$, auszudrücken.

(22.) Vergleicht man die letzten Ungleichheiten $c_1 > c_3 > c_2$ (XXXVII.) mit der Anordnung 357, IX., so sieht man, nach 357, (6.), dass für die reelle cyklische Transformation (6.), welche wir gegenwärtig suchen, die Ebne von λ, μ senkrecht zu α_3 ist, und nicht zu α_2, wie in 357, (3.), u. s. w. Wir wollen daher $(c_3 S\beta\varrho - S\alpha\beta S\alpha\varrho)^2$ zwischen den Gleichungen XLVII. und LVI. eliminiren, und das ergiebt, nach wenigen Reductionen, die reelle Transformation:

$$\text{LVII.}\ldots\ [(S\alpha\beta)^2 - c_1\beta^2][(V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2] - (c_1 - \alpha^2)(S\alpha\beta)^2\varrho^2 = (c_1 S\beta\varrho - S\alpha\beta S\alpha\varrho)^2 - c_1 (S\alpha\beta\varrho)^2$$
$$= S.\varrho\,(c_1\beta - \alpha S\alpha\beta + c_1^{\frac{1}{2}} V\alpha\beta)\, S.\varrho\,(c_1\beta - \alpha S\alpha\beta - c_1^{\frac{1}{2}} V\alpha\beta);$$

und die ist von der gewünschten Art.

(23.) Demgemäss findet man, dass die folgende Gleichung,

$$\text{LVIII.}\ldots [(S\alpha\beta)^2 - c\beta^2](V\alpha\varrho)^2 + (c-\alpha^2)[c(S\beta\varrho)^2 - \varrho^2 S(\alpha\beta)^2] = (cS\beta\varrho - S\alpha\beta S\alpha\varrho)^2 - c(S\alpha\beta\varrho)^2,$$

eine Identität ist, oder dass sie für sämmtliche Werthe des Skalars c, und der Vectoren α, β, ϱ, statt hat; daher nimmt sie dadurch, dass man $c(V\alpha\beta)^2\varrho^2$ auf beiden Seiten addirt, — wie leicht ersichtlich, — die identische Form an,

$$\text{LIX.}\ldots [(S\alpha\beta)^2 - c\beta^2](S\alpha\varrho)^2 + c(c-\alpha^2)(S\beta\varrho)^2 = (cS\beta\varrho - S\alpha\beta S\alpha\varrho)^2 - c(\alpha S\beta\varrho - \beta S\alpha\varrho)^2;$$

so dass, wenn c_1 die eine Wurzel der quadratischen Gleichung XLIII. ist, oder wenn $c_1(c_1 - \alpha^2) = (S\alpha\beta)^2 - c_1\beta^2$, die Transformation LVII. wenigstens symbolisch gültig ist: aber wir müssen, wie vorher, die positive Wurzel dieser quadratischen Gleichung für c_1 nehmen, wenn wir wünschen, dass diese Transformation eine reelle sein soll, in Betreff der Constanten, welche sie verwendet. Und wenn wir zufällig darauf gekommen wären [vergl. (20.)], die Identität LIX. zu erfassen, und ihre Transformation LVIII. einzusehn, so hätten wir auch auf diesem Wege darauf hingeführt werden können, die quadratische Gleichung XLIII. zu bilden, ohne dass wir vorher die cubische Gleichung XXXIII. hätten zu bilden brauchen.

(24.) Wir sehn daher schon, wie die eine der beiden imaginären cyklischen Transformationen der gegebnen focal Form XXX. zu erhalten ist, nämlich dadurch, dass man c_1 mit c_3 in LVII. vertauscht; und die andere imaginäre Transformation hat man, nach vorher entwickelten Sätzen, wenn man $(S\alpha\beta\varrho)^2$ zwischen XLVII. und LVI. eliminirt; dies Verfahren führt leicht zur Gleichung,

$$\text{LX.}\ldots (V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2 + \alpha^2\varrho^2 = (c_1 - c_3)^{-1}\{c_1^{-1}(cS\beta\varrho - S\alpha\beta S\alpha\varrho)^2 - c_3^{-1}(c_3 S\beta\varrho - S\alpha\beta S\alpha\varrho)^2\},$$

in welcher das zweite Glied die Summe zweier Quadrate ist (c_1 ist > 0, aber $c_3 < 0$); und der zweite Ausdruck LVII. würde zu demselben Resultat führen, wenn man c_1 durch c_3 ersetzt haben würde. Demnach ist jedes Glied von LX. gleich $(S\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2$, wenn c_1, c_3 die Wurzeln irgend einer qua-

Digitized by Google

dratischen Gleichung LI. sind, allein mit der einen Bedingung, dass

$$\text{LXI.}\ldots c_1 c_3 = B = -(S\alpha\beta)^2;$$

sie genügt indessen, wenn sie mit der Bedingung der Rechtwinkligkeit LIII. combinirt wird, um auch zu ergeben,

$$A^2 = \beta^2 - \alpha^2,$$

wie in LIV., und uns so zur quadratischen Gleichung XLIII. zurückzuleiten, die wir nach der allgemeinen Methode als einen Factor der cubischen Gleichung XXXIII. abgeleitet hatten.

(25.) Und da die Werthe XXXVI. von c_1, c_3 das zweite Glied von LX. auf die einfache Form, $(S\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2$, bringen, wie vorher, so können wir auf diese Weise, oder selbst ohne die Wurzeln c_1, c_3 überhaupt anzuwenden, den folgenden Ausdruck für die letzte imaginäre cyklische Transformation ableiten:

$$\begin{aligned}\text{LXII.}\ldots S\varrho\varphi\varrho &= (V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2 \\ &= -\alpha^2\varrho^2 + S(\alpha+\sqrt{-1}\beta)\varrho\,.\,S(\alpha-\sqrt{-1}\beta)\varrho,\end{aligned}$$

in dem $\sqrt{-1}$ die Imaginäre der Algebra ist [vergl. 214, (6.)]; während der reelle Skalar r^4 in XXXV. zu gleicher Zeit die mit dem Vorigen in Verbindung stehende imaginäre Form annehmen kann,

$$\begin{aligned}\text{LXIII.}\ldots r^4 &= (\alpha^2 - \beta^2)^2 + 4(S\alpha\beta)^2 \\ &= (\alpha + \sqrt{-1}\,\beta)^2(\alpha - \sqrt{-1}\,\beta)^2.\end{aligned}$$

(26.) Was endlich den Uebergang von der gegebnen Form XXX. zu einer zweiten reellen focal Form [vergl. 358, (4.)] betrifft, oder zur Transformation,

$$\text{LXIV.}\ldots (V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2 = (V\alpha'\varrho)^2 + (S\beta'\varrho)^2,$$

in welcher α' und β' reelle Vectoren sind, verschieden von $\pm\alpha$ und von $\pm\beta$, aber in derselben Ebne wie diese, so mag genügen [vergl. 358, (8.)], die Formeln niederzuschreiben:

$$\begin{aligned}\text{LXV.}\ldots r^2\alpha' &= -(\alpha^3 + \beta\alpha\beta), \\ r^2\beta' &= -(\beta^3 + \alpha\beta\alpha),\end{aligned}$$

in denen r^2 denselben reellen Werth hat, wie vorher, so dass wir (nach XXXV., u. s. w.) die Beziehungen haben,

$$\text{LXVI.}\ldots \begin{aligned} T\alpha' &= T\alpha, \\ T\beta' &= T\beta, \\ S\alpha'\beta' &= S\alpha\beta; \end{aligned}$$

$$\text{LXVII.}\ldots \begin{cases} r^2(\alpha+\alpha') = \alpha(r^2-\alpha^2+\beta^2) - 2\beta S\alpha\beta \\ \qquad\qquad = -2(\alpha c_3 + \beta S\alpha\beta)\,||\,\alpha_1, \\ r^2(\alpha-\alpha') = \alpha(r^2+\alpha^2-\beta^2) + 2\beta S\alpha\beta \\ \qquad\qquad = 2(\alpha c_1 + \beta S\alpha\beta)\,||\,\alpha_3; \end{cases}$$

$$\text{LXVIII.}\ldots \begin{cases} r^2(\beta+\beta') = \beta(r^2+\alpha^2-\beta^2) - 2\alpha S\alpha\beta \\ \qquad\qquad = 2(\beta c_1 - \alpha S\alpha\beta)\,|\,\alpha_1, \\ r^2(\beta-\beta') = \beta(r^2-\alpha^2+\beta^2) + 2\alpha S\alpha\beta \\ \qquad\qquad = -2(\beta c_3 - \alpha S\alpha\beta)\,||\,\alpha_3. \end{cases}$$

(27.) Wir haben daher die Identität,

$$\text{LXIX.}\ldots [V(\alpha^3+\beta\alpha\beta)\varrho]^2 + [S(\beta^3+\alpha\beta\alpha)\varrho]^2 = [\alpha^4 + 2S.(\alpha\beta)^2 + \beta^4]\,[-(V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2];$$

und mit ihr kann die weitere Identität von derselben Art combinirt werden,

$$\text{LXX.}\ldots -[V(\alpha^3-\beta\alpha\beta)\varrho]^2 + [S(\beta^3-\alpha\beta\alpha)\varrho]^2 = [\alpha^4 - 2S.(\alpha\beta)^2 + \beta^4]\,[-(V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2],$$

welche uns in den Stand setzt, von der focal Form XXIII. zu einer zweiten reellen focal Form überzugehn, deren beide neuen Linien in derselben Ebne liegen, wie die beiden alten; und es mag angemerkt werden, dass wir von LXIX. zu LXX. dadurch übergehn können, dass wir α mit $\alpha\sqrt{-1}$ vertauschen.

360. Ausser den rechtwinkligen, cyklischen und focal Transformationen von $S\varrho\varphi\varrho$, welche schon in Betracht gezogen worden sind, giebt es andere, wenn schon sie vielleicht von geringerer Wichtigkeit sind: wir werden hier aber nur zweier von ihnen, als Beispiele, Erwähnung thun, von denen die eine die bifocale, und die andere die gemischte Transformation genannt werden kann.

(1.) Die beiden Linien, α, α', in 359, LXV., heissen focal Linien*, und ein Ausdruck, welcher sie beide einführt,

* Vergleiche die Anmerkung zu Art. 359.

Digitized by Google

kann deswegen eine bifocale Transformation genannt werden.

(2.) Behält man daher den Werth 359, XXXV. von r^4 bei, und führt eine neue Hülfsconstante e ein, welche der Gleichung,

$$\text{I.} \ldots \beta^2 - \alpha^2 = r^2 e,$$

zu genügen hat, und daher auch

$$\text{II.} \ldots 4(S\alpha\beta)^2 = r^4(1 - e^2),$$

so dass

$$\text{III.} \ldots 4e^2(S\alpha\beta)^2 = (1 - e^2)(\beta^2 - \alpha^2)^2,$$

so ergiebt die erste Gleichung 359, LXV.,

$$\text{IV.} \ldots r^2(e\alpha - \alpha') = 2\beta S\alpha\beta,$$

$$\text{V.} \ldots r^2(e\, S\alpha\rho - S\alpha'\rho) = 2\, S\alpha\beta\, S\beta\rho;$$

und daher, wenn $S\rho\varphi\rho$ die Form 359, XXX. hat,

$$\begin{aligned}\text{VI.} \ldots (1 - e^2) S\rho\varphi\rho &= (1 - e^2)[(V\alpha\rho)^2 + (S\beta\rho)^2] \\ &= (1 - e^2)(V\alpha\rho)^2 + (e\, S\alpha\rho - S\alpha'\rho)^2 \\ &= (e^2 - 1)\alpha^2\rho^2 + (S\alpha\rho)^2 - 2e\, S\alpha\rho\, S\alpha'\rho \\ &\qquad + (S\alpha'\rho)^2;\end{aligned}$$

hier ist $\alpha^2 = \alpha'^2$, nach 359, LXVI., so dass α und α' so anzusehn sind, als ob sie symmetrisch in diese letzte Transformation eintreten; sie ist von der vorher erwähnten bifocalen Art.

(3.) Aus demselben Grunde umfasst der zuletzt gefundene Ausdruck für $S\rho\varphi\rho$ wieder (vergl. 358) sechs skalar Constanten; nämlich e, $T\alpha$ $(= T\alpha')$, und diejenigen vier, welche in den beiden Einheitslinien $U\alpha$, $U\alpha'$ enthalten sind.

(4.) In den sämmtlichen vorhergehenden Transformationen ist die skalar und quadratische Function $S\rho\varphi\rho$ augenscheinlich homogen gewesen, oder hat, wie wir gesehn haben, keine Glieder von niederem, als dem zweiten Grade, in ρ, umfasst. Wir können indessen auch die scheinbar heterogene, oder gemischte Form anwenden,

$$\text{VII.} \ldots S\rho\varphi\rho = g'(\rho - \varepsilon)^2 + 2\, S\lambda(\rho - \zeta)\, S\mu(\rho - \zeta) + e;$$

in ihr haben g', λ, μ dieselben Bedeutungen wie in 357, aber e, ε, ζ sind drei neue Constanten, welche den beiden Bedingungen für Homogenität unterworfen sind,

$$\text{VIII.} \ldots g'\varepsilon + \lambda S\mu\zeta + \mu S\lambda\zeta = 0,$$

und

$$\text{IX.} \ldots g'\varepsilon^2 + 2\, S\lambda\zeta\, S\mu\zeta + e = 0,$$

Digitized by Google

und zwar zu dem Zweck, dass sich der Ausdruck VII. auf die Form bringen lässt,

$$\text{X.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = g'\varrho^2 + 2S\lambda\varrho\, S\mu\varrho,$$

wie in 357, II′.

(5.) Weitere allgemeine homogene Transformationen von $S\varrho\varphi\varrho$, welche selbst reell sind, obwohl sie mit imaginären* cyklischen Formen in Verbindung stehn [vergl. 357, (7.)], da eine Summe zweier Quadrate von linearen und skalar Functionen, in einem imaginären Sinne, ein Product zweier solchen Functionen ist. sind die beiden folgenden [vergl. 357, (9.)]:

$$\text{XI.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = g\varrho^2 + S\lambda\varrho\,\mu\varrho = g_1\varrho^2 + (S\lambda_1\varrho)^2 + (S\mu_1\varrho)^2;$$

und

$$\text{XII.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = g\varrho^2 + S\lambda\varrho\,\mu\varrho = g_3\varrho^2 - (S\lambda_3\varrho)^2 - (S\mu_3\varrho)^2;$$

in welchen [vergl. 357, (2.) und (8.)],

$$\text{XIII.}\ldots g_1 = g + T\lambda\mu = -c_1,\qquad g_3 = g - T\lambda\mu = -c_3,$$

ferner

$$\text{XIV.}\ldots \lambda_1 = V\lambda\mu(T\lambda\mu - S\lambda\mu)^{-\frac{1}{2}},\qquad \mu_1 = (\lambda T\mu + \mu T\lambda)(T\lambda\mu - S\lambda\mu)^{-\frac{1}{2}},$$

und

$$\text{XV.}\ldots \lambda_3 = V\lambda\mu(T\lambda\mu + S\lambda\mu)^{-\frac{1}{2}},\qquad \mu_3 = (\lambda T\mu - \mu T\lambda)(T\lambda\mu + S\lambda\mu)^{-\frac{1}{2}};$$

so dass g_1, λ_1, μ_1, und g_3, λ_3, μ_3 reell sind, wenn g, λ, μ es sind.

(6.) Wir haben daher die folgenden beiden neuen gemischten Transformationen:

$$\text{XVI.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = g_1(\varrho - \varepsilon_1)^2 + [S\lambda_1(\varrho - \zeta_1)]^2 + [S\mu_1(\varrho - \zeta_1)]^2 + e_1;$$

und

$$\text{XVII.}\ldots S\varrho\varphi\varrho = g_3(\varrho - \varepsilon_3)^2 - [S\lambda_3(\varrho - \zeta_3)]^2 - [S\mu_3(\varrho - \zeta_3)]^2 + e_3;$$

---

* $\lambda_1 \pm \sqrt{-1}\,\mu_1$, und $\lambda_3 \pm \sqrt{-1}\,\mu_3$, können hier zwei Paare von imaginären cyklischen Normalen heissen, und zwar derjenigen reellen Oberfläche zweiter Ordnung, deren Gleichung ist, $S\varrho\varphi\varrho$ = const., wie vorher. Vergleiche die Anmerkungen zu den Seiten 698, 708.

Digitized by Google

nebst den beiden neuen Paaren von Gleichungen, als Bedingungen der Homogenität,

$$\text{XVIII.}\ldots g_1\varepsilon_1 + \lambda_1 S\zeta_1\lambda_1 + \mu_1 S\zeta_1\mu_1 = 0,$$
$$\text{XIX.}\ldots g_1\varepsilon_1^2 + (S\zeta_1\lambda_1)^2 + (S\zeta_1\mu_1)^2 + e_2 = 0,$$

und

$$\text{XX.}\ldots g_3\varepsilon_3 - \lambda_3 S\zeta_3\lambda_3 - \mu_3 S\zeta_3\mu_3 = 0,$$
$$\text{XXI.}\ldots g_3\varepsilon_3^2 - (S\zeta_3\lambda_3)^2 - (S\mu_3\zeta_3)^2 + e_3 = 0.$$

361. Wir sahn, in den Nebenartikeln zu 336, dass das Differential, $df\varrho$, einer skalar Function eines Vectors im Allgemeinen in der Form ausgedrückt werden kann,

$$\text{I.}\ldots df\varrho = nS\nu d\varrho,$$

wo ν eine abgeleitete vector Function desselben variabeln Vectors ϱ ist, und n ein skalar Coefficient ist. Und ich beabsichtige jetzt zu zeigen, dass wenn

$$\text{II.}\ldots f\varrho = S\varrho\varphi\varrho,$$

wo $\varphi\varrho$ wieder die lineare und vector Function bezeichnet, welche im vorigen Abschnitt in Betracht gezogen worden ist, und deren selbstconjugirter Theil wieder $\varphi_0\varrho$ ist, wir die Gleichung I. erhalten, mit den Werthen,

$$\text{III.}\ldots n = 2, \qquad \nu = \varphi_0\varrho;$$

so dass der Theil $\varphi_0\varrho$ so aus $\varphi\varrho$ dadurch abgeleitet werden kann, dass man an ihm mit $\frac{1}{2}dS.\varrho$ operirt, und den Coefficienten von $d\varrho$ unter dem Zeichen S. im Resultat sucht: während gewisse allgemeine Beziehungen von Reciprocität [vergl. 336, (6.)] zwischen den beiden Vectoren ϱ und ν bestehn, welche auf diese Weise, als lineare Functionen von einander, im Zusammenhang stehn.

(1.) Wir haben hier, nach der angenommenen linearen Form von $\varphi\varrho$, die differential Gleichung (vergl. 334, VI.),

$$\text{IV.}\ldots d\varphi\varrho = \varphi d\varrho;$$

auch

$$S(d\varrho.\varphi\varrho) = S(\varphi\varrho.d\varrho),$$

und

$$S(\varrho.\varphi d\varrho) = S(\varphi'\varrho.d\varrho);$$

daher haben wir, nach 349, XIII., wie behauptet wurde,

$$\text{V.}\ldots dS\varrho\varphi\varrho = S(\varphi\varrho + \varphi'\varrho)\,d\varrho \\ = 2S.\varphi_0\varrho d\varrho.$$

(2.) Als Beispiel für die Anwendung dieser Formel, bei der Herleitung von $\varphi_0\varrho$ aus $\varphi\varrho$, wollen wir den Ausdruck nehmen,

$$\text{VI.}\ldots \varphi\varrho = \Sigma\beta\, S\alpha\varrho, \qquad 347,\ \text{XXXI.};$$

er ergiebt,

$$\text{VII.}\ldots f\varrho = S\varrho\varphi\varrho = \Sigma S\alpha\varrho\, S\beta\varrho,$$

und daher

$$\text{VIII.}\ldots df\varrho = \Sigma(\beta\, S\alpha\varrho + \alpha S\beta\varrho)\,d\varrho.$$

Vergleicht man das mit der allgemeinen Formel,

$$\text{IX.}\ldots \tfrac{1}{2}df\varrho = S\nu d\varrho = S.\varphi_0\varrho d\varrho,$$

so findet man, dass die Form VI. von $\varphi\varrho$ zu ihrem selbstconjugirten Theil hat,

$$\text{X.}\ldots \nu = \varphi_0\varrho = \tfrac{1}{2}\Sigma(\beta\, S\alpha\varrho + \alpha S\beta\varrho);$$

und in der That sahn wir (347, XXXII.), dass diese Form, für den zu ihr Conjugirten, den Ausdruck ergiebt,

$$\text{XI.}\ldots \varphi'\varrho = \Sigma\alpha\, S\beta\varrho.$$

(3.) Nehmen wir jetzt, der Einfachheit wegen, an, dass die Function φ selbstconjugirt gegeben, oder gemacht sei, dadurch dass wir (wenn nöthig) die halbe Summe derselben und die zu ihr selbst conjugirte Function nehmen, so können wir φ anstatt φ_0 schreiben, und haben somit, einfach,

$$\text{XII.}\ldots \nu = \varphi\varrho,$$
$$\text{XIII.}\ldots f\varrho = S\nu\varrho,$$
$$\text{XIV.}\ldots df\varrho = 2S\nu d\varrho;$$

und daher ist auch (vergl. 348, I. II.),

$$\text{XV.}\ldots \varrho = \varphi^{-1}\nu = m^{-1}\psi\nu,$$

und

$$\text{XVI.}\ldots S\nu d\varrho = S\varrho d\nu.$$

Digitized by Google

(4.) Schreibt man daher,

$$\text{XVII.}\ldots F\nu = S\nu\varphi^{-1}\nu = m^{-1}S\nu\psi\nu,$$

so haben wir die Gleichungen,

$$\text{XVIII.}\ldots F\nu = f\varrho,$$
$$\text{XIX.}\ldots dF\nu = 2S\varrho d\nu = 2S.\varphi^{-1}\nu d\nu;$$

so dass ϱ aus $F\nu$ abgeleitet werden kann, wie ν aus $f\varrho$ abgeleitet wurde; und allgemein besteht, wie vorher festgestellt wurde, eine vollkommne Reciprocität der Beziehungen zwischen den Vectoren ϱ und ν, und auch zwischen ihren skalar Functionen, $f\varrho$ und $F\nu$.

(5.) Was die Herleitung, oder Ableitung, von ν aus $f\varrho$ betrifft, und von ϱ aus $F\nu$, so kann gelegentlich angemessen sein, sie so zu bezeichnen:

$$\text{XX.}\ldots \nu = \tfrac{1}{2}(S.d\varrho)^{-1}df\varrho;$$
$$\text{XXI.}\ldots \varrho = \tfrac{1}{2}(S.d\nu)^{-1}dF\nu;$$

in der That können diese letzteren als nur symbolische Transformationen der Ausdrücke,

$$\text{XXII.}\ldots df\varrho = 2S(d\varrho.\nu),$$
$$dF\nu = 2S(d\nu.\varrho),$$

angesehn werden, welche unmittelbar aus XIV. und XIX. folgen.

(6.) Als ein Beispiel für den Uebergang von einem solchen Ausdruck, wie $f\varrho$, zu einem gleichen Ausdruck von der reciproken Form $F\nu$, wollen wir die cyklische Form 357, II. wieder aufnehmen, und somit schreiben,

$$\text{XXIII.}\ldots f\varrho = S\varrho\varphi\varrho = g\varrho^2 + S\lambda\varrho\mu\varrho,$$

und annehmen, dass g, λ und μ reell sind. Hier haben wir, nach dem, was schon in den Nebenartikeln zu 354 und 357 gezeigt worden ist, wenn $\varphi\varrho$ als selbstconjugirt angenommen wird, wie in (3.),

$$\text{XXIV.}\ldots \nu = \varphi\varrho = g\varrho + V\lambda\varrho\mu;$$
$$\text{XXV.}\ldots m = (g - S\lambda\mu)(g^2 - \lambda^2\mu^2) = -c_1c_2c_3;$$
$$\text{XXVI.}\ldots \psi\nu = V\lambda\nu\mu\,S\lambda\mu - V\lambda\mu\,S\lambda\nu\mu - g(\lambda\,S\mu\nu + \mu\,S\lambda\nu) + g^2\nu;$$

und daher

$$\text{XXVII.}\ldots\ mFv = Sv\psi v$$
$$= S\lambda v\mu v\, S\lambda\mu + (S\lambda v\mu)^2 - 2g\, S\lambda v\, S\mu v + g^2v^2$$
$$= (g^2 - \lambda^2\mu^2)\, v^2 + \lambda^2 (S\mu v)^2 + \mu^2 (S\lambda v)^2 - 2g\, S\lambda v\, S\mu v;$$

wenn man die letzte Form mit 360, VI. vergleicht, so sieht man, dass sie zu denen gehört, welche wir bifocale Formen genannt haben: ihre focal Linien α, α' [360, (1.)] haben hier die Richtungen von λ, μ, das heisst, diejenigen der — wie wir sagen können — cyklischen Linien* der Form XXIII. Die cyklischen und bifocalen Transformationen sind daher zu einander reciprok.

(7.) Um ein andres Beispiel für diese reciproke Beziehung zwischen cyklischen und focal Linien zu nehmen, beim Uebergange von $f\varrho$ zu Fv, oder umgekehrt vom letzteren zum ersteren, wollen wir jetzt mit der focal Form,

$$\text{XXVIII.}\ldots f\varrho = S\varrho\varphi\varrho$$
$$= (V\alpha\varrho)^2 + (S\beta\varrho)^2,$$

359, XXX., beginnen, in welcher α und β als gegebne und reelle Vectoren angenommen werden. Wir haben jetzt, nach 359, (11.),

$$\text{XXIX.}\ldots \begin{cases} v = \varphi\varrho = -\alpha V\alpha\varrho + \beta S\beta\varrho, \\ m = \alpha^2 (S\alpha\beta)^2, \\ \psi v = V\alpha v\beta\, S\alpha\beta + \alpha(\alpha^2 - \beta^2)\, S\alpha v, \end{cases}$$

und daher

$$\text{XXX.}\ldots mFv = \alpha^2 (S\alpha\beta)^2 Fv = Sv\psi v$$
$$= S\alpha v\beta v\, S\alpha\beta + (\alpha^2 - \beta^2)(S\alpha v)^2$$
$$= -v^2 (S\alpha\beta)^2 + S\alpha v\,[(\alpha^2 - \beta^2)\, S\alpha v + 2\, S\alpha\beta\, S\beta v]$$
$$= -v^2 (S\alpha\beta)^2 + S\alpha v\, S(\alpha^3 + \beta\alpha\beta)v,$$

ein Ausdruck, welcher von cyklischer Form ist; eine cyklische Linie von Fv ist die gegebene focal Linie α von $f\varrho$; und die

---

* Sie sind in der That (vergleiche die Anmerkung zu Seite 698) die cyklischen Normalen, oder die Normalen zu den cyklischen Ebnen, derjenigen Oberfläche zweiter Ordnung, deren Gleichung $f\varrho$ = const. ist; während sie, wie vorher, die focal Linien jener anderen oder reciproken Fläche sind, deren variabler Vector v ist, und deren Gleichung Fv = const. ist.

Digitized by Google

andere cyklische Linie von Fv hat die Richtung von $\pm(\alpha^3 + \beta\alpha\beta)$, und folglich (nach 359, LXV.) von $\mp\alpha'$, wo α' die zweite reelle und focal Linie von $f\varrho$ ist.

(8.) Und um die Gleichung XVIII. zu verificiren, oder um durch ein Beispiel zu zeigen, dass die beiden Functionen $f\varrho$ und Fv dem Werthe nach gleich sind, obwohl sie (im Allgemeinen) an Form verschieden sind, so ist hinreichend, in XXX. den Werth XXIX. von ν einzusetzen; der, nach wenigen Reductionen, die behauptete Gleichheit aufweisen wird.

362. Es ist oft von Nutzen, eine gewisse skalar und symmetrische Function zweier unabhängigen Vectoren, ϱ und ϱ', einzuführen, welche linear in Bezug auf jede von ihnen ist, und aus der linearen und selbstconjugirten vector Function $\varphi\varrho$, eines einzelnen Vectors ϱ, abgeleitet wird, wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{I.}\ldots f(\varrho,\varrho') &= f(\varrho',\varrho) \\ &= S\varrho'\varphi\varrho \\ &= S\varrho\varphi\varrho'. \end{aligned}$$

Nach dieser Bezeichnung haben wir,

$$\begin{aligned} &\text{II.}\ldots f(\varrho+\varrho') = f\varrho + 2f(\varrho,\varrho') + f\varrho'; \\ &\text{III.}\ldots f(\varrho,\varrho'+\varrho'') = f(\varrho,\varrho') + f(\varrho,\varrho''); \\ &\text{IV.}\ldots f(\varrho,\varrho) = f\varrho; \\ &\text{V.}\ldots df\varrho = 2f(\varrho,d\varrho); \\ &\text{VI.}\ldots f(x\varrho, y\varrho) = xyf(\varrho,\varrho'), \end{aligned}$$

wenn

$$Vx = Vy = 0;$$

und als Verificirung haben wir,

$$\text{VII.}\ldots f(x\varrho) = x^2 f\varrho,$$

ein Resultat, welches man hätte erhalten können, ohne die neue Function I. einzuführen.

(1.) Es scheint nicht nöthig, auf dieser Stufe, Beweise für die vorhergehenden Folgerungen, II. bis VI., aus der Definition I. niederzuschreiben; aber es kann der Beachtung werth gefunden werden, dass wir hier ein wenig, in der Formel V., von einer Bezeichnungsweise (325) abweichen, welche in einigen früheren Artikeln des gegenwärtigen Kapitels, wenn auch ein-

gestandenermassen nur als eine augenblickliche, gebraucht, und rein der Bequemlichkeit wegen für die Erläuterung der Grundsätze der quaternion Differentiale gebraucht wurde.

(2.) In jener vorläufigen Bezeichnungsweise (vergl. 325, IX.) würden wir, für die Differentiation der letzten Function $f\varrho$ (361, II.), die Formeln gehabt haben,

$$df\varrho = f(\varrho, d\varrho),$$
$$f(\varrho, \varrho') = 2\,S\varrho'\varphi\varrho;$$

der numerische Coefficient wird somit von einer von ihnen auf die andere übertragen, im Vergleich mit den vorigen Gleichungen, I. und V. Dagegen haben wir jetzt einen Vortheil, wenn wir die letzteren Gleichungen V. und I., nämlich,

$$df\varrho = 2f(\varrho, d\varrho),$$
$$f(\varrho, \varrho') = S\varrho'\varphi\varrho,$$

annehmen, denn die Function $S\varrho'\varphi\varrho$, oder $S\varrho\varphi\varrho'$, tritt häufig in den Anwendungen der Quaternionen auf Oberflächen zweiter Ordnung auf, und nicht immer mit dem Coefficienten 2.

(3.) Behält man daher die vorigen Bezeichnungen bei, und behandelt $d\varrho$ als constant, oder $d^2\varrho$ als null, so ergiebt eine mehrfache Differentiation von $f\varrho$, nach IV. und V., die Formeln,

$$\text{VIII.}\ldots d^2f\varrho = 2f(d\varrho);$$
$$d^3f\varrho = 0;$$

u. s. w.; so dass der Satz 342, I. hier verificirt wird, unter der Form,

$$\text{IX.}\ldots \varepsilon^d f\varrho = (1 + d + \tfrac{1}{2}d^2)f\varrho$$
$$= f\varrho + 2f(\varrho, d\varrho) + fd\varrho;$$

oder kurz,

$$\text{X.}\ldots \varepsilon^d f\varrho = f(\varrho + d\varrho),$$

eine Gleichung, welche nach II. in aller Strenge gültig [vergl. 339, (4.)] ist, ohne dass irgend welche Annahme zu machen wäre, in Betreff irgend welcher Kleinheit des Tensors, $Td\varrho$.

363. Lineare und vector Functionen von Vectoren, wie es diejenigen sind, welche wir in dem gegenwärtigen Abschnitt

Digitized by

betrachtet haben, stellen sich allgemein von selbst bei der Differentiation von nicht-linearen, aber von vector Functionen von Vectoren ein, wenn sie auch nicht allgemein der Bedingung genügen, selbstconjugirt zu sein. In der That, wenn wir für den Augenblick eine solche nicht-lineare Function durch $\omega\,(\varrho)$ bezeichnen, oder einfach durch $\omega\varrho$, so gestattet uns die allgemeine distributive Eigenschaft (326) der differential Ausdrücke, zu schreiben,

$$\text{I.}\ldots d\omega\,(\varrho) = \varphi\,(d\varrho),$$

oder kurz,

$$\text{I}'.\ldots d\omega\varrho = \varphi d\varrho;$$

hier hat φ alle die Eigenschaften, welche bisher angewandt wurden, einschliesslich derjenigen, dass sie nicht allgemein selbstconjugirt ist, wie eben bemerkt worden ist. Es giebt indessen, wie wir bald sehn werden, einen ausgedehnten und wichtigen Fall, in welchem die Eigenschaft, selbstconjugirt zu sein, für eine solche Function φ besteht; nämlich wenn die differenzirte Function, $\omega\varrho$, selbst das Ergebniss ν der Differentiation einer skalar Function $f\varrho$ des variabeln Vectors ϱ ist, wenn auch nicht nothwendig eine Function von der zweiten Dimension, so wie es die kürzlich betrachtete (361) gewesen ist; oder vollständiger, wenn sie der Coefficient von $d\varrho$, unter dem Zeichen $S.$, ist im Differential (361, I.) der skalar Function $f\varrho$, mag sie mit irgend einer skalar Constanten (wie es zum Beispiel n in der Formel ist, auf welche wir zuletzt Bezug nahmen) multiplicirt werden, oder nicht. Und allgemein (vergl. 346) entspricht die Umkehrung der linearen und vector Function φ in I. der Differentiation der umgekehrten (oder impliciten) Function ω^{-1}; und zwar in einer solchen Weise, dass die Gleichung I. oder I′. unter der weiteren Form geschrieben werden kann,

$$\text{II.}\ldots d\omega^{-1}\sigma = \varphi^{-1}d\sigma = m^{-1}\psi d\sigma,$$

wenn

$$\sigma = \omega\varrho.$$

(1.) Als ein sehr einfaches Beispiel einer nicht-linearen aber vector Function wollen wir die Form nehmen,

$$\text{III.}\ldots \sigma = \omega(\varrho) = \varrho\alpha\varrho,$$

in der α ein constanter Vector ist. Das ergiebt, wenn

$$\begin{aligned} d\varrho &= \varrho', \\ \text{IV.}\ldots \varphi\varrho' &= \varphi d\varrho = d\omega\varrho \\ &= \varrho'\alpha\varrho + \varrho\alpha\varrho' \\ &= 2V\varrho\alpha\varrho'; \\ \text{V.}\ldots S\lambda\varphi\varrho' &= 2S\lambda\varrho\alpha\varrho' = S\varrho'\varphi'\lambda; \\ \text{VI.}\ldots \varphi'\lambda &= 2V\lambda\varrho\alpha = 2V\alpha\varrho\lambda, \\ \varphi'\varrho' &= 2V\alpha\varrho\varrho'; \end{aligned}$$

so dass $\varphi\varrho'$ und $\varphi'\varrho'$ ungleich sind, und die lineare Function $\varphi\varrho'$ nicht selbstconjugirt ist.

(2.) Um ihren selbstconjugirten Theil $\varphi_0\varrho'$ zu finden, nach der Methode des Art. 361, haben wir nur den skalar Ausdruck zu bilden,

$$\text{VII.}\ldots \tfrac{1}{2}f\varrho' = \tfrac{1}{2}S\varrho'\varphi\varrho' = \varrho'^2 S\alpha\varrho;$$

nimmt man das Differential desselben, in Bezug auf ϱ', so wird

$$\begin{aligned} \text{VIII.}\ldots \tfrac{1}{2}df\varrho' &= S.\varphi_0\varrho' d\varrho' \\ &= 2S\alpha\varrho S\varrho' d\varrho', \end{aligned}$$

und das ergiebt somit,

$$\text{IX.}\ldots \varphi_0\varrho' = 2\varrho' S\alpha\varrho;$$

und demnach ist es gleich der halben Summe der beiden Ausdrücke, IV. und VI., für $\varphi\varrho'$ und seinen Conjugirten.

(3.) Anderseits, als ein Beispiel für die Selbstconjugation der linearen und vector Function,

$$\text{X.}\ldots d\boldsymbol{v} = d\omega\varrho = \varphi d\varrho,$$

wenn

$$\text{X'.}\ldots df\varrho = 2S\boldsymbol{v}d\varrho = 2S.\omega\varrho d\varrho,$$

selbst wenn die skalar Function $f\varrho$ von einer höheren Dimension ist, als der zweiten, möge diese letztere Function die Form haben,

$$\text{XI.}\ldots f\varrho = Sq\varrho q'\varrho q''\varrho,$$

wenn q, q', q'' drei constante Quaternionen sind. Hier ist

$$\text{XII.}\ldots \boldsymbol{v} = \omega\varrho = \tfrac{1}{2}V(q\varrho q'\varrho q'' + q'\varrho q''\varrho q + q''\varrho q\varrho q');$$

Digitized by Google

$$\text{XIII.}\ldots d\nu = \varphi d\varrho = \varphi\varrho'$$
$$= \tfrac{1}{2}V(q\varrho'q'\varrho q'' + q'\varrho q''\varrho' q) + \tfrac{1}{2}V(q'\varrho'q''\varrho q + q''\varrho q\varrho' q')$$
$$+ \tfrac{1}{2}V(q''\varrho' q\varrho q' + q\varrho q'\varrho' q'');$$

und

$$\text{XIV.}\ldots S\lambda\varphi\varrho' = \tfrac{1}{2}S.q'\varrho q''(\lambda q\varrho' + \varrho' q\lambda) + \text{u. s. w.}$$
$$= S\varrho'\varphi\lambda;$$

so dass

$$\varphi' = \varphi,$$

wie behauptet wurde.

(4.) Wenn δ als ein zweites und unabhängiges Differentiationszeichen benutzt wird, so können wir im Allgemeinen schreiben (vergl. 345, IV.),

$$\text{XV.}\ldots \delta df q = d\delta f q,$$

wo fq irgend eine Function eines Quaternions bezeichnen kann; in der That ist jedes Glied, nach den Sätzen des gegenwärtigen Kapitels (vergl. 344, I., und 345, IX.), ein Ausdruck für den Grenzwerth*,

$$\text{XVI.}\ldots \lim_{\substack{n=\infty \\ n'=\infty}} nn'\{f(q + n^{-1}dq + n'^{-1}\delta q) - f(q + n^{-1}dq)$$
$$- f(q + n'^{-1}\delta q) + fq\}.$$

(5.) Um denselben Satz anders auszusprechen, können wir bemerken, dass eine erste Differentiation von fq, in Bezug auf jedes Zeichen besonders genommen, Resultate von den Formen ergiebt,

$$\text{XVII.}\ldots df q = f(q, dq),$$
$$\delta f q = f(q, \delta q);$$

und dann können wir behaupten, dass wir gleiche Resultate erhalten, wenn wir das erste von ihnen nach δ differenziren, und das zweite nach d, und jedesmal nur an q operiren, und nicht an dq noch an δq, von den folgenden, weiteren Formen,

$$\text{XVIII.}\ldots \delta df q = f(q, dq, \delta q) = f(q, \delta q, dq) = d\delta f q.$$

---

* Wir können auch sagen, dass jedes der beiden Symbole XV. den Coefficienten von x^1y^1, in der Entwicklung von $f(q + xdq + y\delta q)$ nach aufsteigenden Potenzen von x und y, darstellt, wenn eine solche Entwicklung möglich ist.

Zum Beispiel, wenn

$$\text{XIX.}\ldots fq = qcq,$$

wo c ein constanter Quaternion ist, so ist der gemeinsame Werth der beiden letzten Ausdrücke,

$$\text{XX.}\ldots \delta df q = d\delta f q = \delta q . c . dq + dq . c . \delta q.$$

(6.) Schreibt man daher, nach X.,

$$\text{XXI.}\ldots df\varrho = 2S\omega\varrho d\varrho,$$
$$\delta f\varrho = 2S\omega\varrho\delta\varrho,$$

und

$$\text{XXII.}\ldots \delta\omega\varrho = \varphi\delta\varrho,$$

und auch

$$d\omega\varrho = \varphi d\varrho,$$

wie vorher, so erhält man die allgemeine Gleichung,

$$\text{XXIII.}\ldots S(d\varrho . \varphi\delta\varrho) = S(\delta\varrho . \varphi d\varrho),$$

in welcher $d\varrho$ und $\delta\varrho$ irgend zwei Vectoren darstellen können; die lineare und vector Function, φ, welche somit von einer skalar Function $f\varrho$ durch Differentiation abgeleitet wird, ist daher (wie vorher behauptet und durch Beispiele erläutert wurde) stets selbstconjugirt.

(7.) Die Gleichung XXIII. kann somit kurz geschrieben werden,

$$\text{XXIV.}\ldots Sd\varrho\delta\nu = S\delta\varrho d\nu;$$

und wir werden finden, dass sie mit dem folgenden System der drei, bei der Berechnung der partiellen differential Coefficienten bekannten, Gleichungen gleichbedeutend ist,

$$\text{XXV.}\ldots D_x D_y = D_y D_x,$$
$$D_y D_z = D_z D_y,$$
$$D_z D_x = D_x D_z.$$

364. Im Anfang dieses Abschnitts haben wir, in 347, die Aufgabe, eine lineare (oder distributive) quaternion Function eines Quaternions umzukehren, auf die entsprechende Aufgabe für Vectoren zurückgeführt; und haben sie in dieser reducirten, oder vereinfachten, Form gelöst. Doch es kann von Interesse sein, und wird jetzt leicht sein, die lineare und quaternion Gleichung,

Digitized by Google

$$\text{I.}\ldots fq = r,$$

und ferner

$$\text{II.}\ldots f(q+q') = fq + fq',$$

wieder aufzunehmen, und einen quaternion Ausdruck für die Auflösung dieser Gleichung anzugeben, oder für die umgekehrte (oder inverse) quaternion Function,

$$\text{III.}\ldots q = f^{-1}r,$$

mit Hülfe von Bezeichnungsarten, welche schon angewandt wurden, und von Resultaten, welche schon festgestellt worden sind.

(1.) Die Conjugirte der linearen und quaternion Function fq wird durch die Gleichung definirt (vergl. 347, IV.),

$$\text{IV.}\ldots Spfq = Sqf'p,$$

in welcher p und q beliebige Quaternionen sind, und wenn wir sie auf die Form bringen (vergl. 347, XXXI.),

$$\text{V.}\ldots fq = tqs + t'qs' + \ldots = \Sigma tqs,$$

in welcher s, s', . . . und t, t', . . . beliebige, aber constante Quaternionen sind, und welche mehr als hinreichend allgemein sind, so erhalten wir (vergl. 347, XXXII.) die conjugirte Form,

$$\text{VI.}\ldots f'p = spt + s'pt' + \ldots = \Sigma spt;$$

und danach ist

$$\text{VII.}\ldots f1 = \Sigma ts,$$

und

$$\text{VIII.}\ldots f'1 = \Sigma st;$$

es ist daher möglich, für jede gegebne besondere Form der linearen Function fq, eine skalar Constante e, und zwei vector Constanten, ε, ε', anzugeben, von der Art, dass

$$\text{IX.}\ldots f1 = e + \varepsilon,$$
$$f'1 = e + \varepsilon';$$

und dann haben wir die allgemeinen Umformungen (vergl. 347, I.):

$$\text{X.}\ldots Sfq = S.qf'1 = eSq + S\varepsilon'q;$$
$$\text{XI.}\ldots Vfq = \varepsilon Sq + V.fVq = \varepsilon Sq + \varphi Vq;$$

und

$$\text{XII.}\ldots fq = (e + \varepsilon)\, Sq + S\varepsilon' q + \varphi Vq;$$

in welchen $S\varepsilon' q = S.\varepsilon' Vq$, und φVq oder $Vf Vq$ eine lineare und vector Function von Vq ist, von der in diesem Abschnitt schon betrachteten Art; sie sind auch, wenn fq die Form V. hat, von der Beschaffenheit, dass wir haben,

$$\text{XIII.}\ldots \varphi\varrho = \Sigma Vt\varrho s.$$

(2.) Was die Anzahl der unabhängigen und skalar Constanten betrifft, welche, wenigstens implicite, bei der Zusammensetzung der quaternion Function fq vorkommen, so kann man auf verschiednen Wegen zeigen, dass es sechszehn sind; und dem entsprechend ist, in dem Ausdruck XII., der Skalar e die eine Constante; die beiden Vectoren, ε und ε', zählen jeder als drei Constanten; und die lineare und vector Function, φVq, zählt für neun [vergl. 347, (1.)].

(3.) Da wir schon wissen (347, u. s. w.), wie eine Function von der letzten Art φ umzukehren ist, können wir im Allgemeinen schreiben,

$$\text{XIV.}\ldots r = Sr + Vr = Sr + \varphi\varrho,$$

wo

$$\text{XV.}\ldots \varrho = \varphi^{-1} Vr = m^{-1}\psi Vr;$$

die skalar Constante, m, und die lineare und vector Hülfs-Function, ψ, wird von der Function φ durch Methoden abgeleitet, welche schon erläutert worden sind. Es wird dann gefordert, es solle q, oder Sq und Vq, in Gliedern von r, oder von Sr und ϱ, ausgedrückt werden, so dass es der linearen Gleichung genügt,

$$\text{XVI.}\ldots (e + \varepsilon)\, Sq + S\varepsilon' q + \varphi Vq = Sr + \varphi\varrho;$$

wenn die Constanten e, ε, ε', und die Form von φ gegeben sind.

(4.) Nehmen wir zu diesem Zweck den Ausdruck an,

$$\text{XVII.}\ldots q = q' + \varrho,$$

in welchem q' ein neuer gesuchter Quaternion ist, so haben wir die neue Gleichung,

Digitized by Google

$$\text{XVIII.}\ldots f q' = Sr + \varphi\varrho - f\varrho = S(r - \varepsilon'\varrho);$$

und danach ist

$$\text{XIX.}\ldots q' = S(r - \varepsilon'\varrho).f^{-1}1,$$

und

$$\text{XX.}\ldots q = \varrho + S(r - \varepsilon'\varrho).f^{-1}1;$$

wo ϱ, der Annahme nach, ein bekannter Vector ist, und $S(r - \varepsilon'\varrho)$ ein bekannter Skalar; so dass nur der unbekannte, aber constante Quaternion, $f^{-1}1$, zu bestimmen bleibt, oder nur noch erübrigt, die besondere Gleichung,

$$\text{XXI.}\ldots f q_0 = 1$$

aufzulösen, in welcher

$$\text{XXII.}\ldots q_0 = c + \gamma = f^{-1}1$$

ist, wo c eine neue und gesuchte skalar Constante ist, und γ eine neue und gesuchte vector Constante.

(5.) Nimmt man skalar und vector Theile, so zerfällt die quaternion Gleichung XXI. in die beiden folgenden (vergl. X. und XI.):

$$\text{XXIII.}\ldots 1 = Sf(c + \gamma) = ec + S\varepsilon'\gamma;$$
$$\text{XXIV.}\ldots 0 = Vf(c + \gamma) = \varepsilon c + \varphi\gamma;$$

sie ergiebt die gesuchten Werthe von c und γ, nämlich,

$$\text{XXV.}\ldots c = (e - S\varepsilon'\varphi^{-1}\varepsilon)^{-1},$$

und

$$\text{XXVI.}\ldots \gamma = -c\varphi^{-1}\varepsilon;$$

und danach ist

$$\text{XXVII.}\ldots f^{-1}1 = \frac{1 - \varphi^{-1}\varepsilon}{e - S\varepsilon'\varphi^{-1}\varepsilon};$$

und demgemäss haben wir, nach XII., die Gleichung,

$$\text{XXVIII.}\ldots f(1 - \varphi^{-1}\varepsilon) = e - S\varepsilon'\varphi^{-1}\varepsilon = V^{-1}0.$$

(6.) Die Aufgabe, eine quaternion Gleichung aufzulösen ist daher von Neuem auf diejenige reducirt, eine vector Gleichung aufzulösen, und sie wird durch sie gelöst; aber wir können jetzt einige Schritte weiter vorgehn, um umgekehrte Operationen,

Digitized by Google

zu eliminiren, und um sie durch directe Operationen zu ersetzen. Wenn wir so beachten, dass

$$\varphi^{-1} = m^{-1}\psi,$$

wie vorher, und zur Abkürzung schreiben,

$$\text{XXIX.} \ldots n = me - S\varepsilon'\psi\varepsilon = f(m - \psi\varepsilon),$$

so dass n eine neue und bekannte skalar Constante ist, so haben wir, nach XV., XX., XXVII., XXIX.,

$$\text{XXX.} \ldots m\varrho = \psi Vr;$$
$$\text{XXXI.} \ldots nf^{-1}1 = m - \psi\varepsilon;$$

und

$$\text{XXXII.} \ldots mnq = n\psi Vr + (mSr - S\varepsilon'\psi Vr).(m - \psi\varepsilon),$$

einen Ausdruck, aus dem alle inversen Operationen verschwunden sind, der sich aber noch, durch eine Division mit m, vereinfachen lässt, wie folgt.

(7.) Setzt man, nach XXIX., in dem Glied $n\psi Vr$ in XXXII. den Werth $me - S\varepsilon'\psi\varepsilon$ für n ein, und vertauscht, nach XXX., ψVr mit $m\varrho$, in den Gliedern, welche nicht ersichtlich durch m theilbar sind, so ergiebt eine solche Division,

$$\text{XXXIII.} \ldots nq = (m - \psi\varepsilon)Sr + e\psi Vr - S\varepsilon'\psi Vr + \sigma,$$

wo

$$\text{XXXIV.} \ldots \sigma = -\varrho S\varepsilon'\psi\varepsilon + \psi\varepsilon S\varepsilon'\varrho$$
$$= V.\varepsilon' V\varrho\psi\varepsilon.$$

Aber, nach 348, VII., und wenn man die Accente vertauscht, haben wir die Transformation,

$$\text{XXXV.} \ldots V\varrho\psi\varepsilon = -\varphi' V\varepsilon\varphi\varrho$$
$$= -\varphi' V\varepsilon Vr,$$

denn

$$\varphi\varrho = Vr,$$

nach XIV. oder XV.; all und jedes Inverse verschwindet daher wiederum, bei dieser neuen Elimination des Hülfsvectors ϱ, und wir haben den Endausdruck,

$$\text{XXXVI.} \ldots nq = nf^{-1}r$$
$$= (me - S\varepsilon'\psi\varepsilon).f^{-1}r$$
$$= (m - \psi\varepsilon)Sr + e\psi Vr - S\varepsilon'\psi Vr$$
$$- V\varepsilon'\varphi' V\varepsilon Vr,$$

Digitized by Google

in welchem sich jedes Operationszeichen über alles hinerstreckt, was ihm folgt, wenn nicht ein Punkt das Gegentheil anzeigt; und es scheint unmöglich, sie weiter zu reduciren, wie die Formel für die Auflösung der linearen Gleichung I., wenn die quaternion Function, fq, die Form XII. hat.

(8.) Da die Analysis des Problems von dieser Beschaffenheit ist, so kann die Synthesis, durch welche ein Beweis à posteriori von der Richtigkeit der resultirenden Formel gegeben wird, dadurch vereinfacht werden, dass man den skalar Werth XXIX. für $f(m - \psi\varepsilon)$ gebraucht; und es ist hinreichend, zu zeigen (indem man Vr durch ω bezeichnet), dass für jeden Vector ω die folgende Gleichung statt hat, wenn f wieder die Form XII. hat:

$$\text{XXXVII.}\ldots f(e\psi\omega - S\varepsilon'\psi\omega) - fV\varepsilon'\varphi' V\varepsilon\omega = me - S\varepsilon'\psi\varepsilon).\,\omega.$$

(9.) Demnach ergiebt diese Form von f, mit Hülfe des in XXXV. angewandten Princips,

$$\text{XXXVIII.}\ldots \begin{cases} ef\psi\omega = e(S\varepsilon'\psi\omega + m\omega), \\ -fS\varepsilon'\psi\omega = -(e+\varepsilon)S\varepsilon'\psi\omega, \\ -fV\varepsilon'\varphi' V\varepsilon\omega = -\varphi V\varepsilon'\varphi' V\varepsilon\omega \\ \qquad\qquad = V(V\varepsilon\omega\,.\,\psi'\varepsilon') \\ \qquad\qquad = \varepsilon S\varepsilon'\psi\omega - \omega S\varepsilon'\psi\varepsilon, \end{cases}$$

denn es ist $S\omega\psi'\varepsilon' = S\varepsilon'\psi\omega$, u. s. w.; und somit wird die Gleichung XXXVI. dadurch bewiesen, dass man wirklich mit f operirt.

(10.) Wenn wir, zum Beispiel, die besondere Form nehmen,

$$\text{XXXIX.}\ldots r = fq = pq + qp$$

in welcher

$$\text{XL.}\ldots p = a + \alpha = \text{einem gegebnen Quaternion ist,}$$

so haben wir dann,

$$\text{XLI.}\ldots f1 = f'1 = 2p,\quad e = 2a,\quad \varepsilon = \varepsilon' = 2\alpha,\quad \varphi\varrho = 2\alpha\varrho;$$

Digitized by Google

und daher ist nach der Theorie der linearen und vector Functionen,

$$\text{XLII.}\ldots \quad \varphi'\varrho = 2\alpha\varrho,$$
$$\psi\varrho = 4\alpha^2\varrho,$$
$$m = 8a^3,$$

und daher,

$$\text{XLIII.}\ldots \quad \psi\varepsilon = 8a^2\alpha,$$
$$m - \psi\varepsilon = 8a^2(a - \alpha),$$
$$n = 16a^2(a^2 - \alpha^2);$$

so dass die Formel XXXVI. wird, wenn man mit $8a$ dividirt,

$$\text{XLIV.}\ldots \quad 2a(a^2 - \alpha^2)q = a(a - \alpha)Sr + a^2Vr - aS.\alpha Vr - \alpha V.\alpha Vr,$$

oder

$$\text{XLV.}\ldots \quad 2a(a + \alpha)q = aSr + (a + \alpha)Vr - S\alpha r,$$

oder

$$\text{XLVI.}\ldots \quad 2pqSp = S.rKp + pVr = rSp + V(Vp.Vr),$$

oder

$$\text{XLVII.}\ldots \quad 4pqSp = 2rSp + (pr - rp) = pr + rKp;$$

oder endlich,

$$\text{XLVIII.}\ldots \quad q = f^{-1}r = \frac{r + p^{-1}rKp}{4Sp} = \frac{r + Kp.rp^{-1}}{4Sp}.$$

Demnach ist

$$\text{XLIX.}\ldots \quad (pr + rKp) + (rp + Kp.r) = 2r(p + Kp) = 4rSp.$$

(11.) Bei einem so einfachen Beispiel, wie es das letzte ist, können wir mit Vortheil specielle Methoden benutzen; zum Beispiel (vergl. 346), wir können diejenige gebrauchen, welche in 332, (6.) angewandt wurde, um die Quadratwurzel eines Quaternions zu differenziren, und welche dort rascher zu einer Formel (332, XIX.) führte, die mit der vorigen Formel XLVIII. übereinstimmt.

(12.) Wir hätten auch, in demselben Falle XXXIX., beachten können, dass

Digitized by Google

$$\begin{aligned} \text{L.}\ldots pr - rp &= p^2q - qp^2 \\ &= 2\,V[V(p^2).\,Vq] \\ &= 4\,Sp.\,V(Vp.\,Vq) \\ &= 2\,Sp.(pq - qp); \end{aligned}$$

und danach kann $pq - qp$, und daher pq und qp sofort, mit demselben resultirenden Werth für q, oder für $f^{-1}r$, abgeleitet werden, wie vorher: und es ist allgemein möglich, die n-te Wurzel eines Quaternions, in einem ähnlichen Sinne, zu differenziren.

365. Wir wollen diesen Abschnitt über lineare Functionen, von der vorher betrachteten Art, damit schliessen, zu beweisen, dass eine symbolische und biquadratische Gleichung von der Form,

$$\text{I.}\ldots 0 = n - n'f + n''f^2 - n'''f^3 + f^4,$$

allgemein besteht, welche durch das Zeichen (f) für eine lineare und quaternion Operation an einem Quaternion so befriedigt wird, wie die symbolische und cubische Gleichung,

$$\text{I}'\ldots 0 = m - m'\varphi + m''\varphi^2 - \varphi^3,$$

350, L, durch das Zeichen (φ) für eine lineare und vector Operation an einem Vector befriedigt wurde; die vier Coefficienten, n, n', n'', n''', sind vier skalar Constanten, welche von der Function f in dieser erweiterten oder quaternion Theorie abgeleitet werden, wie die drei skalar Coefficienten m, m', m'', welche Constanten waren, in der vorigen oder vector Theorie von φ abgeleitet wurden. Und zu gleicher Zeit werden wir sehn, dass ein System dreier Hülfsfunctionen, F, G, H, von der linearen und quaternion Art, besteht, welches den beiden vector Functionen, ψ und χ, entspricht, die so nützlich in der vorhergehenden Theorie der Vectoren gewesen sind, und wie sie mit einander in Verbindung stehn, und mit der gegebnen quaternion Function f, durch mehrere einfache und nützliche Beziehungen.

(1.) Da die Auflösungsformel, 364, XXXVI., für die lineare und quaternion Gleichung $fq = r$, in folgender Weise kurz bezeichnet werden kann,

$$\text{II.}\ldots nq = nf^{-1}r = Fr,$$

so dass (vergl. 348, III′.) wir, kurz und symbolisch, schreiben können,

$$\text{III.}\ldots fF = Ff = n,$$

so kann man sich zunächst vornehmen, die Veränderungen zu prüfen, welche der Skalar n und die Function Fr erleiden, wenn fr mit $fr + cr$ vertauscht wird, oder f mit $f + c$, wo c irgend eine skalar Constante ist; das heisst, nach 364, XII., wenn e mit $e + c$ vertauscht wird, und φ mit $\varphi + c$; φ', ψ, und m werden zu gleicher Zeit, den Gesetzen der früheren Theorie gemäss, vertauscht.

(2.) Schreibt man daher,

$$\begin{aligned} \text{IV.}\ldots f_c &= f + c, \\ e_c &= e + c, \\ \varphi_c &= \varphi + c, \\ \varphi'_c &= \varphi' + c, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{V.}\ldots \psi_c &= \psi + c\chi + c^2, \\ m_c &= m + m'c + m''c^2 + c^3, \end{aligned}$$

so können wir die neue Form der Gleichung 364, XXXVI. darstellen, wie folgt:

$$\text{VI.}\ldots n_c f_c^{-1} r = F_c r,$$

oder

$$\text{VII.}\ldots f_c F_c = n_c;$$

wo

$$\begin{aligned} \text{VIII.}\ldots F_c r = (m_c - \psi_c \varepsilon)\, Sr + e_c \psi_c\, Vr \\ - S\varepsilon' \psi_c\, Vr - V\varepsilon' \varphi'_c\, V\varepsilon Vr, \end{aligned}$$

und

$$\text{IX.}\ldots n_c = e_c m_c - S\varepsilon' \psi_c \varepsilon.$$

(3.) Auf diese Weise sieht man, dass man schreiben kann,

$$\text{X.}\ldots F_c = F + cG + c^2 H + c^3,$$

und

$$\text{XI.}\ldots n_c = n + n'c + n''c^2 + n'''c^3 + c^4;$$

wo F, G, H drei functionale Symbole sind, von der Art, dass

$$\text{XII.}\ldots \begin{cases} Fr = (m - \psi\varepsilon)\, Sr + e\psi\, Vr - S\varepsilon'\psi Vr - V\varepsilon'\varphi'\, V\varepsilon Vr; \\ Gr = (m' - \chi\varepsilon)\, Sr + (e\chi + \psi)\, Vr - S\varepsilon'\chi Vr - V\varepsilon' V\varepsilon Vr; \\ Hr = (m'' - \varepsilon)\, Sr + (e + \chi)\, Vr - S\varepsilon' r; \end{cases}$$

und n, n', n'', n''' sind vier skalar Constanten; es ist nämlich,

$$\text{XIII.}\ldots\begin{cases} n = em - S\varepsilon'\psi\varepsilon \quad \text{(wie in 364, XXIX.)}, \\ n' = m + em' - S\varepsilon'\chi\varepsilon, \\ n'' = m' + em'' - S\varepsilon'\varepsilon, \\ n''' = m'' + e. \end{cases}$$

(4.) Entwickelt man daher die symbolische Gleichung VII., mit Hülfe von X. und XI., und vergleicht Potenzen von c, so erhalten wir die neuen symbolischen Gleichungen (vergl. 350, XVI., XXI., XXIII.):

$$\text{XIV.}\ldots\begin{cases} H = n''' - f, \\ G = n'' - fH = n'' - n'''f + f^2, \\ F = n' - fG = n' - n''f + n'''f^2 - f^3, \end{cases}$$

und endlich ist

$$\text{XV.}\ldots n = Ff = n'f - n''f^2 + n'''f^3 - f^4;$$

und das ist nur eine andere Weise, die symbolische und biquadratische Gleichung I. hinzuschreiben.

(5.) Zwischen diesen verschiedenen Operationszeichen bestehn noch andere functionale Beziehungen, bei deren Entwicklung wir hier nicht verweilen können: aber wir können bemerken, dass sie, wie in der Theorie der linearen und vector Functionen, gewöhnlich ein Gemisch von Functionen und deren Conjugirten (vergl. 347, XI., u. s. w.) einführen.

(6.) Mir scheint indessen hier der rechte Platz zu sein, zu bemerken, dass, wenn wir für irgend vier Quaternionen, p, q, r, s, die Gleichungen hinschreiben, als Bezeichnungsweisen, welche für den Augenblick benutzt werden,

$$\text{XVI.}\ldots [pq] = pq - qp;$$
$$\text{XVII.}\ldots (pqr) = S.p\,[qr];$$
$$\text{XVIII.}\ldots [pqr] = (pqr) + [rq]\,Sp + [pr]\,Sq + [qp]\,Sr;$$

und

$$\text{XIX.}\ldots (pqrs) = S.p\,[qrs],$$

so dass $[pq]$ ein Vector ist, (pqr) und $(pqrs)$ Skalare sind, und $[pqr]$ ein Quaternion ist, — dass wir, in erster Linie, die Beziehungen haben:

$$\text{XX.}\ldots [pq] = -[qp], \qquad [pp] = 0;$$
$$\text{XXI.}\ldots (pqr) = -(qpr) = (qrp) = \text{u. s. w.},$$
$$(ppr) = 0;$$
$$\text{XXII.}\ldots [pqr] = -[qpr] = [qrp] = \text{u. s. w.},$$
$$[ppr] = 0;$$

und

$$\text{XXIII.}\ldots (pqrs) = (qprs) = (qrps) = -(qrsp) = \text{u. s. w.},$$
$$(pprs) = 0.$$

(7.) In zweiter Linie wird die quaternion Gleichung,

$$\text{XXIV.}\ldots 0 = p(qrst) + q(rstp) + r(stpq) + s(tpqr) + t(pqrs),$$

in der t irgend ein fünfter Quaternion ist, und welche auch so geschrieben werden kann,

$$\text{XXV.}\ldots q(prst) = p(qrst) + r(pqst) + s(prqt) + t(prsq),$$

und welche der vector Gleichung,

$$\text{XXVI.}\ldots 0 = \alpha S\beta\gamma\delta - \beta S\gamma\delta\alpha + \gamma S\delta\alpha\beta - \delta S\alpha\beta\gamma,$$

analog ist, oder der beständig* anzutreffenden Transformation (vergl. 294, XIV.),

$$\text{XXVII.}\ldots \delta S\alpha\beta\gamma = \alpha S\delta\beta\gamma + \beta S\alpha\delta\gamma + \gamma S\alpha\beta\delta,$$

— allgemein befriedigt, denn sie wird für die vier verschiedenen Annahmen befriedigt,

$$\text{XXVIII.}\ldots q = p, \qquad q = r, \qquad q = s, \qquad q = t.$$

(8.) An dritter Stelle haben wir die weitere allgemeine quaternion Gleichung,

$$\text{XXIX.}\ldots q(prst) = [rst]\,Spq - [stp]\,Srq + [tpr]\,Ssq - [prs]\,Stq;$$

sie ist der anderen** nützlichen vector Formel (vergl. 294, XV.] ähnlich,

---

* Die Gleichungen XXVII. und XXX., welche in ein wenig verschiednen Formen in den Nebenartikeln zu 294 bewiesen worden sind, sind in der That in freier Weise als Transformationen im Verlaufe des gegenwärtigen Kapitels angewandt worden, und es wird von ihnen angenommen, dass sie dem Leser vertraut sind. Vergleiche die Anmerkung zu Seite 641.

** Vergleiche die unmittelbar vorhergehende Anmerkung.

Digitized by Google

$$\text{XXX.}\ldots \delta S\alpha\beta\gamma = V\beta\gamma\, S\alpha\delta + V\gamma\alpha\, S\beta\delta + V\alpha\beta\, S\gamma\delta;$$

denn die Gleichung XXIX. ergiebt richtige Resultate, wenn man an ihr mit den vier verschiedenen Symbolen (vergl. 312),

$$\text{XXXI.}\ldots S.p, \quad S.r, \quad S.s, \quad S.t,$$

operirt.

(9.) Nimmt man daher irgend vier Quaternionen, p, r, s, t, an, welche nicht durch die Beziehung,

$$\text{XXXII.}\ldots (prst) = 0,$$

verbunden sind, und leitet man von ihnen vier weitere Quaternionen, p', r', s', t', ab, durch die Gleichungen,

$$\text{XXXIII.}\ldots \begin{cases} p'(prst) = f[rst], \\ r'(prst) = -f[stp], \\ s'(prst) = f[tpr], \\ t'(prst) = -f[prs], \end{cases}$$

in denen wieder vorausgesetzt ist, dass f ein Symbol für eine lineare und quaternion Operation an einem Quaternion sei, so erlaubt uns die Formel XXIX. allgemein, als Ausdruck für die Function fq, welche hier durch q' bezeichnet werden kann (denn r wird jetzt anderweitig gebraucht), zu schreiben:

$$\begin{aligned} \text{XXXIV.}\ldots q' &= fq \\ &= p'\,Spq + r'\,Srq + s'\,Ssq + t'\,Stq; \end{aligned}$$

und seine sechszehn skalar Constanten [vergl. 364, (2.)] sind jetzt diejenigen, welche in seinen vier quaternion Constanten, p', r', s', t' enthalten sind.

(10.) Operirt man an dieser letzten Gleichung mit den vier Symbolen,

$$\text{XXXV.}\ldots S.[r's't'], \quad S.[s't'p'], \quad S.[t'p'r'], \quad S.[p'r's'],$$

so erhält man die folgenden vier Resultate:

$$\text{XXXVI.}\ldots \begin{cases} (q'r's't') = (p'r's't')\,Spq; \\ (q's't'p') = (r's't'p')\,Srq; \\ (q't'p'r') = (s't'p'r')\,Ssq; \\ (qp'r's') = (t'p'r's')\,Stq; \end{cases}$$

und wenn die so für die vier Skalare,

$$\text{XXXVII.}\ldots Spq, \quad Srq, \quad Ssq, \quad Stq,$$

Digitized by Google

gefundenen Werthe in die Formel XXIX. eingesetzt werden, so erhalten wir die folgende neue Formel für quaternion Inversion:

$$\text{XXXVIII.}\ldots (p'r's't')(prst)q = (p'r's't')(prst)f^{-1}q'$$
$$= [rst](q'r's't') + [stp](q's't'p') + [tpr](q't'p'r') + [prs](q'p'r's');$$

sie zeigt, auf einem neuen Wege, wie eine lineare Gleichung in Quaternionen aufzulösen ist, wenn sie auf die — wie wir sagen können [vergl. 347, (1.)] — viergliedrige Grundform XXXIV. gebracht wird.

(11.) Wenn wir demnach an der Formel XXXVIII. mit f operiren, und auf die Gleichungen XXXIII. achten, und durch $(prst)$ dividiren, so bekommen wir die neue Gleichung,

$$\text{XXXIX.}\ldots (p'r's't')fq = p'(q'r's't') - r'(q's't'p') + s'(q't'p'r') - t'(q'p'r's');$$

und danach ist

$$fq = q',$$

nach XXV.

(12.) Es ist bemerkt worden (9.), dass p, r, s, t, in den letzten Formeln, irgend vier Quaternionen sein können, welche nicht der Gleichung XXXII. genügen; wir können daher annehmen,

$$\text{XL.}\ldots p = 1, \quad r = i, \quad s = j, \quad t = k,$$

und die Gesetze aus 182, u. s. w., für die Symbole i, j, k, denn diese Gesetze ergeben hier,

$$\text{XLI.}\ldots (1ijk) = -2;$$

und dann wird man finden, dass die Gleichungen XXXIII. einfach ergeben,

$$\text{XLII.}\ldots p' = f1, \quad r' = -fi, \quad s' = -fj, \quad t' = -fk;$$

so dass die viergliedrige Grundform XXXIV., bei dieser Wahl von $prst$, wird

$$\text{XLIII.}\ldots fq = f1 \,.\, Sq - fi \,.\, Siq - fj \,.\, Sjq - fk \,.\, Skq,$$

und sie lässt sich unmittelbar verificiren, denn irgend ein Quaternion, q, kann durch die viergliedrige Form,

Digitized by Google

$$\text{XLIV.}\ldots q = Sq - iSiq - jSjq - kSkq,$$

ausgedrückt werden (vergl. 221).

(13.) Umgekehrt, wenn wir mit dem Ausdruck,

$$\text{XLV.}\ldots q = w + ix + jy + kz, \qquad 221, \text{ III.},$$

beginnen, der ergiebt,

$$\text{XLVI.}\ldots fq = wf1 + xfi + yfj + zfk,$$

oder kurz,

$$\text{XLVII.}\ldots e = aw + bx + cy + dz,$$

wobei die Buchstaben $abcde$ hier gebraucht werden, um fünf bekannte Quaternionen zu bezeichnen, während $wxyz$ vier gesuchte Skalare sind, so wird das Problem der quaternion Inversion, die gesonderte Bestimmung (vergl. 312) jener vier Skalare, in der Weise, dass sie die eine Gleichung XLVII. befriedigen; und es wird durch das System der folgenden vier Formeln gelöst (vergl. XXV.):

$$\text{XLVIII.}\ldots \begin{cases} w(abcd) = (ebcd), \\ x(abcd) = (aecd), \\ y(abcd) = (abed), \\ z(abcd) = (abce); \end{cases}$$

die Bezeichnungen (6.) sind beibehalten.

(14.) Endlich kann man zeigen, dass die biquadratische Gleichung I., für lineare Functionen von Quaternionen, die cubische Gleichung I'., oder 350, I., für Vectoren einschliesst.*

---

* In gleicher Weise kann man sagen, dass die cubische Gleichung eine quadratische einschliesst, wenn wir uns selbst auf die Betrachtung von Vectoren in einer Ebne beschränken; für diesen Fall ist $m = 0$, und auch $\psi\varrho - 0$, wenn ϱ eine Linie in der gegebnen Ebne ist: denn wir haben dann

$$\varphi\chi = m' - \psi = m',$$

oder

$$\varphi^2 - m'\varphi + m' = 0,$$

wobei man darunter einen Operanden zu verstehen hat. In der That ergiebt die cubische Gleichung hier (da $m = 0$),

$$(\varphi^2 - m''\varphi + m')\varphi\varrho = 0;$$

und daher

$$(\varphi^2 - m''\varphi + m')\,\sigma = 0;$$

wenn σ schon das Resultat einer Operation mit φ ist, an irgend einem Vector ϱ: das heisst, wenn es eine Linie in der gegebnen Ebne ist, wie vorher angenommen wurde.

Nehmen wir, zu diesem Zweck, an, dass sich die lineare und quaternion Function, fq, von selbst auf das letzte Glied des allgemeinen Ausdrucks 364, XII. reducirt, oder dass sie wird,

$$\text{XLIX.} \ldots fq = \varphi Vq,$$

so dass

$$\text{L.} \ldots e = 0, \qquad \varepsilon = \varepsilon' = 0,$$
$$f1 = f'1 = 0;$$

so nehmen die Coefficienten n, n', n'', n''' dann, nach XIII., die Werthe an,

$$\text{LI.} \ldots n = 0, \qquad n' = m, \qquad n'' = m', \qquad n''' = m'';$$

und die biquadratische Gleichung L wird,

$$\text{LII.} \ldots 0 = (-m + m'f - m''f^2 + f^3)f.$$

Aber fq ist jetzt ein Vector, nach XLIX., und es kann irgend ein Vector, ϱ, sein; auch ist die Operation f jetzt mit derjenigen gleichbedeutend, welche durch φ bezeichnet wird, wenn der Gegenstand der Operation ein Vector ist; wir können daher, in dem hier betrachteten Falle, die letzte Gleichung LII. unter der Form hinschreiben,

$$\text{LIII.} \ldots 0 = (-m + m'\varphi - m''\varphi^2 + \varphi^3)\varrho;$$

sie stimmt mit 351, I. überein, und reproducirt die symbolische cubische Gleichung, wenn das Symbol des Operanden (ϱ) unterdrückt wird.

Digitized by Google

Verlag von **Joh. Ambr. Barth** in Leipzig.

Helmholtz, H., Wissenschaftliche Abhandlungen. I. Band. 1882. gr. 8°. VIII, 938 Seiten, 3 lith. Tafeln und Portrait.

Preis ℳ 20.—

Neudruck in verschied. wissenschaftl. Zeitschriften, sowie als einzelne selbständige Schriften veröffentlichter Abhandlungen aus folgenden Gebieten:

Zur Lehre von der Energie. — Hydrodynamik. — Schallbewegung. — Elektrodynamik. — Galvanismus.

II. Band (unter der Presse):

Physiologische Optik. — Physiol. Akustik. — Erkenntnisstheorie. — Physiologie. — Nachtrag.

(Die I. Abth. des II. Bds., Bogen 1—30 enth., ist bereits ausgegeben. Preis 10 ℳ).

Kirchhoff, G., Gesammelte Abhandlungen. gr. 8°. VIII, 641 Seiten mit 2 lith. Tafeln und Portrait. 1882. Preis ℳ 15.—

Clausius, R., Die Potentialfunction und das Potential. Ein Beitrag zur mathematischen Physik. 3. Aufl. gr. 8°. X, 178 Seiten. 1877. ℳ 4.—

Clausius, R., Ueber die verschiedenen Maass-Systeme zur Messung elektrischer und magnetischer Grössen. 8°. 24 Seiten. 1882. ℳ 0,60.

Besonders abgedruckt aus den Annalen der Physik.

Noth, H., Die Arithmetik der Lage. Ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Raumlehre. Mit Berücksichtigung ebener geometrischer Gebilde erster und zweiter Ordnung. gr. 8°. 90 Seiten. 1881. Mit Figuren. ℳ 2.40.

„Der Gedanke, einen derartigen arithmet. Formalismus in der Geometrie der Lage einzuführen, findet sich zwar schon bei Möbius, Staudt, Fiedler, Battaglini und besonders bei Grassmann, aber er ist hier zum ersten Mal so behandelt, dass er zum Ausgangspunkt für die Geometrie der Lage dient. Die sinnreiche Methode ist vom Verf. in klarer verständlicher Form auseinandergesetzt und dazu benutzt, die Beziehungen zwischen Pol und Polare und die Sätze von Pascal und Brianchon auf äusserst einfache Weise herzuleiten." (Deutsche Lit.-Ztg.)

Penck, Albr., Die Vergletscherung der deutschen Alpen, ihre Ursachen, periodische Wiederkehr und ihr Einfluss auf die Bodengestaltung. Von d. philos. Facultät d. Universität München gekrönte Preisschrift. VIII, 484 Seiten. gr. 8°. 2 Tabellen, 2 col. Karten und 2 Profiltafeln. 1882. ℳ 12.—

Digitized by Google

Verlag von **Joh. Ambr. Barth** in Leipzig.

Lohrmann, W. G., Mondkarte, in 25 Sectionen und 2 erläut. Tafeln; 49 Seiten Text und Portrait, herausgegeben von Julius Schmidt. gr. 4°. 1878. In Mappe 50 ℳ.

Diese ganz in Kupfer gestochene Mondkarte, das Werk 50jähriger Arbeit, ist nicht mit der ebenfalls 1878 erschienenen photolith. Mondkarte von Julius Schmidt zu verwechseln.

Poggendorff, J. C., Geschichte der Physik. Vorlesungen gehalten an der Universität Berlin. 8°. 937 Seiten. 1879. ℳ 16.80.

Melde, Franz, Die Lehre von den Schwingungscurven, nach fremden und eignen Untersuchungen. 228 Seiten. 8°. nebst 11 lith. Tafeln in gr. 4°. 1864. ℳ 8.—

Groshans, J. A., Ein neues Gesetz, analog dem Gesetz von Avogadro. Deutsch von F. Roth. 8°. 80 Seiten. 1882. ℳ 2.—

Während das Gesetz Avogadro's die Körper in gasförmigem Zustand unter gleichem Druck und gleicher Temperatur vergleicht, behandelt das Groshans'sche Gesetz dieselben unter gleichem Druck aber ungleichen correspondirenden Temperaturen (wie z. B. die Siedepunkte), und ist auch auf den flüssigen Zustand anwendbar.

Van der Waals, Die Continuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. Uebersetzt und mit Zusätzen versehen von F. Roth. 176 Seiten. 8°. Mit 2 Tafeln. 1881. ℳ 4.—

„Das Buch enthält eine Fülle von anregenden Gedanken, die zu „weiterer Ausführung Anlass geben werden. Verf. ist bemüht, das Nicht-„vorhandensein eines prinzipiellen Unterschieds zwischen flüssigem und „gasförmigem Aggregatzustand nachzuweisen" u. s. w.

(Neesen, Deutsche Lit. Ztg. 1881 Nr. 5.)

Fernere Besprechungen im Literar. Centralblatt 1882 Nr. 6. — Naturforscher 1882 Nr. 6. — Archiv f. Math. u. Physik Bd. 68, 2 u. s. w.

Donadt, Alfr., Das mathematische Raumproblem und die geometrischen Axiome. 8°. 68 Seiten. 1881. ℳ 1.60.

Digitized by Google

Digitized by Google

JAN 30 1959

Digitized by Google